«Ce qu'il faut savoir sur »
Le Théorème de l'Énergie Cinétique

T.E.C. ou Théorème de l'Énergie Puissance

Énergie Cinétique

Définition :

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_S \overrightarrow{V_{P\in S/R_0}}^2 \, dm$$

Pratiquement : pour un solide indéformable

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} m \overrightarrow{V_{A\in S/R_0}}^2 + m \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \cdot \left(\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R_0}}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \cdot [I_{A,S}] \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$$

Ou

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\ {}_A\{C_{S/R_0}\} \otimes {}_A\{V_{S/R_0}\} \ \forall A$$

Cas particuliers :

- A est en G :
$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} m \overrightarrow{V_{G\in S/R_0}}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \cdot [I_{G,S}] \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$$
- A est fixe dans R_0 :
$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \cdot [I_{A,S}] \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$$
- S est en translation dans R_0 :
$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} m \cdot V_{A\in S/R_0}{}^2 \ \forall A$$
- S est en rotation autour d'un axe $(O; \overrightarrow{x_0})$ de R_0 tel que $\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{x_0}$:
$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} \cdot J_{O,\overrightarrow{x_0}} \cdot \dot{\theta}^2$$

Pour un ensemble matériel $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$:

$$T_{\Sigma/R_0} = \sum_{i=1}^{n} T_{S_i/R_0}$$

Puissances

- Puissance des actions extérieures :

$$P(\bar{S} \to S/R_0) = {}_A\{T_{\bar{S}\to S}\} \otimes {}_A\{V_{S/R_0}\} \quad \forall A$$

Pratiquement :

$$P(\bar{S} \to S/R_0) = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{\bar{S}\to S}} \\ \overrightarrow{M_{A\ \bar{S}\to S}} \end{Bmatrix} \otimes {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R_0}} \end{Bmatrix} \quad \forall A$$

- Puissance intérieure (inter efforts) P_{int}:

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = {}_A\{T_{S_1\to S_2}\} \otimes {}_A\{V_{S_2/S_1}\} \quad \forall A$$

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = P(S_1 \to S_2/R_0) + P(S_2 \to S_1/R_0)$$

Dans le cas des liaisons parfaites :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0$$

Attention !

$$P(S_1 \to S_2/R_0) = -P(S_2 \to S_1/R_0) \neq 0$$

Théorème de l'énergie cinétique

$R_o = R_g$ repère galiléen.

Pour un ensemble matériel Σ:

$$\frac{dT(\Sigma/R_g)}{dt} = P_{\bar{\Sigma}\to\Sigma/R_g} + P_{int}$$

Pour un Solide S :

$$\frac{dT(S/R_g)}{dt} = P_{\bar{S}\to S/R_g}$$

«Ce qu'il faut savoir sur »

Le Calcul d'inertie ou de masse équivalente

Contexte :

Afin de simplifier les problèmes traités avec le théorème de l'énergie cinétique, on demande souvent avant de l'appliquer de déterminer l'inertie « vue par le moteur » : inertie équivalente ou masse équivalente de l'ensemble de solides mis en mouvement par l'actionneur.
Cela consiste à exprimer l'énergie cinétique d'un ensemble de pièces en mouvement de la forme :

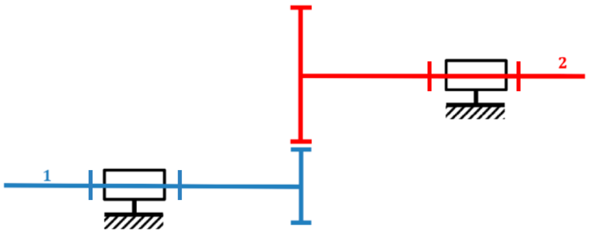
$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \omega^2$ (pour un actionneur rotatif)

Ou

$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \cdot M_{eq} \cdot V^2$ (pour un actionneur linéaire)

J_{eq} : Inertie équivalente

Prenons l'exemple d'un réducteur composé de deux arbres 1 et 2 en liaison pivot avec le bâti de rapport de réduction : $k = \frac{\omega_2}{\omega_1}$



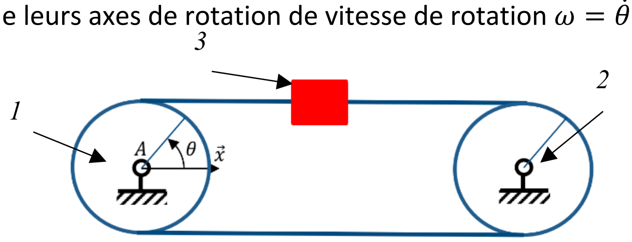
$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot {\omega_1}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot {\omega_2}^2$$
$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot {\omega_1}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot k^2 {\omega_1}^2$$
$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \cdot (J_1 + J_2 \cdot k^2) \cdot {\omega_1}^2$$

$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot {\omega_1}^2$$

$$J_{eq} = J_1 + J_2 \cdot k^2$$

M_{eq} : Masse équivalente

Soit le système suivant composé d'une masse m (solide 3) en translation par rapport à R_0 à la vitesse V et de deux poulies 1 et 2 de rayon R et d'inerties identiques J autour de leurs axes de rotation de vitesse de rotation $\omega = \dot{\theta}$.



On suppose la relation : $V = R \cdot \omega$ et on définit : $\Sigma = \{1,2,3\}$
L'énergie cinétique de l'ensemble des pièces en mouvement vaut:

$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2$$

De cette équation on peut trouver l'inertie équivalente en posant : $V^2 = R^2 \cdot \omega^2$

$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot J \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \omega^2$$
$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot J + m \cdot R^2)\omega^2$$

$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \omega^2$$

$$J_{eq} = 2 \cdot J + m \cdot R^2$$

Ou trouver la masse équivalente en posant : $\omega^2 = \frac{V^2}{R^2}$

$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot J \cdot \frac{V^2}{R^2} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2$$
$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{J}{R^2} + m\right) \cdot V^2$$

$$M_{eq} = 2 \cdot \frac{J}{R^2} + m$$