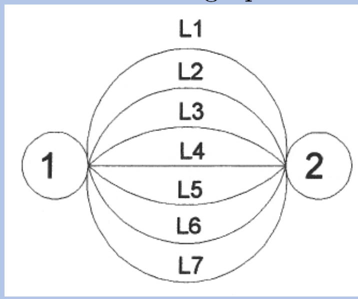
# 6 – Liaisons équivalentes

## 1) Associations de liaisons en série et en parallèle ; liaisons cinématiquement équivalentes.

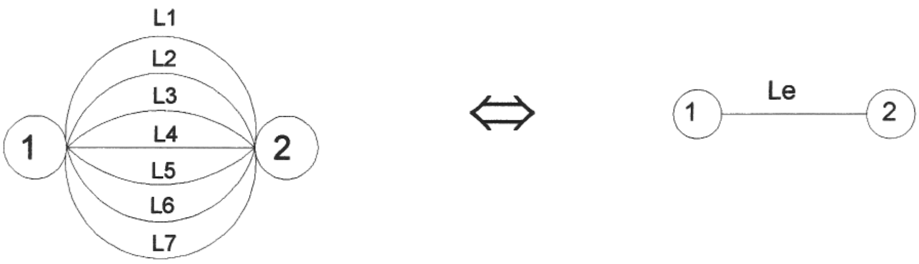
### 1.1) Liaisons en parallèle :

Définition : n liaisons $L_1$,$L_2$, ..., $L_n$ sont disposées en parallèle entre deux solides 1 et 2 si chaque liaison relie directement ces deux solides. Le graphe des liaisons a la forme ci-dessous :




Afin de simplifier ce graphe, on introduit la notion de liaison équivalente qui, à elle seule, se comporte de la même manière que cette association de liaisons.

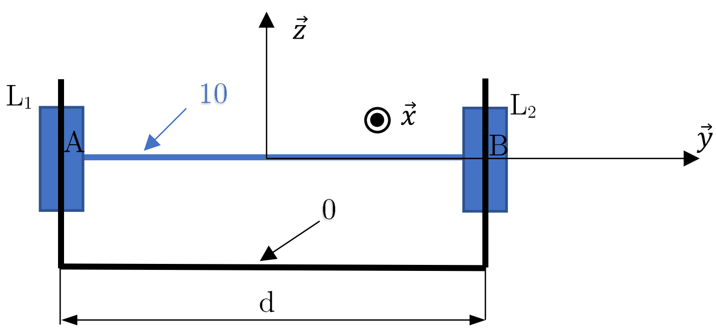
Le graphe se simplifie donc de la manière suivante :




La liaison équivalente doit être compatible avec toutes les liaisons en parallèle, ce qui nous conduit à écrire que :

$$_Q\{v_{Le}\} = {}_Q\{v_{L1}\} = {}_Q\{v_{L2}\} = \ldots = {}_Q\{v_{Ln}\} \quad \forall Q \quad (1)$$

Exemple : Dans la presse de modélisme, vue dans le cours *3.1 représentation des liaisons*, les deux liaisons pivot glissant $L_1$ et $L_2$ installées en parallèle entre la traverse 10 et le socle 0, sont équivalentes à une liaison glissière de direction $\vec{z}$ .



Vérification :

$$_Q\{v_{Le}\} = {_Q\{v_{L1}\}} = {_Q\{v_{L2}\}}$$

<u>Nota</u> : Les composantes dans la base générale $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ des torseurs cinématiques s'expriment le plus souvent, dans ce type de problème, de la manière suivante :

$$_Q\{v_{Le}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{Le}} \\ \vec{V}_{QLe} \end{Bmatrix} \; avec \; \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{Le}} = p_e\vec{x} + q_e\vec{y} + r_e\vec{z} \\ \vec{V}_{QLe} = u_e\vec{x} + v_e\vec{y} + w_e\vec{z} \end{cases}$$

Donc pour l'exemple qui nous intéresse les torseurs cinématiques des deux liaisons en parallèles ($L_1$ et $L_2$) vont s'écrivent de la manière suivante :

- Pour $L_1$ (pivot glissant d'axe$(A;\vec{z})$ ) :

$$_A\{v_{L1}\} = {_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_1 & w_1 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- Pour $L_2$ (pivot glissant d'axe$(B;\vec{z})$ ) :

$$_B\{v_{L2}\} = {_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_2 & w_2 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Constatation avant d'aller plus en avant, on peut comparer les deux torseurs que s'ils sont exprimés dans la même base et s'ils sont exprimés en un même point (ce qui n'est pas le cas ici). Nous allons donc, par exemple, exprimer le torseur $_B\{v_{L2}\}$ au point A (sachant que $\overrightarrow{BA} = -d.\vec{y}$ )

$$_A\{v_{L2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & r_2 \cdot d \\ 0 & 0 \\ r_2 & w_2 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

En appliquant la relation (1) on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} p_e = 0 = 0 \\ q_e = 0 = 0 \\ r_e = r_1 = r_2 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} u_e = 0 = r_2 \cdot d \;\; \Rightarrow r_2 = 0 \\ v_e = 0 = 0 \\ w_e = w_1 = w_2 \end{cases}$$

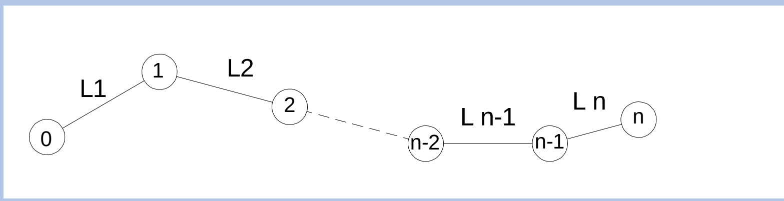
Donc :

$$\boxed{_A\{v_{Le}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & w_e \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

Le torseur cinématique de la liaison équivalente a la forme d'un torseur cinématique d'une liaison glissière de direction $\vec{z}$ .

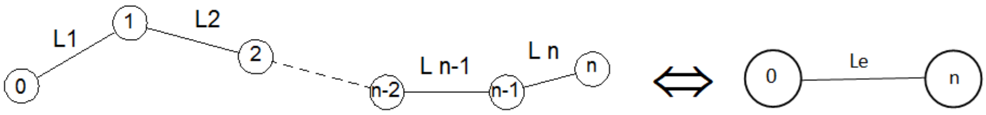
1.2) Liaisons en série :

Définition : $n$ liaisons $L_1$, $L_2$, …, $L_n$ sont en série, ou réalisent une chaîne ouverte, entre deux solides 0 et n si elles sont reliées l'une à la suite de l'autre par l'intermédiaire de ($n$-1) solides, le graphe des liaisons a la forme suivante :




Nota : on dit également que ($n$+1) solides assemblés par n liaisons en série constituent une **chaîne continue ouverte.**

En utilisant la notion de liaison équivalente, le graphe se simplifie de la manière suivante :



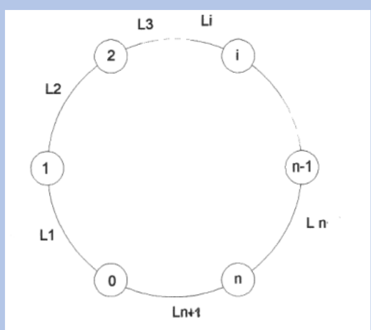

Le torseur cinématique $\{v_{Le}\}$ de la liaison équivalente représente le mouvement du solide n par rapport au solide 0. La relation entre le torseur $\{v_{Le}\}$ et les torseurs cinématiques représentant les liaisons intermédiaires s'obtient en écrivant la relation des torseurs cinématiques entre les différents solides en présence :

$$_Q\{v_{n/0}\} = {}_Q\{v_{n/n\text{-}1}\} + \cdots + {}_Q\{v_{1/0}\} \quad (2)$$

Exemple : Dans le cours *3.1 représentation des liaisons*, la presse de modélisme fait apparaitre deux liaisons en série $L_3$ et $L_4$ d'une part et $L_5$, $L_6$ d'autre part, on montre qu'elles sont équivalentes à une liaison ponctuelle de normale $(O;\vec{z})$ (amusez-vous à retrouver le résultat).

**2) Fermeture de la chaîne cinématique, loi entrée sortie cinématique :**

Définition : Une chaîne continue ouverte dont les deux solides extrêmes possèdent une liaison commune constitue une chaîne continue fermée. Dans le cas d'une chaîne continue fermée de ($n$+1) solides assemblés en série par ($n$+1) liaisons, le graphe des liaisons se trace ainsi :



En écrivant la relation de composition des torseurs cinématiques entre les différents solides en présence on obtient :

$$\boxed{{}_Q\{v_{0/0}\} = {}_Q\{v_{0/n}\} + {}_Q\{v_{n/n-1}\} + \ldots + {}_Q\{v_{1/0}\} = \{\vec{0}\} \quad (3)}$$

<u>Notation</u> : Le torseur cinématique $\{v_{Li}\}$ de la liaison $Li$ représente dans cette étude le mouvement du solide ($i$) par rapport au solide ($i$-$1$). La relation précédente devient alors :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n+1} {}_Q\{v_{Li}\} = \{\vec{0}\} \quad \forall Q}$$