

Torseurs

dans l'espace

Transmissibles par
des liaisons parfaites

$${}_A\{T_{1\rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{1\rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A\ 1\rightarrow 2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Les inconnues statiques s'annulent là où il existe un degré de liberté :

$${}_A\{T_{1\rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{1\rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A\ 1\rightarrow 2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ Z_{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_{12} \\ M_{12} \\ N_{12} \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

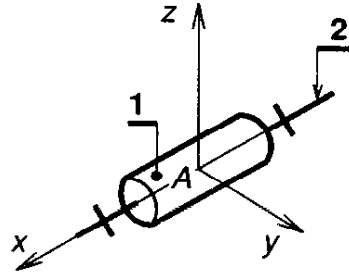
Si **Translations** suivant \vec{x} , \vec{y} ou \vec{z} cela impacte les composantes de la force

Si **Rotations** suivant \vec{x} , \vec{y} ou \vec{z} cela impacte les composantes du moment.

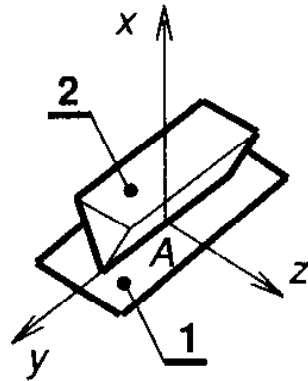
Torseurs

dans l'espace

Transmissibles par
des liaisons parfaites



$${}_A\{T_{1 \rightarrow 2}\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{A_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A \ 1 \rightarrow 2}} \end{array} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & \mathbf{0} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$



$${}_A\{T_{1 \rightarrow 2}\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{A_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A \ 1 \rightarrow 2}} \end{array} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_{12} \end{array} \right\} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

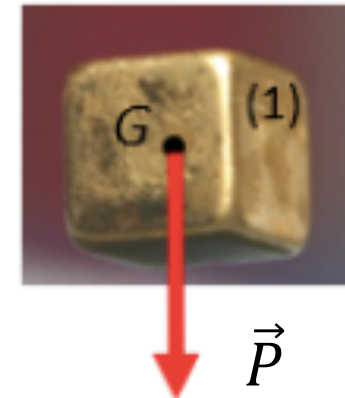
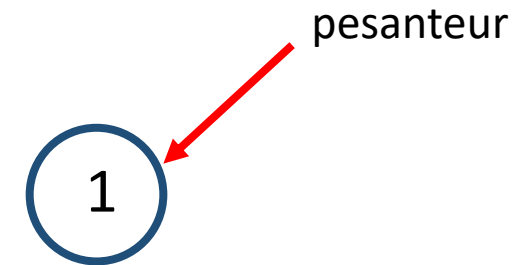
Torseurs

dans l'espace

Autres actions
mécaniques

Action mécanique de pesanteur

$${}_G\{T_{pes \rightarrow 1}\} = {}_G\left\{\begin{array}{l} \vec{P} = m \cdot \vec{g} \\ \vec{0} \end{array}\right\}$$



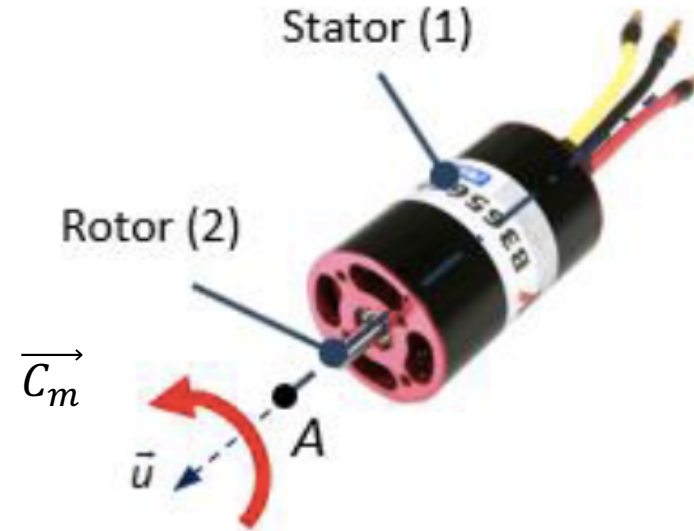
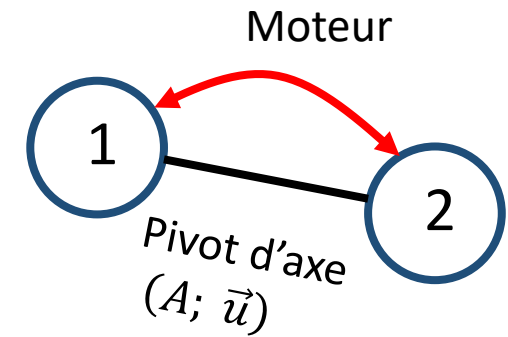
Torseurs

dans l'espace

Autres actions
mécaniques

Couple moteur

$$\{T_{1 \xrightarrow{\text{moteur}} 2}\}_A = \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{C}_m = C_m \cdot \vec{u} \end{cases}$$

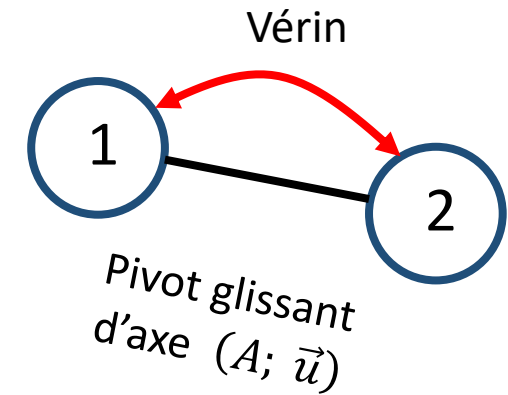
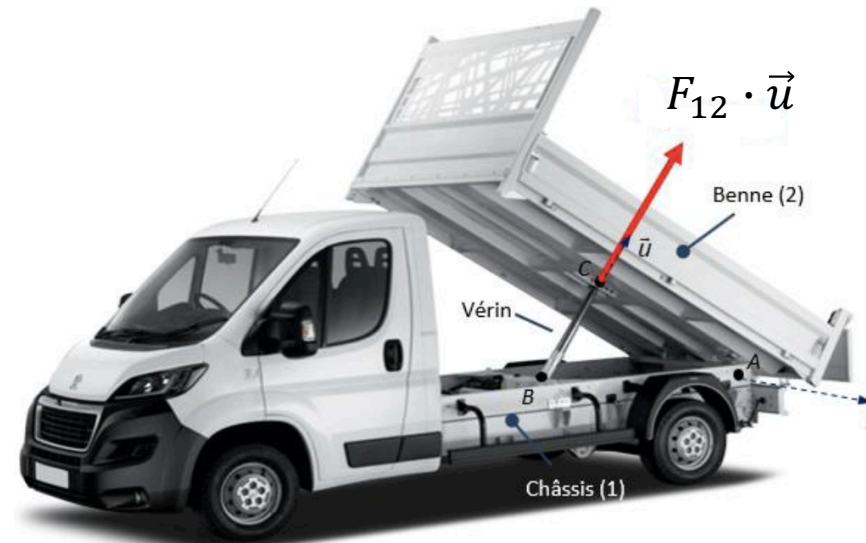


Torseurs

dans l'espace

Autres actions
mécaniques

Effort créé par un vérin

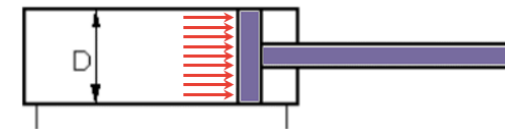


$$\left\{ T_{1 \xrightarrow{\text{vérin}} 2} \right\}_C = \forall C \in (C; \vec{u}) \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{12} = F_{12} \cdot \vec{u} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$F_{12} = p \cdot S$$

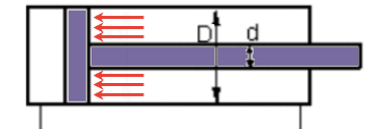
[Pa] [m²]

Pression théorique
dans le sens de sortie de tige



$$S = \pi \cdot \frac{D^2}{4}$$

Pression théorique
dans le sens de rentrée de tige



$$S = \pi \cdot \left(\frac{D^2 - d^2}{4} \right)$$

Torseurs

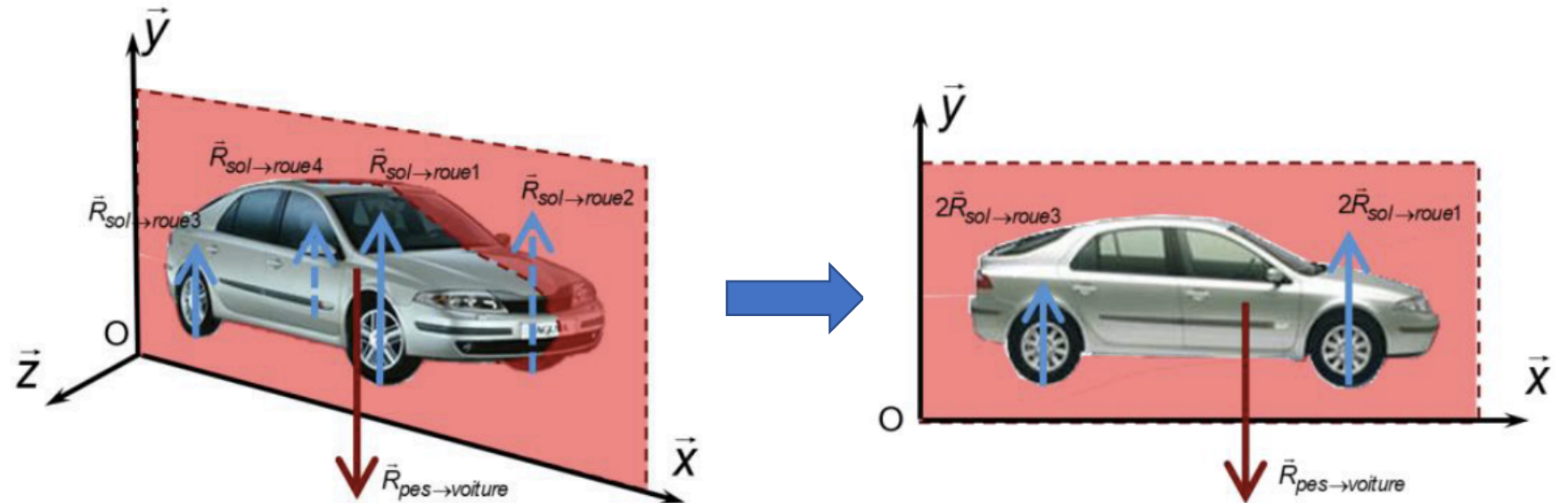
dans le plan

Définition:

On peut admettre que l'on est face à un problème dit **plan** si :

- la **géométrie des liaisons** du mécanisme présente un **plan de symétrie** ;
- les **actions mécaniques extérieures** exercées sur ce mécanisme sont **symétriques par rapport à ce plan**. C'est à dire que :
- les résultantes extérieures sont parallèles au plan de symétrie ;
- les moments extérieures sont perpendiculaires au plan de symétrie.

Exemple : hypothèse problème plan $(O; \vec{x}, \vec{y})$



Torseurs

dans le plan

Dans ce cas, les **composantes** qui correspondent à des **actions mécaniques susceptibles de faire sortir les solides du plan** sont **nulles**.

Problème en projection dans le plan $(O; \vec{x}, \vec{y})$:

$${}_A\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A \ 1 \rightarrow 2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{12} & \mathbf{0} \\ Y_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_{12} \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Problème en projection dans le plan $(O; \vec{x}, \vec{z})$:

$${}_A\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A \ 1 \rightarrow 2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_{12} \\ Z_{12} & \mathbf{0} \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

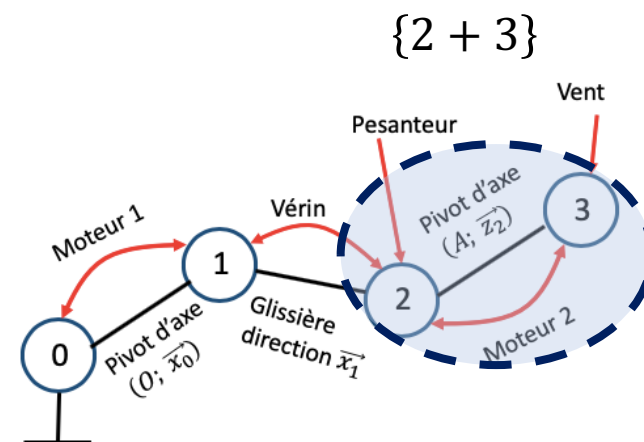
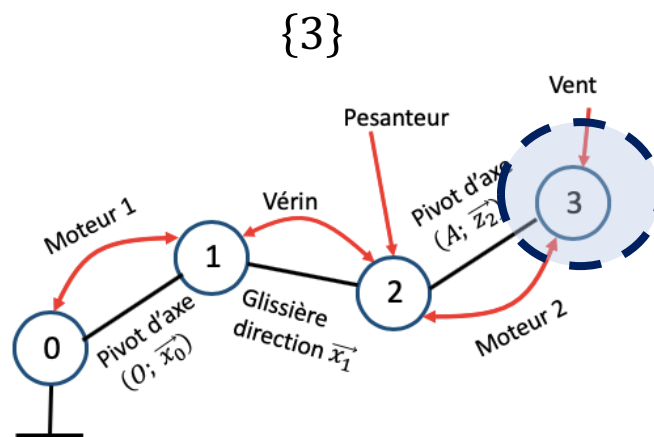
Problème en projection dans le plan $(O; \vec{y}, \vec{z})$:

$${}_A\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A \ 1 \rightarrow 2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & L_{12} \\ Y_{12} & \mathbf{0} \\ Z_{12} & \mathbf{0} \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Isolement

A.M. intérieures
et extérieures

Isolement



AM intérieures

$AM_{2 \rightarrow 3} ; AM_{2 \xrightarrow{\text{moteur 2}} 3}$

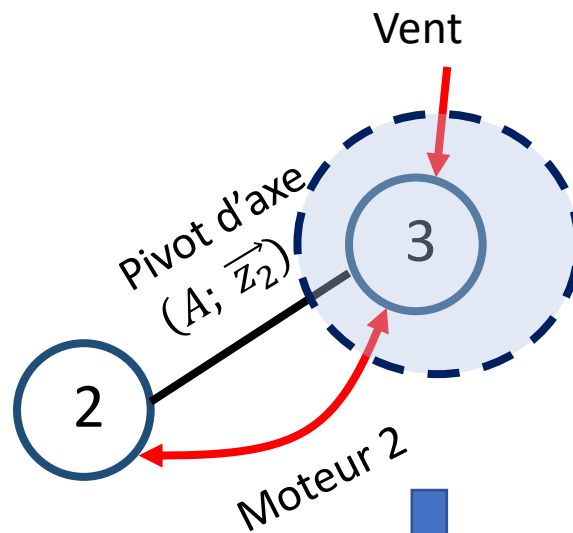
AM extérieures

$AM_{2 \rightarrow 3} ; AM_{vent \rightarrow 3} ; AM_{2 \xrightarrow{\text{moteur 2}} 3}$

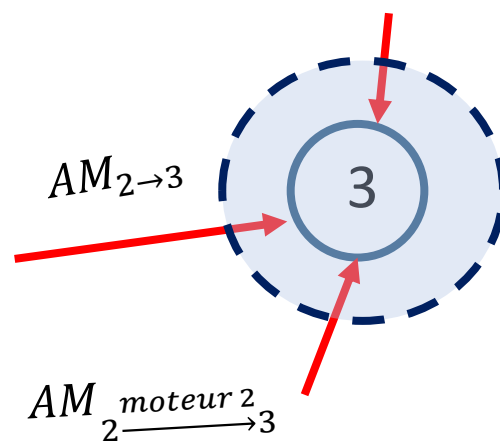
$AM_{1 \rightarrow 2} ; AM_{vent \rightarrow 3} ;$
 $AM_{1 \xrightarrow{\text{vérin}} 2} ; AM_{pes \rightarrow 2}$

$AM_{2 \rightarrow 3}$

Inventaire / Bilan



$AM_{vent \rightarrow 3}$



Inventaire

$$\{T_{vent \rightarrow 3}\} = {}_C \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{vent \rightarrow 3}} \\ \overrightarrow{M_{C vent \rightarrow 3}} \end{array} \right\} = {}_C \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ F_v & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$$

$$\{T_{2 \rightarrow 3}\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 3}} \\ \overrightarrow{M_{A 2 \rightarrow 3}} \end{array} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{cc} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & 0 \end{array} \right\} (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$$

$$\{T_{2 \xrightarrow{\text{moteur 2}} 3}\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{C_{m2}} \end{array} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{m2} \end{array} \right\} (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$$

P.F.S.

Enoncé du P.F.S

Changement de point d'un moment
d'un torseur :

$$\overrightarrow{M_B \bar{S} \rightarrow S} = \overrightarrow{M_A \bar{S} \rightarrow S} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{\bar{S} \rightarrow S}}$$

$${}_Q\{T_{\bar{S} \rightarrow S}\} = \vec{0}$$

$${}_Q\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\bar{S} \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_Q \bar{S} \rightarrow S} \end{array}\right\} = \vec{0}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\bar{S} \rightarrow S}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_Q \bar{S} \rightarrow S} = \vec{0} \end{array}\right.$$

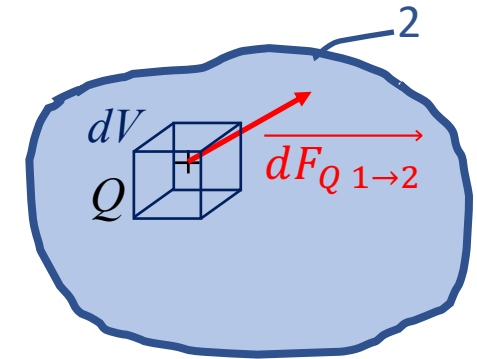
Théorème de la résultante

Théorème du moment

A.M. à distance

Modélisation locale :

On modélise en Q l'A.M. à distance par une force élémentaire agissant sur un volume de dimensions réduites défini au voisinage de Q définie par : $\overrightarrow{dF_{Q\ 1\rightarrow 2}}$



Modélisation globale :

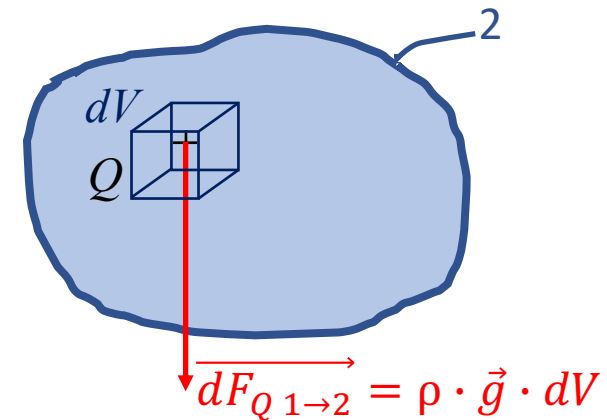
Le modèle global d'une action mécanique est l'action équivalente à l'ensemble des actions locales.

$$\{T_{1\rightarrow 2}\} =_A \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{1\rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A\ 1\rightarrow 2}} \end{array} \right\} =_A \left\{ \begin{array}{c} \int_V \overrightarrow{dF_{Q\ 1\rightarrow 2}} \\ \int_V \overrightarrow{AQ} \wedge \overrightarrow{dF_{Q\ 1\rightarrow 2}} \end{array} \right\}$$

Exemple : A.M. de pesanteur:

$$\{T_{pes\rightarrow 2}\} =_G \left\{ \begin{array}{c} \vec{P} \\ \vec{0} \end{array} \right\} =_G \left\{ \begin{array}{c} \int_V \rho \cdot \vec{g} dV = m \cdot \vec{g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho : \text{masse volumique } [kg.m^{-3}] \\ \vec{g} : \text{champ gravitationnel } [m.s^{-2}] \end{array} \right.$$

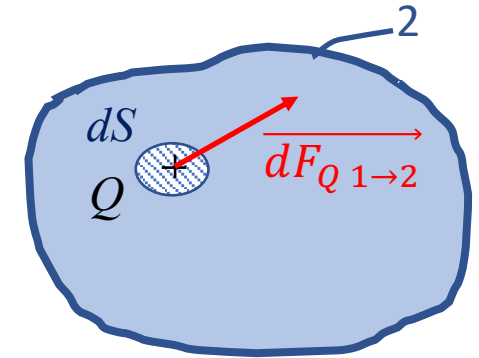


A.M. de contact

Contact surfacique

Modélisation locale :

On modélise en Q l'A.M. de contact par une force élémentaire agissant sur une surface de dimensions réduites définie au voisinage de Q
définie par : $\overrightarrow{dF_{Q\ 1\rightarrow 2}}$



Modélisation globale :

Le modèle global d'une action mécanique est l'action équivalente à l'ensemble des actions locales.

$$\{T_{1\rightarrow 2}\} = A \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R_{1\rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A\ 1\rightarrow 2}} \end{matrix} \right\} = A \left\{ \begin{matrix} \int_S \overrightarrow{dF_{Q\ 1\rightarrow 2}} \\ \int_S \overrightarrow{AQ} \wedge \overrightarrow{dF_{Q\ 1\rightarrow 2}} \end{matrix} \right\} = A \left\{ \begin{matrix} \int_S \overrightarrow{p_{Q\ 1\rightarrow 2}} \cdot dS \\ \int_S \overrightarrow{AQ} \wedge \overrightarrow{p_{Q\ 1\rightarrow 2}} \cdot dS \end{matrix} \right\}$$

$p_{Q\ 1\rightarrow 2}$: densité surfacique du champ de forces [$N.m^{-2} = Pa$]

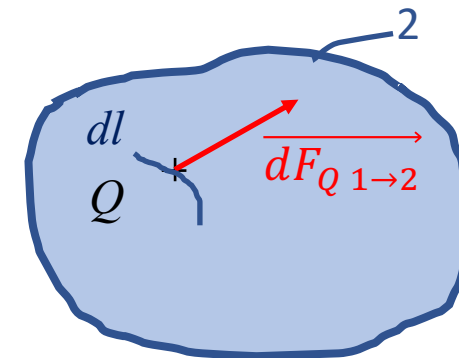
A.M. de contact

Contact linéique

Modélisation locale :

On modélise en Q l'A.M. de contact par une force élémentaire agissant sur une ligne de dimensions réduites définie au voisinage de Q définie par :

$$\overrightarrow{dF_{Q \ 1 \rightarrow 2}}$$



Modélisation globale :

Le modèle global d'une action mécanique est l'action équivalente à l'ensemble des actions locales.

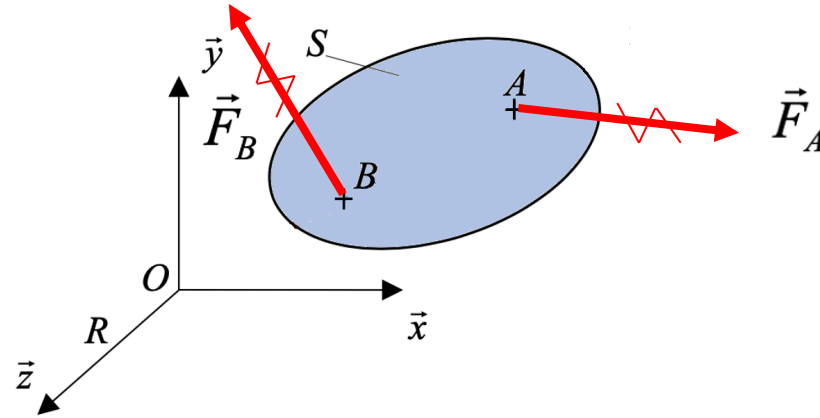
$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = A \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A \ 1 \rightarrow 2}} \end{matrix} \right\} = A \left\{ \begin{matrix} \int_L \overrightarrow{dF_{Q \ 1 \rightarrow 2}} \\ \int_L \overrightarrow{AQ} \wedge \overrightarrow{dF_{Q \ 1 \rightarrow 2}} \end{matrix} \right\} = A \left\{ \begin{matrix} \int_L \overrightarrow{\lambda_{Q \ 1 \rightarrow 2}} \cdot d\vec{l} \\ \int_L \overrightarrow{AQ} \wedge \overrightarrow{\lambda_{Q \ 1 \rightarrow 2}} \cdot d\vec{l} \end{matrix} \right\}$$

$\lambda_{Q \ 1 \rightarrow 2}$: densité linéique du champ de forces $[N.m^{-1}]$

Statique graphique

Système soumis à 2 forces

1

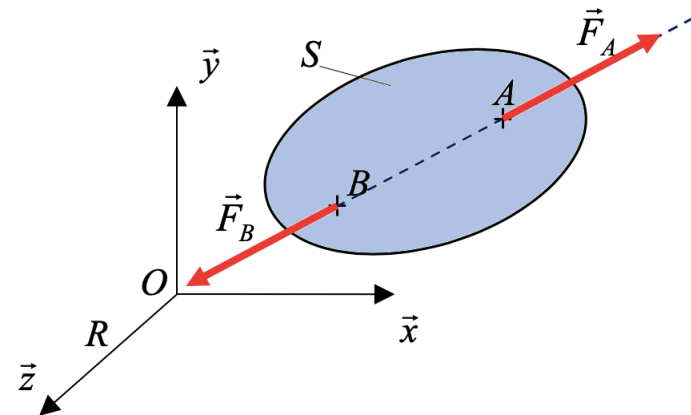


Enoncé du PFS :

2

Si le solide S est en équilibre par rapport à R sous l'action de deux forces alors **les résultantes** et **sont directement opposées** (opposées sur le même support) et leur somme vectorielle est nulle.

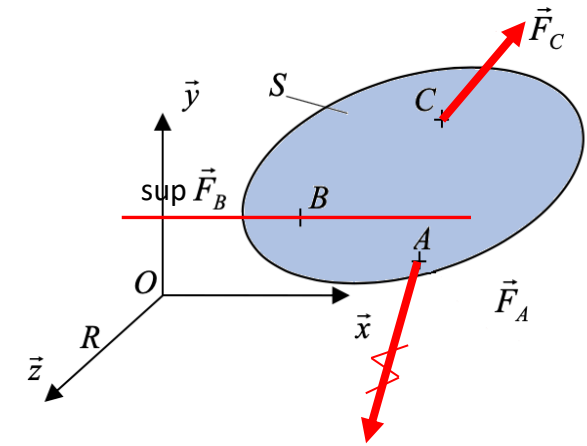
3



Statique graphique

Système soumis à 3 forces

1



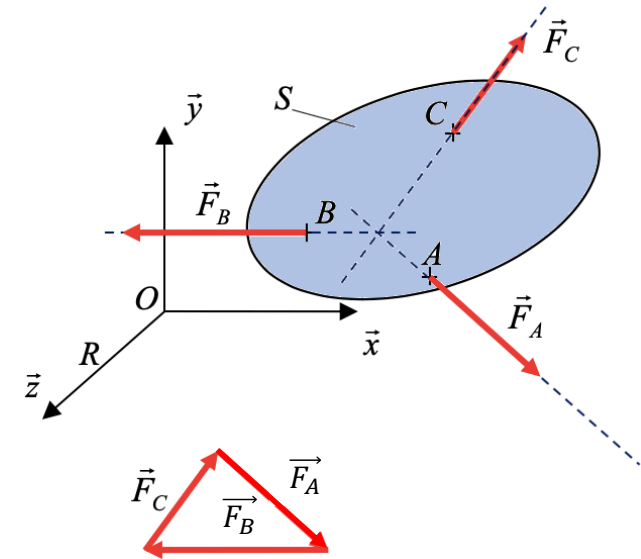
Enoncé du PFS :

2

Si un solide S est en équilibre par rapport à R sous l'action de trois forces alors, les résultantes de trois torseurs représentant ces trois forces sont :

- concourantes ou parallèles,
- de somme vectorielle nulle.

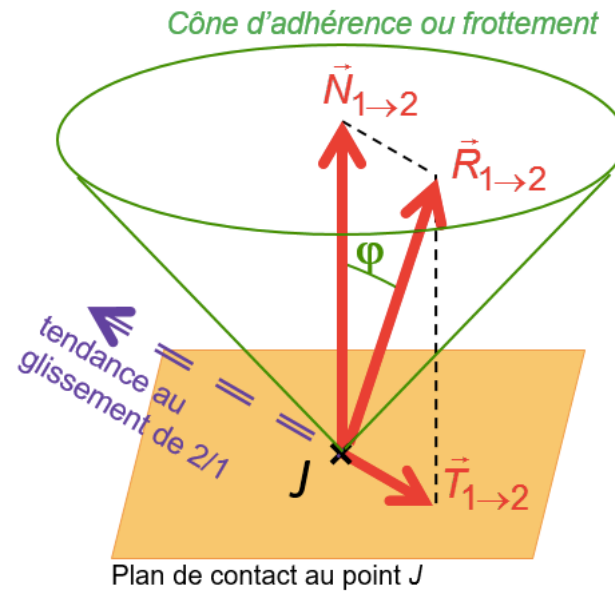
3



Modèle de Coulomb

Adhérence

Coefficient d'adhérence :
 $\mu_0 = \tan(\varphi_{lim})$



φ_{lim} : angle d'adhérence
Angle d'inclinaison de $\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$ par rapport à la normale au plan de contact au point J

$$\tan(\varphi_{lim}) \leq \frac{\|\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}\|}{\|\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}\|}$$

$$\|\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}\| \leq \mu_0 \cdot \|\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}\|$$

$\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}$ s'oppose à la tendance au glissement de **2/1**

$\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$ se situe à l'intérieur du cône d'adhérence

Cas de l'équilibre strict :

Le solide 2 est la limite du glissement par rapport à 2. dans ce cas on a :

$$\varphi = \varphi_{lim}$$

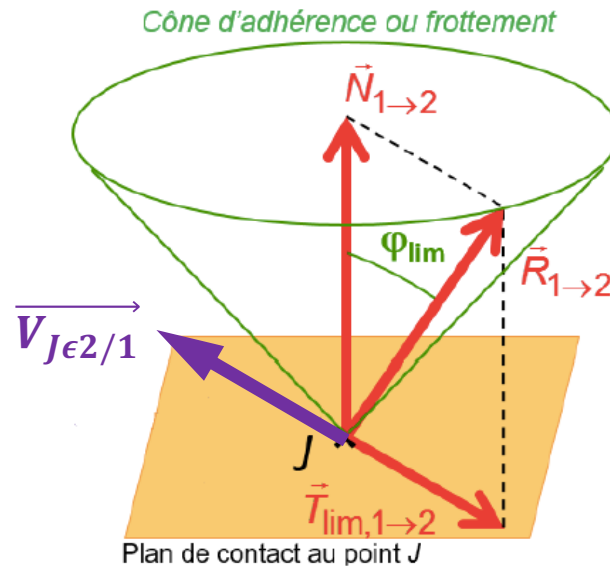
$\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$ se situe **sur le cône** d'adhérence et $\|\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}\| = \mu_0 \cdot \|\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}\|$

Modèle de Coulomb

Glissement

Coefficient de frottement :

$$\mu = \tan(\varphi_{lim})$$



φ_{lim} : angle de frottement

Angle d'inclinaison de $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ par rapport à la normale au plan de contact au point J

$$\tan(\varphi_{lim}) = \frac{\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\|}{\|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|}$$

$\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ s'oppose au vecteur vitesse de glissement : $\vec{V}_{J \in 2/1}$

$\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ se situe **sur le cône** de frottement

$$\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| = \mu \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$$

Modèle de Coulomb

Arc-boutement

Définition:

On appelle arc-boutement(3), un phénomène issu de l'adhérence pour lequel un équilibre subsiste indépendamment de l'intensité de l'effort qui tend à le rompre.

Exemple :

Sur ce meuble TV à étagère réglable en hauteur, c'est le phénomène d'arc-boutement qui solidarise l'étagère mobile à la colonne fixe. Plus le poids de ce qui est posé sur l'étagère est grand, plus l'adhérence entre la tablette et la colonne est garantie.

