5.1 Modélisation locale des Actions mécaniques

Sommaire

1) Système matériel :

1.1) Définitions :

- Système matériel : Un système matériel E est un système auquel on associe la mesure masse notée m.
- La masse d'un système matériel E s'exprime par un nombre positif ($m>0$)
- Si on effectue une partition de E en n éléments de masse m_i, alors : $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$
- Système matériel à masse conservative : Un système matériel E est à masse conservative, si toute partie e de E conserve une masse constante au cours du temps : $\forall e \subset E, \forall t : m(e) = Cte$

1.2) Centre d'inertie :

1.2.1) Définitions :

Le centre d'inertie du système matériel E de masse m, est le point G défini par :

$$\boxed{\vec{AG} = \frac{1}{m}\int_{P\in E} \vec{AP}\, dm}$$ Le point A étant quelconque

1.2.2) Propriétés :

- Le point G est unique
- Si le système matériel E est un solide indéformable, le centre d'inertie G est fixe par rapport à tout repère qui lui est attaché.
- Le point G est tel que : $\boxed{\int_{P\in E} \vec{GP}\, dm = \vec{0}}$
- Soit une partition de E (m,G) en n éléments $E_i(m_i, G_i)$. Alors :

$$\int_{P\in E} \vec{AP}\, dm = \sum_{i=1}^{n} \int_{P_i\in E_i} \vec{AP_i}\, dm_i$$

$$m\,\vec{AG} = \sum_{i=1}^{n} (m_i\, \vec{AG_i}) \quad avec : m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$\boxed{\vec{AG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} (m_i\, \vec{AG_i})}$$

Le point G est le barycentre des centres d'inertie G_i, chacun affecté de la masse m_i de l'élément E_i.

1.3) Extérieur d'un système matériel :

L'extérieur d'un système matériel E est le complémentaire de E par rapport à l'univers matériel. On le note $\overline{E}$.

2) Actions mécaniques :

2.1) Définition :

On appelle action mécanique toute cause susceptible de déformer ou de maintenir au repos un système matériel, de créer ou de modifier un mouvement.

2.2) Classification :

Les actions mécaniques sont de deux sortes :

- Actions mécaniques à distance, d'origine gravitationnelle ou électrique. Ces actions mécaniques, dites également volumiques, s'exercent en chaque point du système matériel.
- Actions mécaniques de contact (liaison entre deux solides). Ces actions mécaniques dites également surfaciques, s'exercent au niveau d'une surface du système matériel.

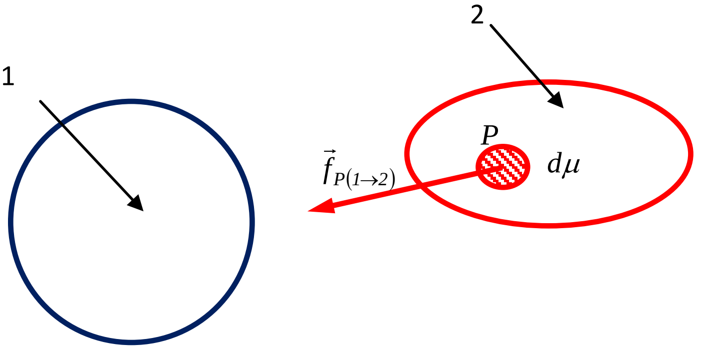
2.3) Modélisation des actions mécaniques :

La modélisation des actions mécaniques peut se faire d'un point de vue local ou d'un point de vue global suivant l'étude envisagée :

- Modélisation locale : Elle permet d'étudier l'action mécanique dans sa zone d'influence (champ de pressions de contact par ex)
- Modélisation globale : Elle permet de caractériser l'action mécanique dans un domaine élargi afin, par exemple, d'étudier l'équilibre du système matériel sur lequel elle s'exerce.

3) Modélisation locale des actions mécaniques :

3.1) Représentation par un champ de glisseurs :



Les actions mécaniques à distance ou de contact, qu'exerce un système matériel *1* sur un système matériel *2* sont représentées en tout point P de *2* par un champ de glisseurs $(P, \vec{f}_p(1 \to 2))$, défini relativement à une mesure $d\mu$ (qui est un élément dV pour une action volumique, dS pour une action surfacique)

<u>Définitions :</u>

- Une force est une action mécanique modélisable par un glisseur
- On appelle force élémentaire au point P, de l'action mécanique de 1 sur 2, le glisseur, dont le vecteur associé est :

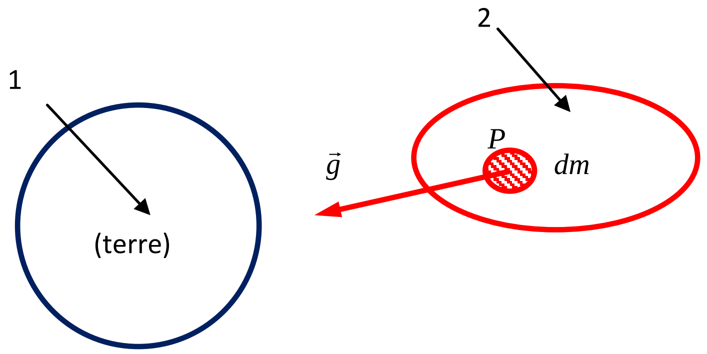
$$d\vec{F}_P(1 \to 2) = \vec{f}_P(1 \to 2)\, d\mu$$

$\vec{f}_P(1 \to 2)$ est la densité du champ de glisseurs, relativement à la mesure μ.

3.2) Exemples :

3.2.1) Action mécanique de pesanteur.

La force élémentaire au point P, de l'action mécanique exercée par la terre 1 sur le système matériel 2, représente le poids de l'élément de matière entourant le point P. Alors :



- si μ est la mesure de masse de 2, la densité massique $\vec{f}_P(1 \rightarrow 2)$ du champ de glisseurs représente $\vec{g}$ le vecteur accélération de la pesanteur.
  Le poids de l'élément de matière élémentaire entourant le point P a pour expression :
  $$d\vec{F}_P(1 \rightarrow 2) = \vec{g}\, dm$$
- si μ est la mesure de volume de 2, la densité volumique $\vec{f}_p(1 \rightarrow 2)$ du champ de glisseurs représente $\rho \cdot \vec{g}$, le poids volumique de 2 au point P
  (ρ désignant la masse volumique de 2 au point P).
  Le poids de l'élément de matière élémentaire entourant le point P a pour expression :
  $$d\vec{F}_P(1 \rightarrow 2) = \rho.\vec{g}\, dv$$

<u>Remarques :</u>

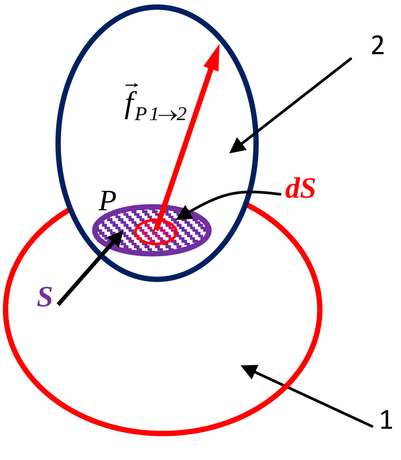
- Le champ de la pesanteur est considéré comme uniforme dans une région localisée de l'espace.
- Le vecteur accélération de la pesanteur est orienté suivant la verticale descendante. Ce vecteur n'est pas exactement dirigé vers le centre de la terre. Il résulte de la composition des forces de gravitation et des forces d'inertie d'entraînement dues à la rotation de la terre.

3.2.2) Action mécanique de contact :

Tout contact entre deux solides réels a toujours lieu suivant une surface (S), aussi petite soit elle. Dans ces conditions, $\vec{f}_P(1 \rightarrow 2)$ représente une densité surfacique de forces. La mesure µ est la mesure de surface.

La force élémentaire au point P, représentant l'action mécanique de 1 sur 2 à travers la surface élémentaire dS a pour expression :

$$d\vec{F}_P(1 \rightarrow 2) = \vec{f}_P(1 \rightarrow 2)\, dS$$

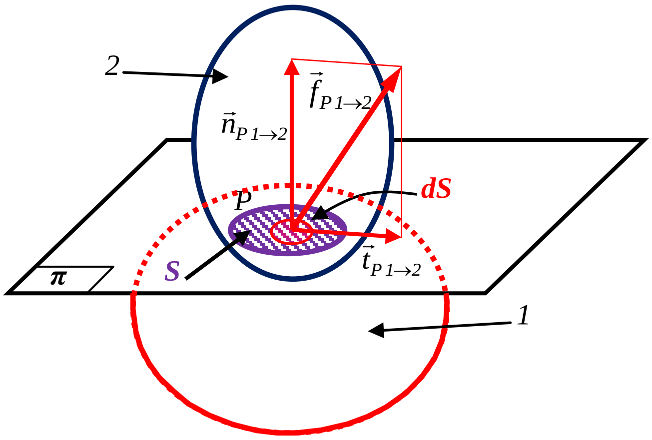


Remarque :

Lorsque deux solides sont en contact, il y a toujours une déformation, généralement très petite, dans la zone située au voisinage immédiat de la surface de contact. Pour justifier la loi de répartition des pressions, ainsi que la forme des surfaces de contact, il convient d'abandonner localement l'hypothèse d'indéformabilité des solides.

4) Les lois de Coulomb :

4.1) Présentation :



Soient deux solides 1 et 2 en contact suivant une surface (S). L'action mécanique exercée par 1 sur 2 est représentée en chaque point P de (S) par la densité surfacique de forces $\vec{f}_P(1\to 2)$.

On admet l'existence, en P, d'un plan tangent (π) commun aux deux solides 1 et 2. Posons :

$$\vec{f}_P(1\to 2)=\vec{n}_P(1\to 2)+\vec{t}_P(1\to 2)$$

Avec :

- $\vec{n}_P(1\to 2)$ perpendiculaire au plan (π)
- $\vec{t}_P(1\to 2)$ tangent au plan (π)

Définitions :

- $\vec{f}_P(1\to 2)$ est appelée densité surfacique de forces de contact, au point P, de l'action mécanique de 1 sur 2
- $\vec{n}_P(1\to 2)$ est appelée densité surfacique normale des forces de contact, ou pression de contact, au point P, de l'action mécanique de 1 sur 2
- $\vec{t}_P(1\to 2)$ est appelée densité surfacique tangentielle des forces de contact, au point P, de l'action mécanique de 1 sur 2.

Remarques :

- Une densité surfacique de forces s'exprime généralement en mégapascals $(1\ MPa = 1N/mm^2)$
- Lorsqu'il y a contact au point P, le vecteur $\vec{n}_P(1\to 2)$ est toujours orienté du solide 1 vers le solide 2

4.2) Définitions :

Afin d'énoncer les lois expérimentales de Coulomb sur le frottement et l'adhérence, utilisons $\vec{V}_{P\in 2/1}$ le vecteur de glissement, au point P, du mouvement du solide 2 par rapport au solide 1. Ce vecteur est situé dans le plan (π)

Enoncés :

- On dit qu'il y a **frottement** au point P entre les solides 1 et 2 si $\vec{V}_{P\in 2/1}\neq\vec{0}$ (1^{er} cas)
- On dit qu'il y a **adhérence** au point P entre les solides 1 et 2 si $\vec{V}_{P\in 2/1}=\vec{0}$ ($2^{ème}$ cas)

Les lois de Coulomb donnent des informations sur les densités surfaciques normales et tangentielles des forces de contact, lorsqu'il y a frottement ou adhérence au point P.

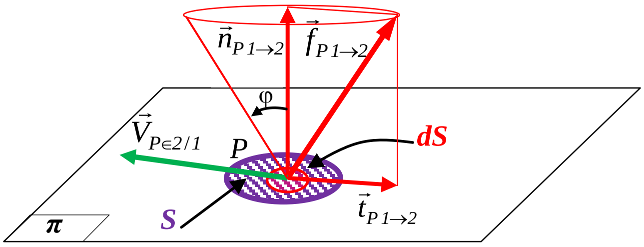
4.2.1) Premier cas : $\vec{V}_{P\in 2/1} \neq \vec{0}$ (glissement relatif au point P)

La densité surfacique de forces de contact, au point P, est telle que :

$$\vec{t}_P(1 \to 2) \wedge \vec{V}^P_{2/1} = \vec{0}$$

$$\vec{t}_P(1 \to 2) \cdot \vec{V}^P_{2/1} < 0$$

$$\|\vec{t}_P(1 \to 2)\| = f \cdot \|\vec{n}_P(1 \to 2)\|$$



- Les deux premières relations indiquent que la densité surfacique tangentielle des forces de contact, de l'action mécanique de 1 sur 2, est opposée au vecteur vitesse de glissement du point P, dans le mouvement de 2 par rapport à 1
- La troisième relation, où f est le coefficient de frottement des matériaux 1 et 2, montre que les normes des densités surfaciques normales et tangentielles sont proportionnelles.

<u>Interprétation géométrique :</u>

Si l'on considère l'angle φ, appelé angle de frottement, tel que $\tan\varphi = f$, alors la densité surfacique des forces de contact $\vec{f}_p(1 \to 2)$ <u>se situe sur le bord du cône</u> de révolution, appelé cône de frottement, de sommet P, d'axe perpendiculaire au plan (π) et de demi angle au sommet φ.

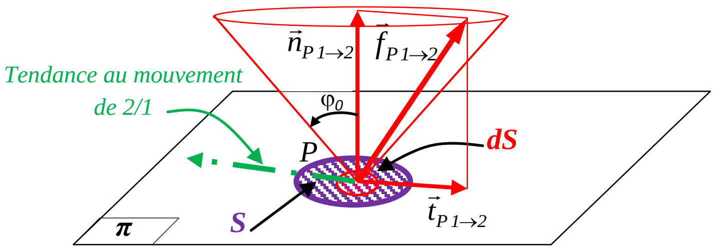
La position du vecteur $\vec{f}_p(1 \to 2)$ est fixée sur le cône de frottement, par l'orientation du vecteur vitesse de glissement $\vec{V}_{P\in 2/1}$

4.2.2) Deuxième cas : $\vec{V}_{P\in 2/1} = \vec{0}$ (aucun glissement relatif au point P)

La densité surfacique des forces de contact, au point P, est telle que :

$$\|\vec{t}_P(1 \to 2)\| \leq f_0 \cdot \|\vec{n}_P(1 \to 2)\|$$

où f_0 est le coefficient d'adhérence entre les matériaux 1 et 2.

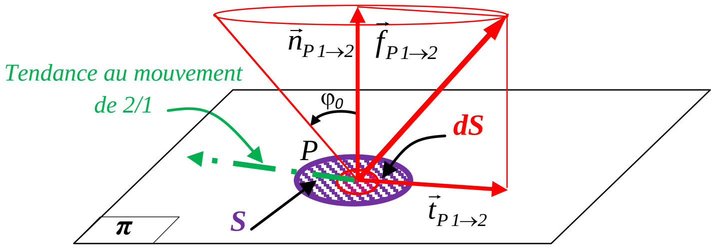


<u>Interprétation géométrique :</u>

Si on considère l'angle φ_0, appelé angle d'adhérence, tel que $f_0 = \tan\varphi_0$, alors la densité surfacique des forces de contact $\vec{f}_p(1 \to 2)$ <u>se</u>

situe à l'intérieur du cône de révolution, appelé cône d'adhérence, de sommet P, d'axe perpendiculaire au plan (π) et de demi angle au sommet φ_0.

4.2.3) Cas de l'équilibre strict : $\vec{V}_{P\in 2/1} = \vec{0}$



C'est le cas intermédiaire entre les deux premiers, le vecteur vitesse $\vec{V}_{2/1}^{P}$ est encore égal à 0, mais on se situe à la limite du glissement. Dans ce cas particulier la densité surfacique des forces de contact se situe sûr le cône de révolution, appelé cône d'adhérence,

$\|\vec{t}_P(1\to 2)\| = f_0 \cdot \|\vec{n}_P(1\to 2)\|$

4.2.4) Cas particulier : Contact sans adhérence et sans frottement ($f_0 = f = 0$).

Lorsque le coefficient de frottement ou d'adhérence est très faible, on est amené à le considérer comme nul. Par suite, la densité surfacique des forces de contact $\vec{f}_P(1\to 2)$ est perpendiculaire au plan tangent (π) au point P.

Cette hypothèse de contact sans frottement permet une étude simplifiée des actions mécaniques transmissibles par des liaisons entre solides.

4.3) Tableau des valeurs moyennes des coefficients f et f_0 :

Matériaux en contact	Frottement f	Adhérence f_0
Acier sur acier	de $0,1$ à $0,2$	de $0,15$ à $0,25$
Acier sur bronze	de $0,12$ à $0,2$	de $0,15$ à $0,2$
Acier sur matériau de friction (ferrodo)	de $0,2$ à $0,35$	de $0,3$ à $0,4$
Cuir sur métal	de $0,2$ à $0,3$	de $0,3$ à $0,4$
Pneu sur revêtement routier	de $0,3$ à $0,6$	de $0,6$ à $1,2$

Le coefficient d'adhérence est toujours supérieur au coefficient de frottement ($f_0 > f$). Mais étant donné le grand nombre de paramètres qui interviennent dans leur détermination, on considère souvent, par mesure de simplification, que ces deux coefficients sont égaux.