9.2 – Modélisation globale des Actions Mécaniques

B- Modélisation globale des Actions mécaniques

I Représentation par un torseur :

Définition :

Les actions mécaniques qu'exerce un système matériel 1 sur un système matériel 2 sont représentées localement par un champ de glisseurs, $(P, \vec{f}_P(1 \to 2))$, défini relativement à une mesure μ, mais on peut aussi leur associer, en un point A quelconque, un torseur dont la forme est la suivante :

$$_A\{T(1 \to 2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \to 2) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \end{Bmatrix}$$

Avec :

$$\vec{R}(1 \to 2) = \int_{P \in 2} d\vec{F}_P(1 \to 2) = \int_{P \in 2} \vec{f}_P(1 \to 2)\, d\mu$$

$$\vec{M}_A(1 \to 2) = \int_{P \in 2} A\vec{P} \wedge d\vec{F}_P(1 \to 2) = \int_{P \in 2} A\vec{P} \wedge \vec{f}_P(1 \to 2)\ d\mu$$

Ce torseur appelé torseur statique ou torseur d'action mécanique de 1 sur 2, au point A caractérise globalement l'action mécanique de 1 sur 2.

Exemple : Action mécanique de pesanteur :

Le torseur statique représentant l'action de la pesanteur sur l'ensemble matériel 1 (de masse m_1) s'écrit en un point A quelconque :

$$_A\{T(pes \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(pes \to 1) \\ \vec{M}_A(pes \to 1) \end{Bmatrix}$$

Avec :

$$\vec{R}(pes \to 1) = \int_{P \in 1} \vec{g}\ \mathrm{dm}_1 = m_1 \cdot \vec{g}$$

$$\vec{M}_A(pes \to 1) = \int_{P \in 1} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{g} dm_1 = \left(\int_{P \in 1} \overrightarrow{AP}\ dm_1\right) \wedge \vec{g} = m_1 \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \vec{g} = \overrightarrow{AG} \wedge m_1 \cdot \vec{g}$$

La résultante $m_1 \cdot \vec{g}$ du torseur d'action mécanique de la pesanteur représente le poids de l'ensemble matériel 1.

Cas où le torseur représentant l'action de pesanteur sur le système 1 est défini au point particulier G, centre d'inertie du système matériel 1 :

$$\vec{M}_G(pes \rightarrow 1) = \int_{P\in 1} \overrightarrow{GP} \wedge \vec{g}dm_1 = \left(\int_{P\in 1} \overrightarrow{GP}\ dm_1\right) \wedge \vec{g}$$

Or $\int_{P\in 1} \overrightarrow{GP}\ dm_1 = \vec{0}$ (propriété du centre d'inertie) alors $\vec{M}_G(pes \rightarrow 1) = \vec{0}$ par conséquent le torseur d'action mécanique de la pesanteur sur 1 s'écrit : $\;_G\{T(pes \rightarrow 1)\} = \;_G\begin{Bmatrix} m_1\,\vec{g} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

II Actions mécaniques transmissibles par les liaisons normalisées parfaites[1] :

1) Présentation :

Pour chaque liaison normalisée définie en cinématique nous allons déterminer les caractéristiques du torseur d'action mécanique susceptible d'être transmis.

Définition :

Le torseur d'action mécanique transmissible du solide 1 au solide 2 s'écrit au point A, origine du repère local $(A\,;\vec{x}\,,\vec{y},\vec{z})$ associé à la liaison :

$$\;_A\{T(1 \rightarrow 2)\} = \;_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) \end{Bmatrix}$$

Posons dans la base du repère local :

$$\vec{R}(1 \rightarrow 2) = X_{1\rightarrow 2}\cdot\vec{x} + Y_{1\rightarrow 2}\cdot\vec{y} + Z_{1\rightarrow 2}\cdot\vec{z}$$
$$\vec{M}_A(1 \rightarrow 2) = L_{1\rightarrow 2}\cdot\vec{x} + M_{1\rightarrow 2}\cdot\vec{y} + N_{1\rightarrow 2}\cdot\vec{z}$$

Et écrivons le torseur d'action mécanique avec ses composantes de la façon suivante :

$$\;_A\{T(1 \rightarrow 2)\} = \;_A\begin{Bmatrix} X_{1\rightarrow 2} & L_{1\rightarrow 2} \\ Y_{1\rightarrow 2} & M_{1\rightarrow 2} \\ Z_{1\rightarrow 2} & N_{1\rightarrow 2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

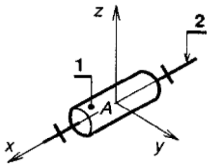
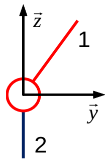
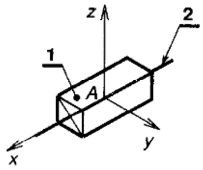
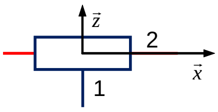
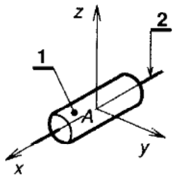
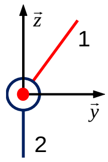
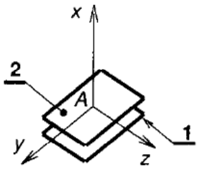
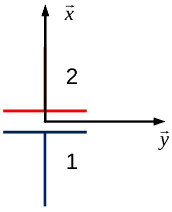
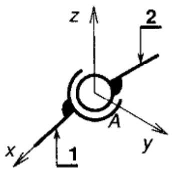
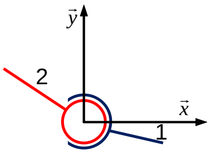
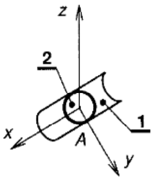
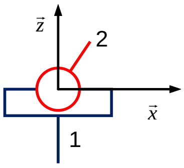
Remarque : La caractéristique mécanique d'une liaison parfaite se traduit de la manière suivante :

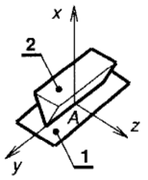
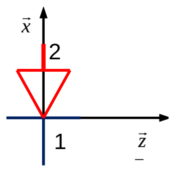
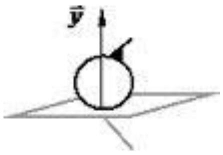
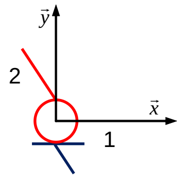
$$\forall Q\ \;_Q\{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes \;_Q\{V(2/1)\} = 0 :$$

Le comoment des torseurs statique et cinématique est nul.

[1]Parfaite signifie : liaison sans jeu sans frottement et à géométrie parfaite

2) **Tableau récapitulatif :**

Type de liaison et repère local associé $R=(A\,;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$	Schématisation spatiale	Mobilités	Torseur d'action mécanique transmissible	Torseur d'action mécanique Simplifié	Schématisation plane
Pivot d'axe $(A,\vec{x})$		— Rx — — — —	${}_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},..,..)}$ Modèle valable $\forall A \in (A\,;\vec{x})$	Symétrie par rapport à $(A\,;\vec{y},\vec{z})$ ${}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},..,..)}$	
Glissière de direction $\vec{x}$		Tx — — — — —	${}_A\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},..,..)}$ Modèle valable $\forall A$	Symétrie par rapport à $(A\,;\vec{x},\vec{z})$ ${}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},..,..)}$	
Pivot glissant d'axe $(A,\vec{x})$		Tx Rx — — — —	${}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},..,..)}$ Modèle valable $\forall A \in (A\,;\vec{x})$	Symétrie par rapport à $(A\,;\vec{y},\vec{z})$ ${}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},..,..)}$	
Appui plan de normale $(A,\vec{x})$		— Rx Ty — Tz —	${}_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & M \\ 0 & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},..,..)}$ Modèle valable $\forall A$	Symétrie par rapport à $(A\,;\vec{x},\vec{y})$ ${}_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},..,..)}$	
Rotule de centre A		— Rx — Ry — Rz	${}_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(..,..,..)}$ Modèle valable uniquement au centre A dans n'importe qu'elle base	Symétrie par rapport à $(A\,;\vec{x},\vec{y})$ ${}_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(..,..,..)}$	
Linéaire annulaire de centre A et d'axe $(A,\vec{x})$		Tx Rx — Ry — Rz	${}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},..,..)}$ Modèle valable $\forall A \in (A\,;\vec{x})$	Symétrie par rapport à $(A\,;\vec{x},\vec{z})$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},..,..)}$	
Type de liaison et repère local associé $R=(A\,;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$	Schématisation spatiale	Mobilités	Torseur d'action mécanique transmissible	Torseur d'action mécanique Simplifié	Schématisation plane

Linéaire rectiligne de normale $(A,\vec{x})$ d'axe $(A,\vec{y})$		$-$ Rx Ty Ry Tz $-$	$_{A}\begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ Modèle valable $\forall A \in (A;\vec{y})$	Symétrie par rapport à $(A,\vec{x},\vec{z})$ $_{A}\begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	
Ponctuelle de normale $(A,\vec{y})$		Tx Rx – Ry Tz Rz	$_{A}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(..,\vec{y},..)}$ Modèle valable $\forall A \in (A;\vec{y})$	Symétrie par rapport à $(A,\vec{x},\vec{y})$ $_{A}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(..,\vec{y},..)}$	

III Principe fondamental de la statique :

1) Isolement d'un système matériel :

Pour conduire l'analyse d'un système matériel, on est amené souvent à le fractionner en sous-systèmes, qu'il faut séparer de leur environnement. Cette opération est désignée sous le vocable « d'isolement ».

1.1) Définition :

Un système isolé est tout ou partie d'un système matériel que l'on rend distinct de son environnement. Ce peut-être par exemple une certaine quantité de fluide, une partie de pièce, une pièce ou un ensemble de pièces appartenant à un mécanisme.

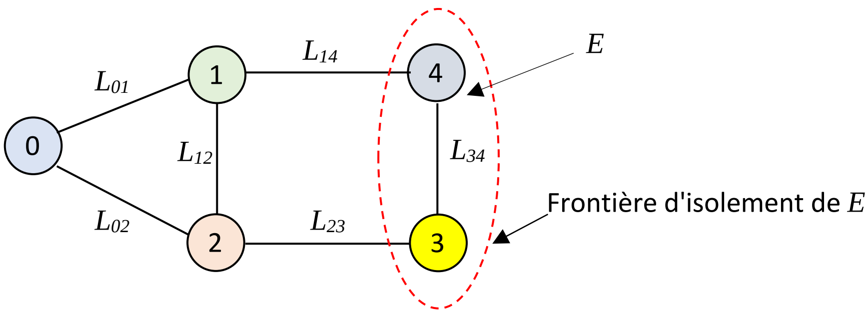
L'isolement consiste à couper l'espace en deux parties disjointes de façon à séparer le système étudié E de son environnement $\overline{E}$ puis à remplacer cet environnement par des actions mécaniques que l'on appelle actions mécaniques extérieures

1.2) Frontière d'isolement :

La frontière d'isolement d'un système matériel E est la surface fermée qui sépare E de l'extérieur $\overline{E}$.

Exemple :

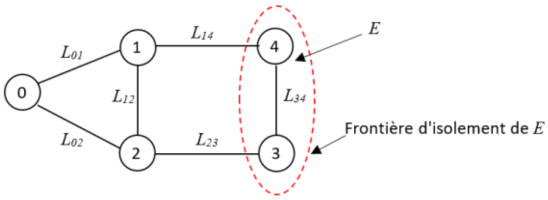
Supposons que la figure ci-contre représente le graphe des liaisons d'un mécanisme. Si on considère que le système matériel E est constitué des solides 3 et 4, la frontière d'isolement sépare $E = \{3,4\}$ de l'extérieur $\overline{E} = \{0,1,2\}$



1.3) Actions mécaniques extérieures et intérieures :

- Une action mécanique extérieure au système matériel E est une action mécanique provenant de $\overline{E}$ et agissant sur E.
- Une action mécanique intérieure au système matériel E est une action mécanique s'exerçant mutuellement entre deux éléments de E.

Dans l'exemple précédent :



Les actions mécaniques extérieures à E sont :	Les actions mécaniques intérieures sont :
• L'action mécanique de contact de $1 \to 4$ (lire 1 sur 4) • L'action mécanique de contact de $2 \to 3$ • L'action mécanique à distance de *pesanteur* $\to E$	• L'action mécanique de contact de $3 \to 4$ • L'action mécanique de contact de $4 \to 3$

2) Enoncé du principe fondamental de la statique :

2.1) Définition de l'équilibre : Equilibre d'un solide, d'un ensemble de solides :

$$E \text{ est en équilibre} \Leftrightarrow \forall M \in \mathrm{E},\ \vec{V}_{M\in E/Ro} = \vec{0}$$

Un système matériel E est en équilibre par rapport à un repère R_0, si à instant donné tous ses éléments sont immobiles par rapport à R_0. Ceci s'explique par le fait que la vitesse d'un point M quelconque du système E est nulle par rapport au repère R_0 :

2.2) Conséquence : Pour qu'un système matériel E soit en équilibre par rapport à un repère galiléen[2], il faut que le torseur représentatif de toutes les actions mécaniques extérieures à E appliqué à E soit égal au torseur nul.

$$\left\{T(\bar{E} \to E)\right\}_Q = \left\{\vec{0}\right\} \quad \forall Q$$

Remarques :

- Pour la plupart des mécanismes étudiés en laboratoire, un repère lié à la terre constitue une bonne approximation d'un repère galiléen.
- Il existe des systèmes matériels pour lesquels le torseur des actions mécaniques extérieures est nul, mais qui ne sont pas en équilibre.
- La condition nécessaire est suffisante pour qu'un système matériel soit en équilibre s'énonce de la manière suivante :
  - Le système doit être en équilibre au début de l'étude
  - Pour tout système matériel e de E : $\left\{T(\bar{e} \to e)\right\} = \left\{\vec{0}\right\}$

[2] Un repère galiléen est un repère au repos absolu.

2.3) Théorèmes généraux :

En écrivant qu'en tout point de l'espace, les éléments de réduction du torseur des actions mécaniques extérieures à E sont nuls, on obtient deux équations vectorielles appelées théorèmes généraux de la statique.

$$\text{Posons :}\quad \underset{A}{\{T(\bar{E} \rightarrow E)\}} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) \\ \vec{M}_A(\bar{E} \rightarrow E) \end{Bmatrix}}$$

- Théorème de la résultante statique :

  Pour un système matériel en équilibre par rapport à un repère galiléen, la résultante du torseur des actions mécaniques extérieures à E est nulle :

$$\vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{0}$$

- Théorème du moment statique :

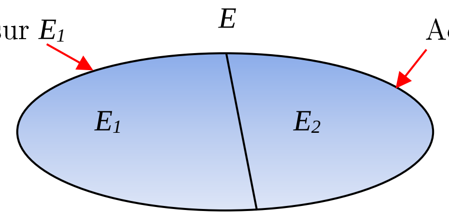
  Pour un système matériel en équilibre par rapport à un repère galiléen, le moment du torseur des actions mécaniques extérieures à E est nul.

$$\forall A \in Rg \quad \vec{\mathrm{M}}_A(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{0}$$

2.4) Théorème des actions mutuelles :

Action mécanique de $\overline{E}$ sur E_1

Action mécanique de $\overline{E}$ sur E_2



Soit une partition du système matériel E en sous-systèmes E_1 et E_2, appliquons le Principe Fondamental de la Statique successivement à E, E_1 et E_2 :

- Principe Fondamental de la Statique appliqué à E :

$$\underset{A}{\{T(\bar{E} \rightarrow E)\}} = \underset{A}{\{T(\bar{E} \rightarrow E_1)\}} + \underset{A}{\{T(\bar{E} \rightarrow E_2)\}} = \{\vec{0}\} \quad ①$$

- Principe Fondamental de la Statique appliqué à E_1 :

$$\underset{A}{\{T(\bar{E}_1 \rightarrow E_1)\}} = \underset{A}{\{T(\bar{E} \rightarrow E_1)\}} + \underset{A}{\{T(E_2 \rightarrow E_1)\}} = \{\vec{0}\} \quad ②$$

- Principe Fondamental de la Statique appliqué à E_2 :

$$\underset{A}{\{T(\bar{E}_2 \rightarrow E_2)\}} = \underset{A}{\{T(\bar{E} \rightarrow E_2)\}} + \underset{A}{\{T(E_1 \rightarrow E_2)\}} = \{\vec{0}\} \quad ③$$

En réalisant la combinaison ①-②-③ on obtient :

$$\underset{A}{}\{T(E_2 \rightarrow E_1)\} + \underset{A}{}\{T(E_1 \rightarrow E_2)\} = \{\vec{0}\}$$

Théorème : L'action mécanique d'un système matériel E_1 sur un système matériel E_2($E_1 \subset \bar{E}_2$) est opposée à l'action mécanique de E_2 sur E_1

$$\underset{A}{}\{T(E_2 \rightarrow E_1)\} = - \underset{A}{}\{T(E_1 \rightarrow E_2)\}$$

3) Applications :

3.1) Problèmes plans :

3.1.1) Définition d'un problème plan :

Lorsque la géométrie du système matériel étudié admet un plan de symétrie et que les résultantes des Actions Mécaniques agissant sur ce système matériel peuvent toutes se représenter dans ce plan, alors on parle de problème plan.

3.1.2) Propriétés :

L'hypothèse du problème plan permet de simplifier l'étude de l'équilibre du système matériel E choisi. En effet si, par exemple, le plan$(O\,;\vec{x}\,,\vec{y})$ du repère global $R(O\,;\vec{x}\,,\vec{y},\vec{z})$ est plan de symétrie pour les liaisons et les efforts, alors **le représentant type** des Actions Mécaniques est de la forme :

$$_Q\{T(i \rightarrow E)\} = {}_Q\begin{Bmatrix} \vec{R}i \rightarrow E \\ \vec{M}_Q i \rightarrow E \end{Bmatrix} = {}_Q\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \forall\, Q \in (O;\vec{x},\vec{y})$$

En conséquence la résolution des deux équations vectorielles issues de l'écriture du Principe Fondamental de la Statique (P.F.S.) appliqué à E :

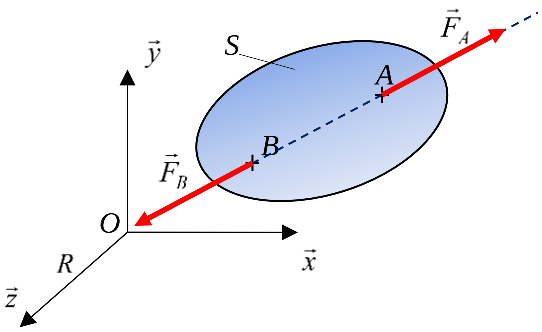
- $\sum \vec{R}_{\bar{E} \rightarrow E} = \vec{0}$①
- $\sum \vec{M}_{Q\ \bar{E} \rightarrow E} = \vec{0}$②

Ne fait plus apparaître que trois équations scalaires :

- Projection de ① sur l'axe $(O\,;\vec{x})$ (proj①/x)
- Projection de ① sur l'axe $(O\,;\vec{y})$ (proj①/y)
- Projection de ② sur l'axe $(O\,;\vec{z})$ (proj②/z)

3.2) Équilibre d'un solide soumis à l'action de deux forces :

Soit un solide S en équilibre par rapport à un repère galiléen $R(O\,;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ soumis à l'action de deux forces modélisées par les torseurs suivants :



- $\{T(ext \to S)\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{F}_A\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$
- $\{T\,'(ext \to S)\} = {}_B\begin{Bmatrix}\vec{F}_B\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$

L'équilibre de S se traduit par l'écriture du P.F.S. au point A :

$$\begin{cases}\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}\\ \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_B = \vec{0}\end{cases}$$

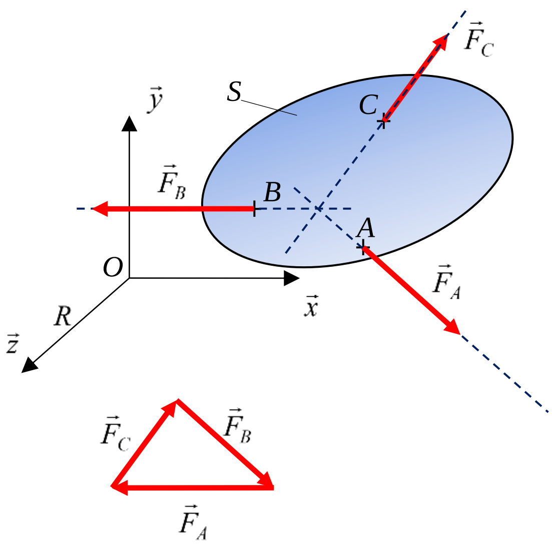
Pour que la seconde équation soit vérifiée, il faut que $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{F}_B$ soient colinéaires, c'est à dire que $\vec{F}_B$ passe par A. Son support est donc la droite *(AB)*. La première condition montre que $\vec{F}_A$ est également de support *(AB)* et opposée à $\vec{F}_B$.

Conclusion : (énoncé du principe fondamental de la statique dans ce cas particulier)

Si le solide S est en équilibre par rapport à R sous l'action de deux forces alors les résultantes $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ sont directement opposées (opposées sur le même support) et leur somme vectorielle et nulle.

3.3) Équilibre d'un solide soumis à l'action de trois forces :

Soit le solide S en équilibre par rapport à un repère galiléen $R(O\,;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ sous l'action de trois forces modélisées par les torseurs suivants :



- $\{T(ext \to S)\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{F}_A\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$
- $\{T'(ext \to S)\} = {}_B\begin{Bmatrix}\vec{F}_B\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$
- $\{T''(ext \to S)\} = {}_C\begin{Bmatrix}\vec{F}_C\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$

L'équilibre de S se traduit par l'écriture du PFS au point A :

$$\begin{cases}\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0}\\ \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_B + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F}_C = \vec{0}\end{cases}$$

Dans la seconde équation, le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_B$ est orthogonal au plan $(\overrightarrow{AB}\,,\vec{F}_B)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC} \wedge \vec{F}_C$ est orthogonal au plan$(\overrightarrow{AC}\,,\vec{F}_C)$. Leur somme étant nulle, ces deux vecteurs sont colinéaires et par conséquent $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_C$ sont dans le plan *(A, B, C)*. Le choix de B ou C pour exprimer l'équation de moment montrerait qu'il en est de même pour $\vec{F}_A$, les trois glisseurs sont par conséquent coplanaires.

Conclusion :(énoncé du principe fondamental de la statique dans ce cas particulier)

Si un solide S est en équilibre par rapport à R sous l'action de trois forces alors, les résultantes de trois torseurs représentants ces trois forces sont :

- **Coplanaires,**
- **Concourantes ou parallèles,**
- **De somme vectorielle nulle.**