

# 9.2 Exercices statique : modélisation globale

---

## Table des matières

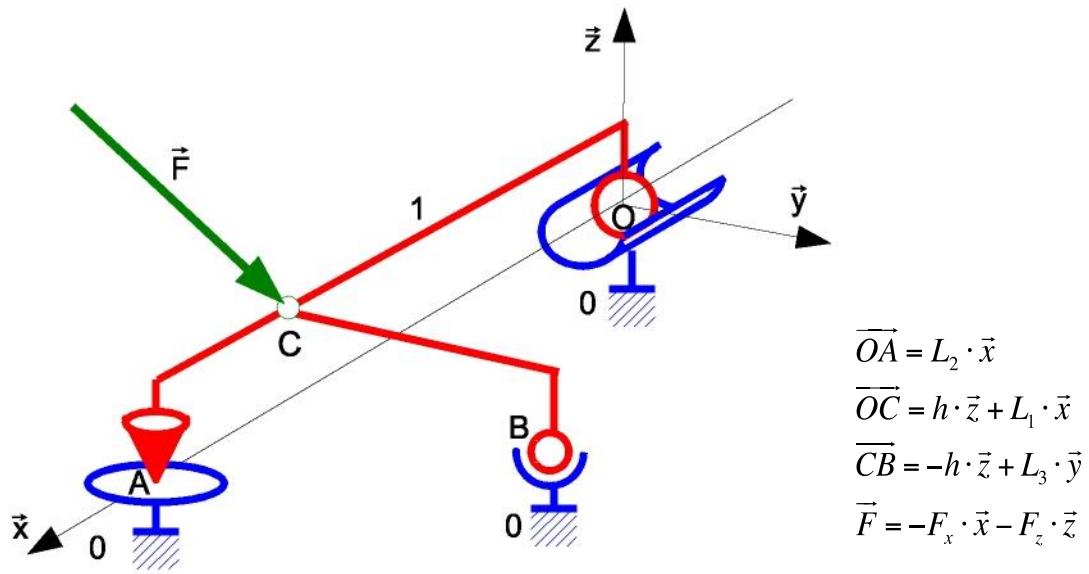
9.2.1 Mécanisme d'ablocage :.....	2
I Présentation :.....	2
II Travail demandé: .....	2
9.2.2 Etude statique d'un guidage en rotation : .....	3
I Présentation .....	3
II Travail demandé .....	4
9.2.3 Système bielle manivelle :.....	5
I Présentation .....	5
II Travail demandé .....	6
9.2.4 Suspension automobile :.....	7
I Présentation .....	7
II Travail demandé .....	8
9.2.5Bobineuse pour papier Kraft D'après E3A MP 2009 .....	9
I Présentation .....	9
II Travail demandé .....	11
Document réponse .....	13
9.2.6 Pince de robot : .....	14
I Présentation .....	14
II Travail demandé .....	15

## 9.2.1 Mécanisme d'ablocage :

### I Présentation :

On considère le mécanisme suivant constitué par deux solides 1 et 0. Le bâti 0 doit permettre l'immobilisation de la pièce 1, soumise à un usinage représenté par la force  $\vec{F}$ .

L'objectif est ici de déterminer les Actions Mécaniques exercées dans les zones de liaisons entre les deux solides.



### II Travail demandé :

**Q1.** Écrire les torseurs d'action transmissibles par chaque liaison. On représentera une action mécanique au point P par son torseur en utilisant la notation suivante :

$$P \left\{ \begin{array}{ll} X_P & L_P \\ Y_P & M_P \\ Z_P & N_P \end{array} \right\} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

**Q2.** Écrire tous les torseurs au point B, y compris le torseur d'action mécanique associé à  $\vec{F}$ .

**Q3.** Écrire les 6 équations issues de l'application du P.F.S. sur le solide 1.

**Q4.** Déterminer toutes les inconnues de liaison en fonction de  $F_x$  et  $F_z$ .

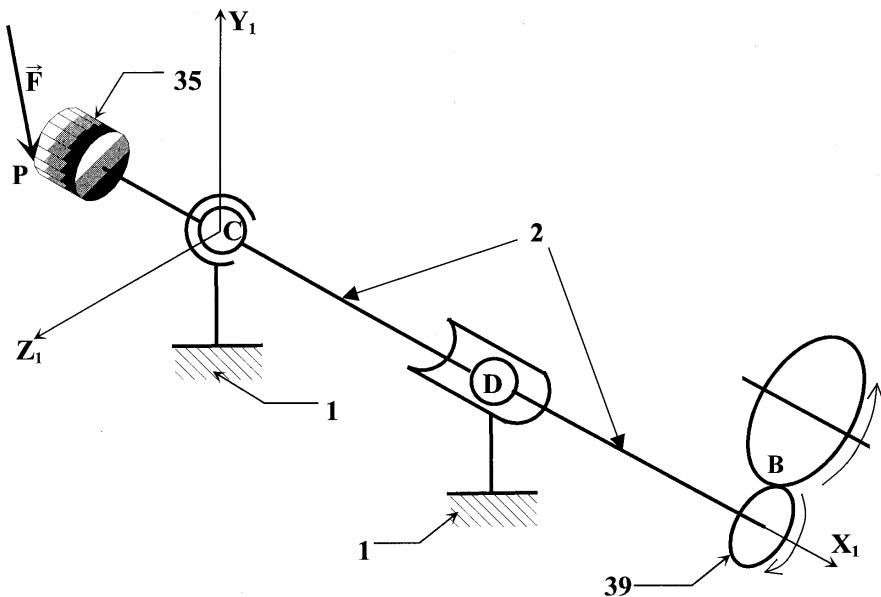
**Q5.** Faire l'application numérique pour :

$$F_x = 20 \text{ N}, F_z = 40 \text{ N}, L_1 = 30 \text{ cm}, L_2 = 40 \text{ cm}, L_3 = 25 \text{ cm} \text{ et } h = 10 \text{ cm}.$$

## 9.2.2 Etude statique d'un guidage en rotation :

### I Présentation :

Le support de cette étude est le guidage en rotation de la broche d'une machine outil. Une modélisation de ce guidage est proposée figure suivante :



L'outil 35 fixé à la broche 2 est entraîné en rotation par le pignon 39. Une roue non repérée engrène en B avec le pignon 39 solidaire de la pièce 2.

La broche tournant à vitesse constante, on néglige l'inertie de l'ensemble et on considère, de ce fait, que le système est en équilibre.

#### Hypothèses et données :

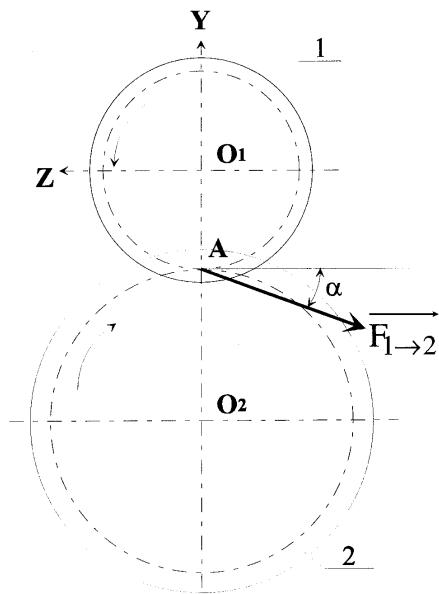
- L'effort de coupe est modélisé par le glisseur suivant :

$$P \quad \{T_{\text{pièce} \rightarrow 2}\} = \quad P \quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} = F_a \cdot \vec{X}_1 - F_c \cdot \vec{Y}_1 - F_f \cdot \vec{Z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \text{ avec } \overrightarrow{CP} = -L_1 \cdot \vec{X}_1 + R_{35} \cdot \vec{Z}_1 ;$$

- $\overrightarrow{CD} = L_2 \cdot \vec{X}_1$  et  $\overrightarrow{CB} = L_3 \cdot \vec{X}_1 + R_{39} \cdot \vec{Y}_1$ ;
- $L_1 = 180 \text{ mm}$ ,  $L_2 = 228 \text{ mm}$ ,  $L_3 = 318 \text{ mm}$ ,  $R_{35} = 32 \text{ mm}$  et  $R_{39} = 43 \text{ mm}$  ;
- Les liaisons sont parfaites ;
- Le poids des pièces est négligé ;

- Concernant les engrenages :

La direction de l'action mécanique d'une roue 1 motrice sur une roue 2 réceptrice dans un engrenage est telle que :



Avec  $\alpha$  angle de pression  $\alpha = 20^\circ$

## II Travail demandé :

**Q1.** Proposer une modélisation des différentes actions mécaniques appliquées à 2 sous forme de torseurs.

**Q2.** Déterminer les expressions littérales de ces différentes actions mécaniques en fonction de  $F_a$ ,  $F_c$ ,  $F_f$  et des données géométriques.

Faire l'application numérique avec  $F_a=120N$ ,  $F_c= 1200N$  et  $F_f= 800N$

## 9.2.3 Système bielle manivelle :

### I Présentation :

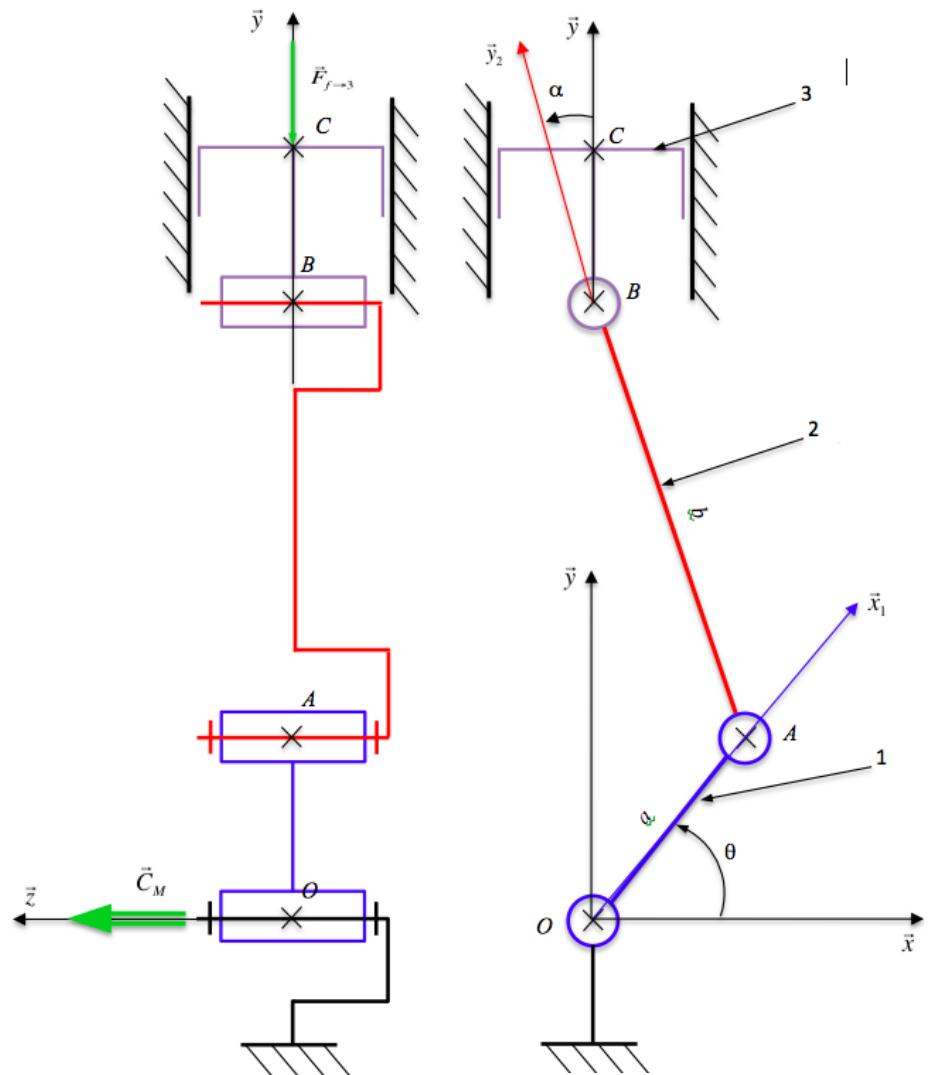
Le système étudié ici est une pompe à huile. Un moteur entraîne en rotation la manivelle (1). La cinématique du système induit un mouvement alternatif du piston (3) qui aspire de l'huile basse pression et refoule l'huile à une pression supérieure.

Le système décrit par le schéma ci dessus est constitué par :

Une manivelle (1) de longueur  $a$  en liaison pivot d'axe ( $O; \vec{z}$ ) avec le bâti 0.

Une bielle de longueur  $b$  en liaison pivot d'axe ( $A; \vec{z}$ ) avec 1 et en liaison pivot glissant d'axe ( $B; \vec{z}$ ) avec le piston 3.

Un piston 3 de rayon  $R$  en liaison pivot glissant d'axe ( $C; \vec{y}$ ) avec le bâti 0



On donne :  $\overrightarrow{OA} = a \cdot \vec{x}_1$  ;  $\overrightarrow{AB} = b \cdot \vec{y}_2$  ;  $\overrightarrow{OB} = y_B \cdot \vec{y}$ .

L'objectif de l'étude est de déterminer le couple moteur  $\vec{C}_M = C_M \vec{z}$  engendré par la pression du fluide (huile) sur le piston pendant la phase de refoulement de la pompe.

Hypothèses :

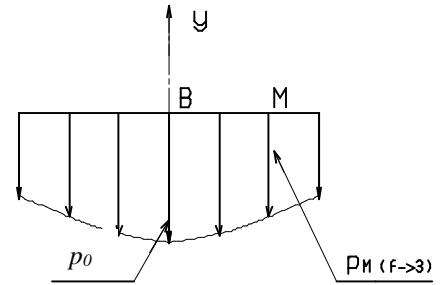
- On admettra que le système admet le plan ( $O; \vec{x}, \vec{y}$ ) comme plan de symétrie pour la géométrie et les efforts.
- On négligera le poids des pièces devant les efforts mis en jeu.
- Les liaisons sont supposées parfaites.

Données :

La répartition de la pression du fluide sur le piston (3) est représentée par le schéma ci-contre :

On constate que  $\vec{p}_M (f \rightarrow 3)$  est fonction du rayon sur lequel M est placé :

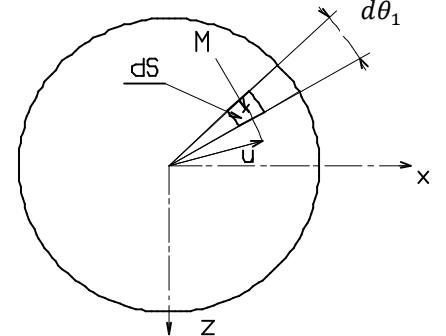
$$\vec{p}_M (f \rightarrow 3) = -(p_0 - \frac{p_0 \cdot u^2}{3 \cdot R^2}) \vec{y}$$



On modélisera, globalement, l'action due à la pression du fluide sur le piston au point C par le torseur :

$$\{T(f \rightarrow 3)\} = C \begin{Bmatrix} \vec{F}_{f \rightarrow 3} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ avec}$$

$$\vec{F}_{f \rightarrow 3} = \int_{M \in 3} \vec{p}_M (f \rightarrow 3) \cdot dS$$



**II Travail demandé :**

**Q1.** A partir de l'équation de fermeture géométrique du système exprimer  $y_B$  en fonction de  $a$ ,  $b$ , et  $\theta$  puis trouver la relation  $\alpha$  en fonction de  $a$  et  $\theta$ .

**Q2.** Déterminer la résultante des actions de pression du fluide sur le piston (3) au point C en fonction de  $p_0$  et  $R$ .

**Q3.** Réaliser le schéma d'analyse

**Q4.** Etudier l'équilibre de la bielle 2 en déduire une relation entre  $X_{23}$ ,  $Y_{23}$  et  $\alpha$

**Q5.** Déterminer l'ordonnancement des isolements afin de déterminer le couple moteur  $\vec{C}_M = C_M \vec{z}$ .

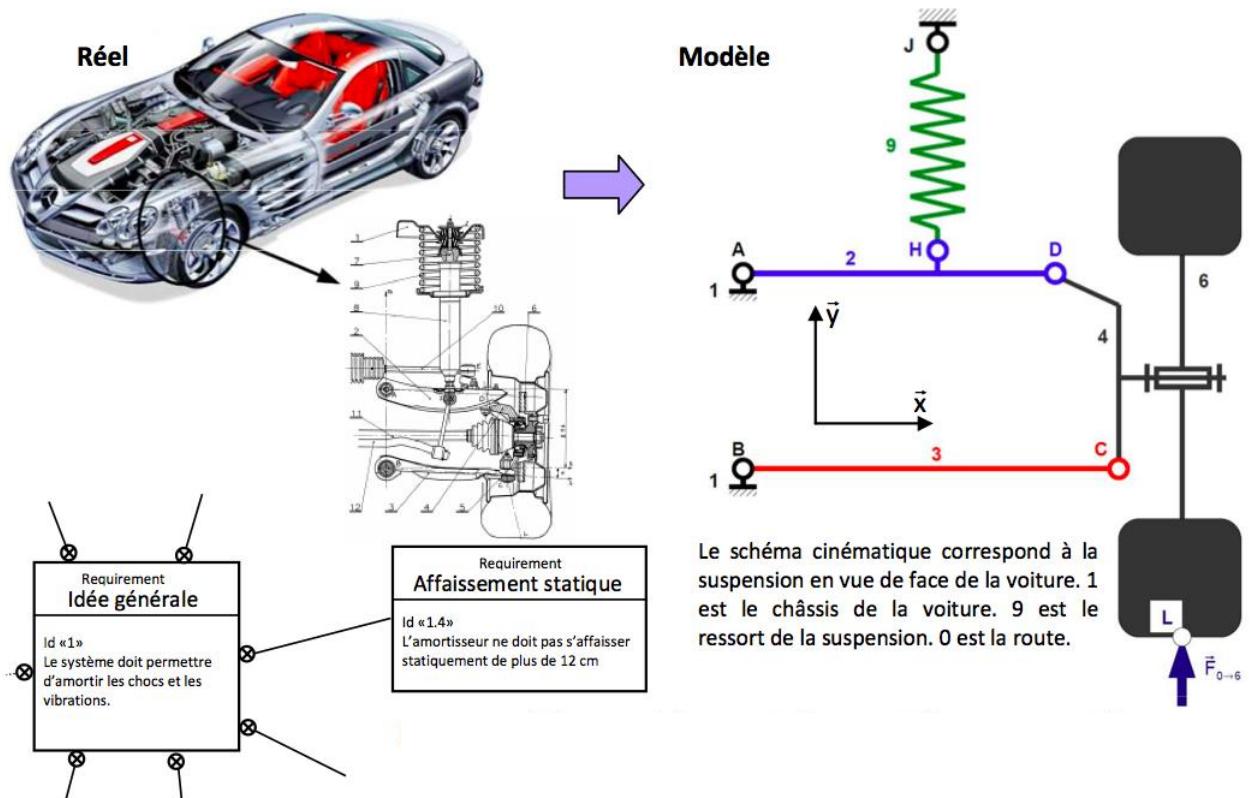
**Q6.** Déterminer le couple moteur

**Q7.** Faire l'application numérique :  $p_0 = 5 \text{ MPa}$ ,  $R = 15 \text{ mm}$ ,  $b = 100 \text{ mm}$ ,  $a = 40 \text{ mm}$ ,  $\theta = 20^\circ$

## 9.2.4 Suspension automobile<sup>1</sup> :

### I Présentation :

On s'intéresse à une suspension automobile dont on donne ci-dessous un extrait de cahier des charges fonctionnel ainsi qu'une modélisation. L'objectif est de vérifier si la suspension satisfait le niveau du critère d'affaissement statique maximal du cahier des charges, c'est à dire vérifier si la voiture, soumise à son propre poids, s'affaisse de moins ou de plus de 12 cm, suite à l'écrasement des amortisseurs.



Données :

$$\overrightarrow{BA} = a \cdot \vec{y}; \overrightarrow{BC} = b \cdot \vec{x}; \overrightarrow{AD} = d \cdot \vec{x}; \overrightarrow{AH} = L \cdot \vec{x} + h \cdot \vec{y}; \overrightarrow{DC} = c \cdot \vec{x} - a \cdot \vec{y};$$

$$\overrightarrow{CL} = e \cdot \vec{x} - \mu \cdot \vec{y}; \overrightarrow{HJ} \text{ est toujours parallèle à } \vec{y}$$

Hypothèses :

- le problème est plan;
- la pesanteur est négligée;
- toutes les liaisons sont parfaites.
- L'action du sol sur la roue est modélisée par  $\vec{F}_{0-6} = F_{06} \cdot \vec{y}$  (où  $F_{06}$  représente le quart du poids de la voiture, qui se répartit également sur les quatre roues).

<sup>1</sup> d'après F Mathurin

## II Travail demandé :

**Q1.** Montrer que  $Y_{43}=0$ .

**Q2.** Déterminer les équations obtenues en appliquant le PFS à l'ensemble {4+6} au point D.

**Q3.** Montrer que  $X_{92}=0$ .

**Q4.** Déterminer les équations obtenues en appliquant le PFS au solide 2 au point A.

**Q5.** Déterminer toutes les inconnues d'effort en fonction de  $F_{06}$ .

Données :  $a = 16 \text{ cm}$ ,  $b = 33 \text{ cm}$ ,  $c = 8 \text{ cm}$ ,  $d = 25 \text{ cm}$ ,  $h = 3 \text{ cm}$ ,  $L = 15 \text{ cm}$ ,  $e = 9 \text{ cm}$ ,  $\mu = 18 \text{ cm}$ .

La raideur du ressort est  $k = 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . La masse de la voiture est de  $2200 \text{ kg}$ .

**Q6.** Conclure quant à la capacité de la suspension de voiture à satisfaire l'exigence

Affaissement statique du cahier des charges.

## 9.2.5 Bobineuse pour papier Kraft D'après E3A MP 2009

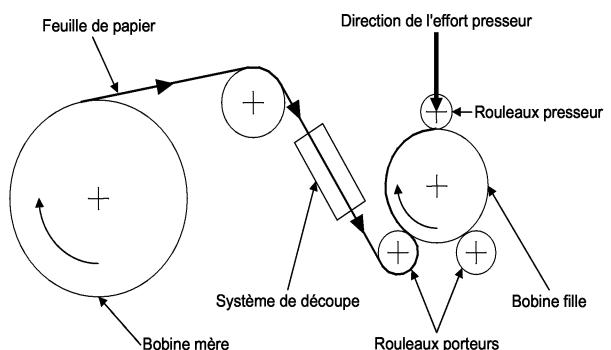
### I Présentation :

La production industrielle de papier se fait sous la forme de bobines de papier de plusieurs kilomètres de long et de 3 m de diamètre.

Ces bobines produites en sortie des machines à papier sont appelées bobines mères (voir figures ci-contre). Ce papier est impossible à livrer sous cette forme aux différents clients (trop volumineux et trop lourd), il est donc nécessaire de le recouper et de le reconditionner.

Ce conditionnement permet l'obtention de bobines de diamètres et de longueurs plus faibles qui peuvent être manutentionnées plus facilement. Ces bobines plus petites sont appelées bobines filles.

Les bobines filles peuvent avoir des dimensions variables en fonction des besoins du client. La machine permettant ce conditionnement est appelée bobineuse.

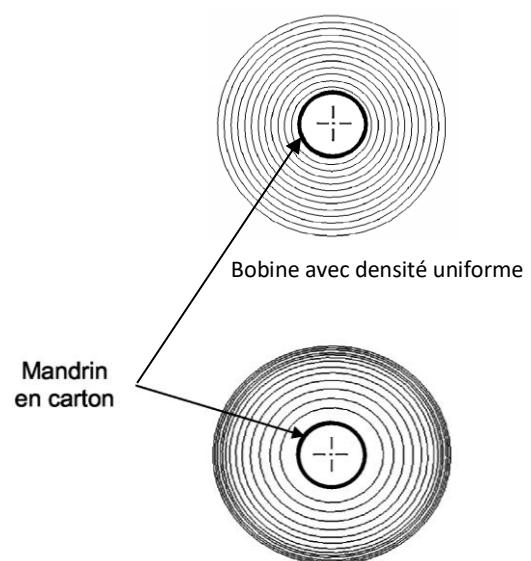


Vue en coupe simplifiée d'une bobineuse

### Problème de la densité des bobines filles :

Les bobines filles doivent pouvoir être déroulées (pour les machines d'imprimerie par exemple) avec les mêmes caractéristiques, du début à la fin de la bobine. Ceci implique d'avoir une densité de papier de la bobine constante du centre de la bobine à sa surface (voir figure ci-contre).

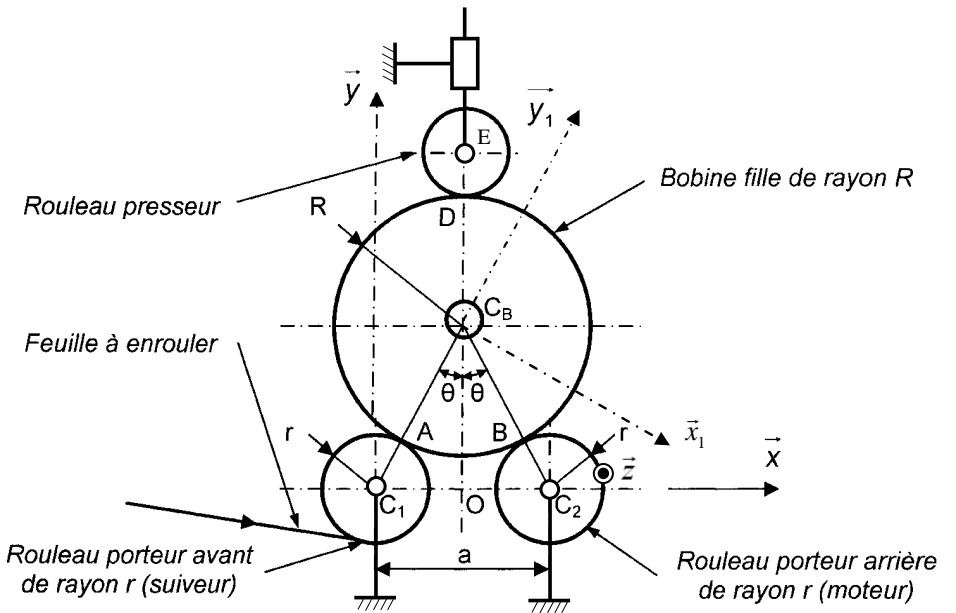
La machine doit donc être capable de réguler cette densité.



Bobine avec une variation radiale de densité

### Paramétrage :

La figure ci dessous représente une vue simplifiée de la bobine fille et des rouleaux porteurs :



### Notations :

Points particuliers		Dimensions		Actions mécaniques	
$C_B$	: centre de la bobine fille de rayon $R$	$a$	: entraxe entre les 2 rouleaux porteurs	$F$	: force appliquée par le rouleau presseur sur la bobine fille
$C_1$	: centre du rouleau porteur avant de rayon $r$	$R$	: rayon de la bobine fille	$T$	: tension de la feuille exprimée au point $A$
$C_2$	: centre du rouleau porteur arrière de rayon $r$	$L$	: largeur de la bobine fille	$P_B$	: poids de la bobine
$A$	: contact entre le rouleau porteur avant et la bobine fille	$R_m$	: rayon du mandrin	$R_A$	: effort du rouleau porteur avant sur la bobine fille
$B$	: contact entre le rouleau porteur arrière et la bobine fille	$r$	: rayon du rouleau porteur arrière et du rouleau porteur avant	$R_B$	: effort du rouleau porteur arrière sur la bobine fille
$D$	contact entre le rouleau presseur et la bobine fille			$C_m$	: couple d'entrainement appliqué au rouleau porteur arrière (moteur)
$E$	: centre du rouleau presseur				

Divers pour Application numérique			
$f = \tan(\varphi) = 0.3$	: coefficient de frottement rouleau porteur / papier	$\rho = 800 \text{ kg.m}^{-3}$	: masse volumique du papier
$D = 1800 \text{ mm}$	: diamètre maxi bobine fille	$300 \text{ mm} < L < 5080 \text{ mm}$	: largeurs bobine fille
$R_m = 50 \text{ mm}$	: rayon mandrin	$g = 9.81 \text{ m/s}^2$	: accélération de la pesanteur

### Hypothèses :

- L'élasticité longitudinale de la feuille de papier est supposée négligeable.
- Les inerties des deux rouleaux porteurs autour de leur axe sont négligeables devant la masse de la bobine.
- La masse des mandrins en carton est négligée devant celle du papier.
- La bobine fille tourne à vitesse constante.
- L'étude est faite en se plaçant aux conditions limites du glissement au niveau du rouleau porteur arrière qui est le seul rouleau moteur.

## **II Travail demandé :**

On souhaite dans un premier temps, établir la loi de variation  $F = f(\theta(t))$  de l'effort presseur nécessaire à l' obtention d'une densité constante.

**Q1.** En considérant que l'empilement de feuilles sur la bobine fille est homogène, donner l'expression littérale de son poids noté  $P_B$ . Faire l'application numérique pour une bobine fille de taille maximale.

**Q2.** Afin d'exprimer  $F = f(\theta(t))$ , on demande de déterminer les équations de mouvement de la bobine fille.

Pour cela **l'étude sera menée comme une étude de statique** (étude de l'équilibre de la bobine) puisque le mouvement de celle-ci par rapport au bâti est un mouvement à vitesse angulaire constante.

### Données spécifiques issues d'études préalables non demandées :

- L'étude de l'équilibre du rouleau porteur avant (suiveur) a permis de déterminer l'action mécanique exercée par le rouleau porteur sur la bobine :

$$A \quad \{T_{rps \rightarrow b}\} = A \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_A = R_A \cdot \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

- L'étude de l'équilibre du rouleau presseur a permis de déterminer l'action mécanique exercée par le rouleau presseur sur la bobine :

$$D \quad \{T_{rp \rightarrow b}\} = D \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = -F \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

- D'autre part l'action mécanique exercée par la feuille sur la bobine fille se modélise en A par le torseur :

$$A \quad \{T_{f \rightarrow b}\} = A \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{T} = T \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

**Q2.1.** Réaliser le schéma d'analyse du dispositif décrit à partir du schéma du paramétrage.

**Q2.2.** Faire l'isolement de la bobine et l'inventaire des A.M. extérieures agissant sur celle-ci.

Sur le schéma du document réponse représenter graphiquement ces A.M.

**Q2.3.** Ecrire le Principe fondamental de la statique

**Q2.4.** Déterminer l'expression de la tension  $T$  de la feuille de kraft en fonction de  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $\varphi$  et  $\theta$ .

**Q2.5.** Donner l'expression de l'effort presseur  $F$  en fonction de  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $P_B$ ,  $\varphi$  et  $\theta$

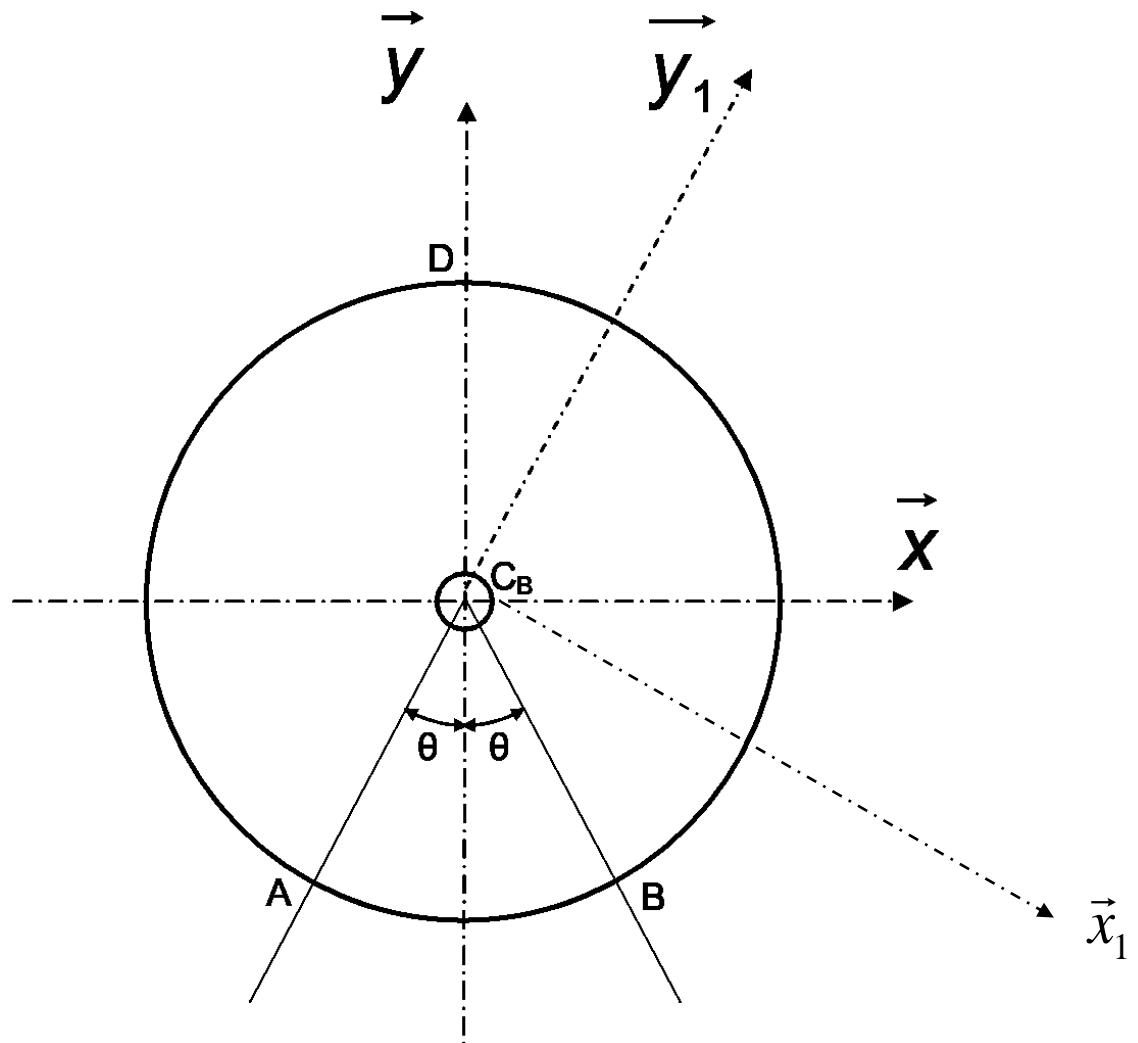
**Q3.** On s'intéresse maintenant au rouleau moteur. En utilisant l'hypothèse sur l'inertie des rouleaux :  $\sum \vec{M}_{C_2 \text{ rpm} \rightarrow \text{rpm}} = \vec{0}$

et sachant que le couple moteur  $C_m$  est modélisé par  $C_2 \{T_{mot \rightarrow rpm}\} = C_2 \begin{cases} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{z} \end{cases}$  :

Exprimer  $C_m$  en fonction de  $r$ ,  $R_B$  et  $\varphi$ .

**Q4.** Finalement donner l'expression de l'effort presseur  $F$  en fonction de  $R_A$ ,  $C_m$ ,  $P_B$ ,  $\varphi$  et  $\theta$ .

Document réponse



## 9.2.6 Pince de robot :

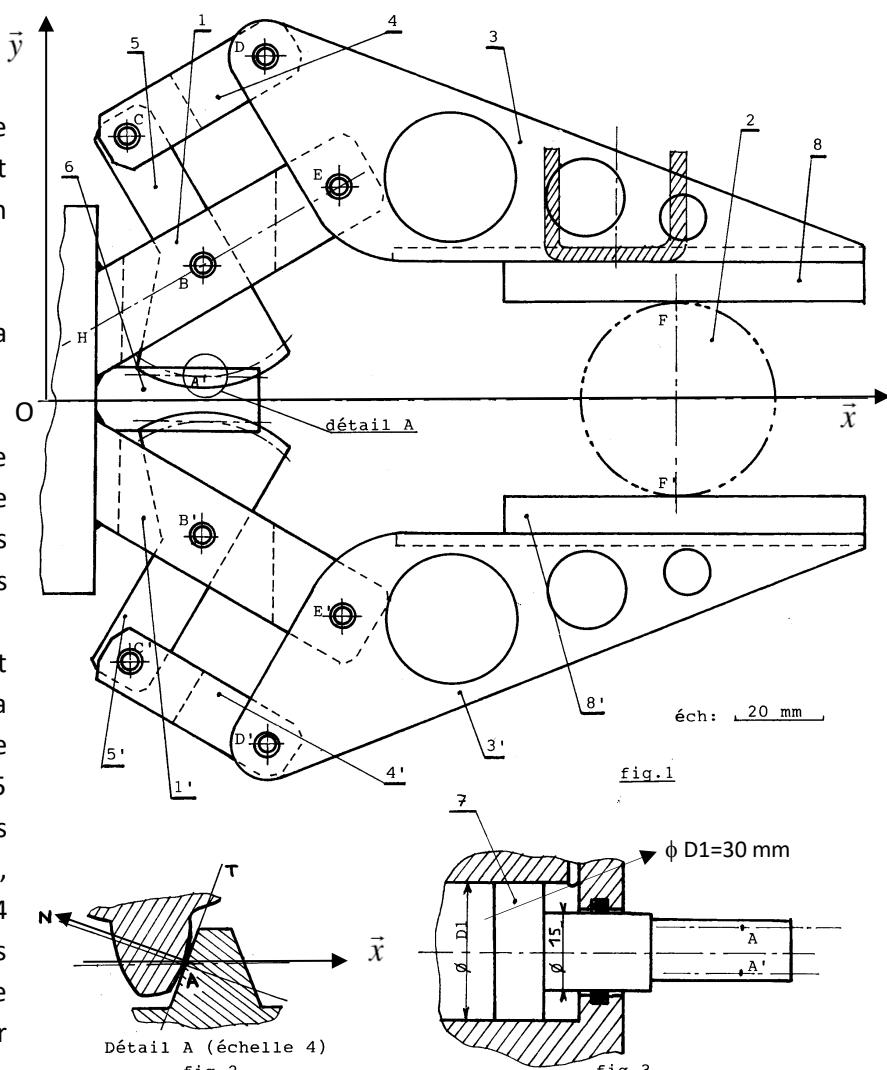
### I Présentation :

On se propose d'étudier la pince de préhension d'un robot manipulateur utilisé dans un centre de montage automatisé.

La figure ci-contre représente la pince de préhension.

La pince est à commande hydraulique. Elle permet de manipuler aussi bien des pièces cylindriques que prismatiques grâce à des mâchoires 3 et 3'.

Le piston 7 d'un vérin double effet provoque la translation de la crémaillère 6. Cette crémaillère actionne les secteurs dentés de 5 et 5' qui, en pivotant autour des axes B et B' de  $\varnothing 6$  mm, provoquent grâce aux biellettes 4 et 4' le déplacement des mâchoires 3 et 3'. La fermeture des mâchoires provoquée par l'action de l'huile sur le piston, assure le serrage de la pièce 2.



L'objectif de notre étude est de déterminer l'action de l'huile sur le piston 7 afin de déterminer la pression à injecter dans le vérin pour obtenir l'effort de serrage souhaité.

### Hypothèses :

- La pince est dans la phase de préhension.
- On néglige les frottements dans les articulations B, C, D, E.
- Le contact avec la pièce à serrer se fait sans adhérence.
- Les poids des pièces constituant la pince ainsi que celui de la pièce à manipuler seront négligés devant les efforts en jeu.

- L'effort de serrage est fixé à  $\|\vec{F}_{8 \rightarrow 2}\| = \|\vec{F}'_{8' \rightarrow 2}\| = 150 \text{ N}$ , il est modélisé :

en  $F$  par le torseur :

$$F \{T_{8 \rightarrow 2}\} = F \begin{Bmatrix} \vec{F}_{8 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{F \cdot 8 \rightarrow 2} \end{Bmatrix} = F \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -150 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

en  $F'$  par le torseur :

$$F' \{T_{8' \rightarrow 2}\} = F' \begin{Bmatrix} \vec{F}'_{8' \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{F' \cdot 8' \rightarrow 2} \end{Bmatrix} = F' \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 150 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

- L'ensemble est ramené à un problème plan (plan de projection :  $(O; \vec{x}, \vec{y})$  et du fait de la symétrie qui subsiste (d'axe  $(O; \vec{x})$ ), **on n'étudiera que la moitié supérieure de cette pince.**
- Les mors 8 et 8' sont collés respectivement sur 3 et 3' (même classe d'équivalence).
- Le contact en A entre 6 et 5 est un contact de type engrenage. On le modélise donc par une liaison ponctuelle de normale  $(A, \vec{N})$  comme montré sur la figure 2, avec  $\vec{N}$  incliné à  $20^\circ$  par rapport à l'horizontale.
- L'action de l'huile sur le piston 6 est modélisée en O par :

$$O \{T_{huile \rightarrow 6}\} = O \begin{Bmatrix} \vec{O}_{huile \rightarrow 6} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = O \begin{Bmatrix} X_{huile \rightarrow 6} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

## II Travail demandé :

**Q1.** Réaliser le schéma d'analyse de la moitié supérieure de la pince.

**Q2.** Etudier l'équilibre de la biellette 4.

**Q3.** Etudier l'équilibre de l'ensemble {8+3} et déterminer l'action mécanique de 4  $\rightarrow$  3. En déduire la direction, le sens et la norme du vecteur  $\vec{C}_{4 \rightarrow 5}$ .

**Q4.** Etudier de l'équilibre de 5, en déduire la norme de  $\vec{A}_{6 \rightarrow 5}$

**Q5.** Pour la suite on donne  $|X_{huile \rightarrow 6}| = 2 \cdot \|\vec{A}_{5 \rightarrow 6}\| \cdot \cos(20^\circ)$ .

**Q5.1.** Justifier cette relation et calculer  $|X_{huile \rightarrow 6}|$ .

**Q5.2.** Grâce à la figure 3 déterminer la pression nécessaire à l'obtention de l'effort de serrage défini dans les hypothèses.

Echelle des forces 1mm → 5N

