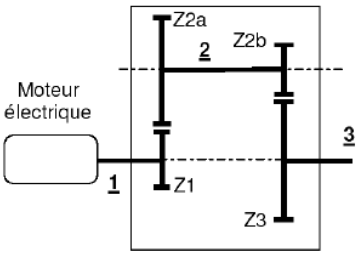
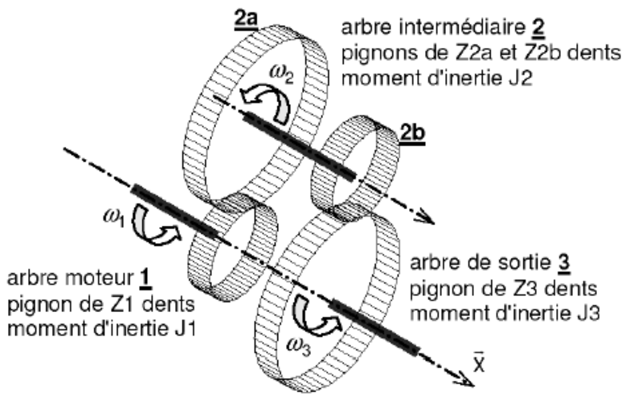
Énergie cinétique,
Inertie et masse équivalentes

Exercice 1 : Réducteur.

On considère un réducteur à engrenages à deux étages comportant un pignon d'entrée moteur 1, un arbre intermédiaire 2 avec deux pignons de $Z2a$ et $Z2b$ dents et un arbre de sortie 3 avec un de $Z3$ dents. Les différents arbres (1, 2, 3) sont en liaison pivot d'axe $\vec{x}$ par rapport au bâti 0 (non représenté sur la perspective). Les Figures ci-dessous illustrent schématiquement le dispositif.



Réducteur à engrenages à deux étages



On note :

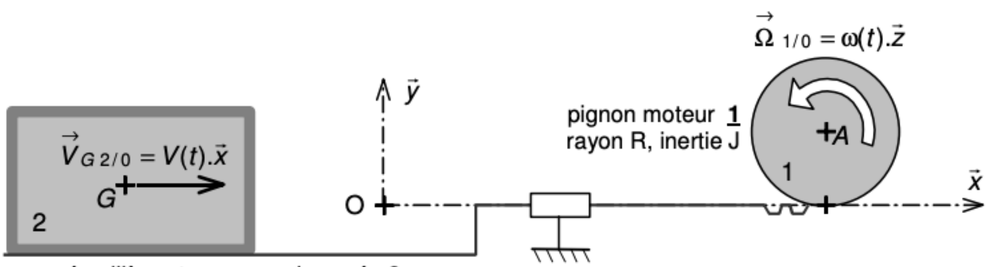
- $\Sigma = \{1,2,3\}$
- $\lambda = \frac{Z1}{Z2a}$:le rapport de réduction du 1er engrenage
- $\mu = \frac{Z2b}{Z3}$:le rapport de réduction du 2eme engrenage

Q1. Calculer l'énergie cinétique T_{Σ/R_0}

Q2. En déduire l'inertie équivalente ramenée à l'axe du moteur.

Exercice 2 : Système d'entrainement en translation

On considère un dispositif d'entraînement en translation d'une table supportant une charge embarquée (supposée liée à la table 2). La table est en liaison glissière sans frottement par rapport au bâti 0 et en liaison pignon-crémaillère avec le pignon moteur 1.
La figure ci-dessous illustre schématiquement le dispositif.
Il y a roulement sans glissement entre le pignon et la crémaillère.



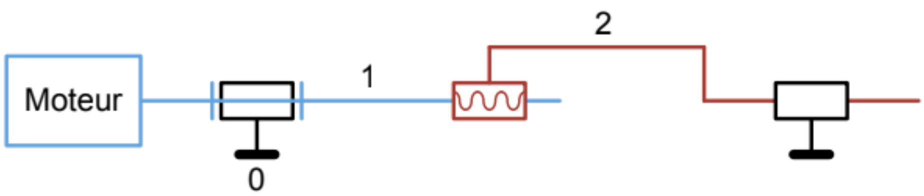
On note : $\Sigma = \{1,2\}$ l'ensemble des solides en mouvement :

Q1. Calculer l'énergie cinétique T_{Σ/R_0}

Q2. En déduire l'inertie équivalente ramenée à l'axe du moteur.

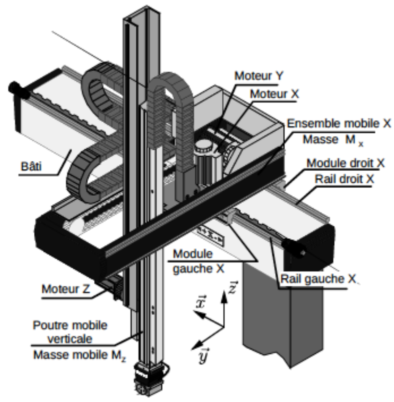
Exercice 3 : Transformation de mouvement

Dans cet axe de robot, la rotation du rotor du Moteur entraîne la vis1 de pas p à la vitesse ω.
On note I le moment d'inertie de l'ensemble $\{rotor, vis\}$ par rapport à son axe de rotation et m la masse du coulisseau.

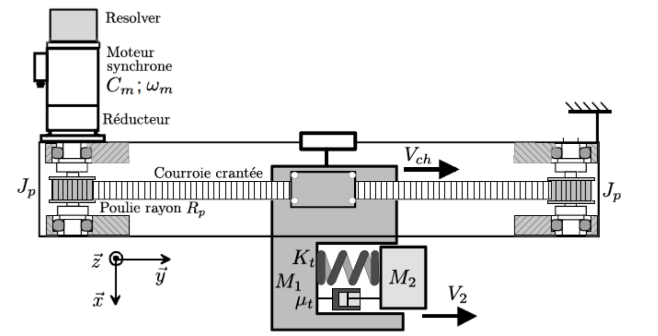


Q1. Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma = \{rotor, vis1, coulisseau\ 2\}$ dans son mouvement par rapport au bâti 0.
Q2. En déduire l'inertie équivalente, ramenée sur l'arbre moteur, de l'ensemble $\Sigma = \{rotor, vis1, coulisseau\ 2\}$.

Exercice 4 : Robot cartésien



Considérons par exemple le cas d'un robot de transfert cartésien 3 axes représenté ci-contre.
On s'intéresse plus particulièrement à l'axe $\vec{y}$ dont l'architecture est décrite ci-dessous.
L'axe $\vec{y}$ est motorisé par un moteur asynchrone équipé d'un réducteur. Un système poulie-courroie transforme la rotation en translation et entraîne le chariot ch. Le bras $\vec{z}$ est fixé au chariot ch. Les sollicitations dynamiques du robot conduisent à déformer le bras $\vec{z}$ si bien qu'il est modélisé par une masse M_2, un ressort K_t et un amortisseur μ_t.



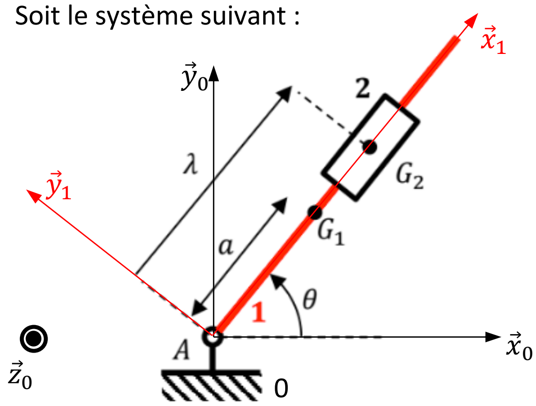
Notations :
- masse équivalente associée aux parties rigides $M_1 = 136\ kg$;
- masse équivalente associée aux parties flexibles $M_2 = 46\ kg$;
- moment d'inertie de l'arbre moteur $J_m = 4{,}2.10^{-4}\ kg.m^2$;
- moment d'inertie du réducteur rapporté à l'arbre moteur $J_r = 1{,}2.10^{-4}\ kg.m^2$;
- moment d'inertie d'une poulie $J_p = 6.10^{-5}\ kg.m^2$;
- rayon primitif d'une poulie crantée $R_p = 20\ mm$;
- rapport de réduction du réducteur $k = 1/5$;
- frottements visqueux ramenés à l'arbre moteur $f_v = 0{,}0171\ Nm/rad.s^{-1}$;
- raideur équivalente $K_t = 124\ 000\ N/m$;
- amortissement interne équivalent $\mu_t = 64,\ N/m.s^{-1}$.
- vitesse du moteur ω_m, des poulies ω_p, du chariot V_{ch} et des parties flexibles $V2$

On note : $\Sigma = \{arbre\ moteur, réducteur, poulie\ motrice, poulie\ réceptrice, chariot, solide\ 2\}$ l'ensemble des solides en mouvement :

Q1. Calculer l'énergie cinétique T_{Σ/R_0}
Q2. Écrire T_{Σ/R_0} sous la forme $T_{\Sigma/R_0} = J_{eq} \cdot {\omega_m}^2 + B \cdot {V_2}^2$ où J_{eq} et B seront explicités.

Exercice 5 :

Soit le système suivant :



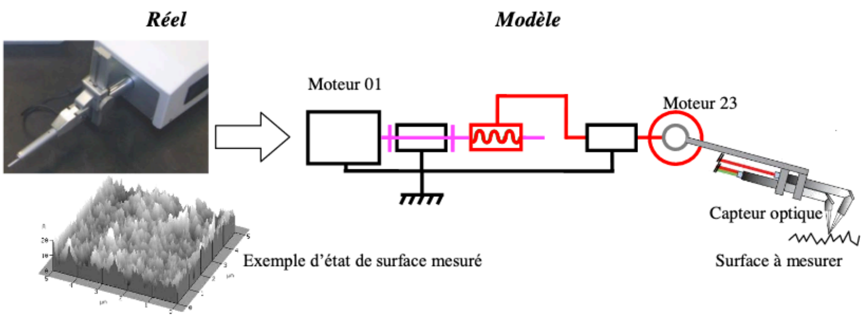
On donne :

- $\Sigma = \{1{,}2\}$
- m_i : La masse du solide i
- $C_{1,A}$: le moment d'inertie du solide 1 par rapport à l'axe $(A; \vec{z})$
- C_{2,G_2} : le moment d'inertie du solide 2 par rapport à l'axe $(G_2\,; \vec{z})$
- T_{1/R_0} :l'énergie cinétique de 1 par rapport à 0
- T_{2/R_0} :l'énergie cinétique de 2 par rapport à 0

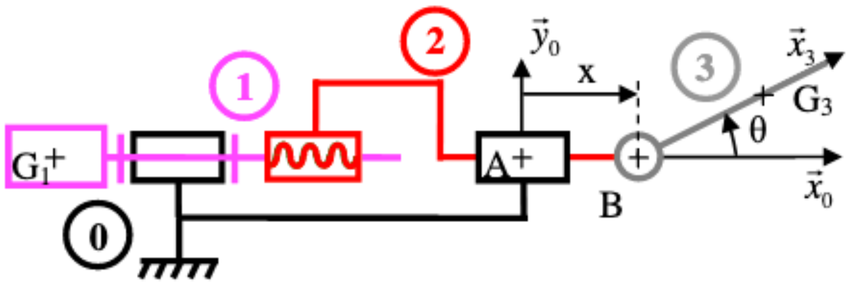
Q1. Calculer l'énergie cinétique T_{Σ/R_0}

Q2. Écrire T_{Σ/R_0} sous la forme $T_{\Sigma/R_0} = A \cdot \dot{\lambda}^2 + B \cdot \dot{\theta}^2$ où A et B seront explicités.

Ex 6 : Rugosimètre



La rugosimétrie est la mesure de l'état de surface des pièces mécaniques. La mesure de rugosimétrie repose traditionnellement sur deux éléments distincts : le capteur, qui peut être mécanique (palpeur) ou optique, et le traitement du signal



$R_0 = (A; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$

- Le rotor 1, de centre de gravité G_1 tel que $\overrightarrow{AG_1} = -a \cdot \overrightarrow{x_0}$, a pour moment d'inertie J_1 selon l'axe $(A; \overrightarrow{x_0})$. On note φ le paramètre angulaire de la liaison pivot de 1/0 tel que $\varphi = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}) = (\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_1})$.
  Le moteur 01 génère le mouvement de rotation de 1/0. Le couple moteur appliqué sur 1 est noté $\overrightarrow{C_{\substack{m\\0\to1}}} = C_1 \cdot \overrightarrow{x_0}$.
- Le coulisseau 2, de centre de gravité G_2, a pour masse m_2. La liaison glissière de 2/0 a pour paramètre de position x tel que $\overrightarrow{AB} = x \cdot \overrightarrow{x_0}$.La liaison hélicoïdale de 1/2 possède un pas à droite tel que $pas=0{,}5\ mm$.

- L'ensemble 3, de centre de gravité G_3 tel que $\overrightarrow{BG_3} = r \cdot \overrightarrow{x_3}$, a pour masse m_3.

  On donne la matrice d'inertie de cet ensemble: $\left[I_{G_3,3}\right] = \underset{G_3}{\begin{bmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{bmatrix}}_{(\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3})}$.

  On note θ le paramètre angulaire de la liaison pivot de 3/2 tel que $\theta = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_3}) = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3})$.
  Le moteur *23* génère le mouvement de rotation de 3/2. Le couple moteur appliqué sur 3 est noté $\overrightarrow{C_{\underset{2\to3}{m}}} = C_3 \cdot \overrightarrow{z_0}$.
- Un système d'équilibrage (ressort de torsion) permet à la tête optique d'être horizontale ($\theta = 0°$) en position de repos, c'est-à-dire lorsque le moteur 23 n'est pas alimenté. Ce système exerce sur l'ensemble 3 un couple de rappel noté $\overrightarrow{C_{\underset{2\to3}{r}}} = C_r \cdot \overrightarrow{z_0}$.
- On considère que toutes les liaisons sont parfaites.
- L'action mécanique de la pesanteur est telle que $\vec{g} = -g \cdot \overrightarrow{y_0}$.

Q1. Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma = \{1,2,3\}$ des pièces mobiles : T_{Σ/R_0}

T_{Σ/R_0} peut se mettre sous la forme : $T_{\Sigma/R_0} = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot A \cdot \dot{\theta}^2 + f(\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi}$.
L'objectif est ici de déterminer les expressions de J_{eq}, A et $f(\theta)$.
Pour cela on demande :

Q2. De déterminer $\underset{B}{\{V_{2/1}\}}$

Q3. En écrivant la fermeture cinématique de la chaine $\{0,1,2,0\}$ trouver la relation liant $\dot{x}$ et $\dot{\varphi}$

Q4. De déterminer les expressions de J_{eq}, A et $f(\theta)$.

Éléments de réponses :

Ex1 : Réducteur :

$$J_{eq} = J_1 + J_2 \cdot \lambda^2 + J_3 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2$$

Ex2 : Système d'entrainement en translation :

$$J_{eq} = J + M \cdot R^2$$

Ex3 : Transformation de mouvement :

$$J_{eq} = I + \frac{m \cdot p^2}{4 \cdot \pi^2}$$

Ex4 : Robot cartésien :

$$\begin{cases} J_{eq} = J_m + J_r + 2 \cdot J_p \cdot k^2 + M_1 \cdot k^2 \cdot {R_p}^2 \\ B = \frac{1}{2} \cdot M_2 \end{cases}$$

Ex5 : Système à 2degrés de liberté

$$\begin{cases} B = C_{1,A} + C_{2,G_2} + m_2 \cdot \lambda^2 \\ A = m_2 \end{cases}$$

Ex6 : Rugosimètre

$$\begin{cases} J_{eq} = J_1 + (m_1 + m_2) \cdot \frac{pas^2}{4 \cdot \pi^2} \\ A = C_3 \\ f(t) = m_3 \cdot r \cdot \frac{pas}{2 \cdot \pi} \cdot \sin\theta \end{cases}$$