«Ce qu'il faut savoir sur »
Le principe fondamental de la dynamique

Torseurs

Cinétique

Définition :

$$_A\{C_{S/R}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{p_{S/R}} = \int_{P\in S} \overrightarrow{V_{P/R}}\, dm \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \int_{P\in S} \overrightarrow{AP}\wedge \overrightarrow{V_{P/R}}\, dm \end{Bmatrix}$$

Pratiquement :

$$_A\{C_{S/R}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{p_{S/R}} = m\cdot\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \overrightarrow{AG}\wedge m\cdot\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + [I_{A,S}]\cdot\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \end{Bmatrix}$$

Cas particuliers :

A est en G : $\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}} = [I_{G,S}]\cdot\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

A est fixe dans R : $\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = [I_{A,S}]\cdot\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

S est en translation dans R : $\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \overrightarrow{AG}\wedge m\cdot\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$

A savoir :

- $\overrightarrow{\sigma_{B,S/R}} = \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} + \overrightarrow{BA}\wedge m\cdot\overrightarrow{V_{G\in S/R}}$
- Pour un ensemble matériel : $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$:

$$\overrightarrow{\sigma_{(A,\Sigma/R)}} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{\sigma_{(A,S_i/R)}}$$

Dynamique

Définition :

$$_A\{D_{S/R}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{D\,S/R}} = \int_{P\in S} \overrightarrow{a_{P/R}}\, dm \\ \overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \int_{P\in S} \overrightarrow{AP}\wedge \overrightarrow{a_{P/R}}\, dm \end{Bmatrix}$$

Pratiquement :

$$_A\{D_{S/R}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{D\,S/R}} = m\cdot\overrightarrow{a_{G\in S/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \overrightarrow{V_{A/R}}\wedge m\cdot\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \left[\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}}{dt}\right]_R \end{Bmatrix}$$

Cas particuliers :

A est en G : $\overrightarrow{\delta_{G,S/R}} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}}}{dt}\right]_R$

A est fixe dans R ou $\overrightarrow{V_{A/R}}\,//\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}$: $\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}}{dt}\right]_R$

A savoir :

- $\overrightarrow{\delta_{B,S/R}} = \overrightarrow{\delta_{A,S/R}} + \overrightarrow{BA}\wedge m\cdot\overrightarrow{a_{G\in S/R}}$
- Pour un ensemble matériel : $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$:

$$\overrightarrow{\delta_{(A,\Sigma/R)}} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{\delta_{(A,S_i/R)}}$$

P.F.D. appliqué à un solide S dans un repère galiléen R_g

$$_A\{D_{S/R_g}\} = {}_A\{T_{\bar{S}\to S}\} \text{ qui donne : } \begin{cases} m\cdot\overrightarrow{a_{G\in S/R_g}} = \overrightarrow{R_{\bar{S}\to S}} \;:\; \textit{Théorème de la résultante dynamique} \\ \overrightarrow{\delta_{A,S/R_g}} = \overrightarrow{M_{A\,\bar{S}\to S}} : \textit{Théorème du moment dynamique en } A \end{cases}$$

Les deux théorèmes en se projetant dans une base de calcul donnent 6 équations scalaires permettant de déterminer :

- Des équations différentielles du mouvement + action exerçant un travail
- Des actions de liaisons de travail nul.

Remarques :

- Simplification du théorème du moment en projection sur un axe dans les cas particuliers ou A est en G ou si A est fixe dans R_g :

$$\overrightarrow{\delta_{G,S/R_g}}\cdot\vec{u} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G,S/R_g}}\cdot\vec{u}}{dt}\right]_{R_g} - \overrightarrow{\sigma_{G,S/R_g}}\cdot\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_g}$$

- Cas d'une masse ponctuelle en G : $\overrightarrow{\sigma_{G,S/R_g}} = \overrightarrow{\delta_{G,S/R_g}} = \vec{0}$

Test PFD

A aucun moment il n'est demandé une forme intégrale définissant résultante ou moment d'un torseur cinétique ou dynamique. Sont attendues les formes faisant apparaître masses, géométrie, vitesses, accélérations, rotations, matrices d'inertie et dérivées.

On note G le centre de gravité du solide S de masse m.

Q1. Donner le torseur cinétique ${}_A\{C_{S/R}\}$ en un point A quelconque en détaillant résultante et moment en respectant scrupuleusement les notations nécessaires à leur compréhension.

Q2. Donner le torseur cinétique ${}_A\{D_{S/R}\}$ en un point A quelconque en détaillant résultante et moment en respectant scrupuleusement les notations nécessaires à leur compréhension.

Q3. Donner l'expression simplifiée de $\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}}$ et de $\overrightarrow{\delta_{G,S/R}}$.

Q4. Écrire sous forme d'égalité de deux torseurs ce que permet d'écrire le P.F.D. appliqué à un solide S dans un référentiel galiléen R_g.

Soit m la masse de S et J son moment d'inertie autour de l'axe $(O;\vec{z})$. S est en liaison pivot glissant d'axe $(O;\vec{z})$ avec le bâti supposé fixé à un référentiel Galiléen R_g. S est soumis à un couple $C \cdot \vec{z}$ et une force $F \cdot \vec{z}$ en O. On appelle z sa position suivant $(O;\vec{z})$ et θ sa position angulaire autour de $(O;\vec{z})$.

Q5. Donner les deux équations scalaires du mouvement de S en projection sur $\vec{z}$ en fonction des paramètres z et θ.

Q6. Quelles informations peut-on tirer des projections des théorèmes de la résultante et du moment dynamiques ?

Q7. Proposer la simplification possible du calcul du moment dynamique en G en projection sur un axe $\vec{u}$: $\overrightarrow{\delta_{G,S/R_g}} \cdot \vec{u}$