

# 5.3 SLCI-correction

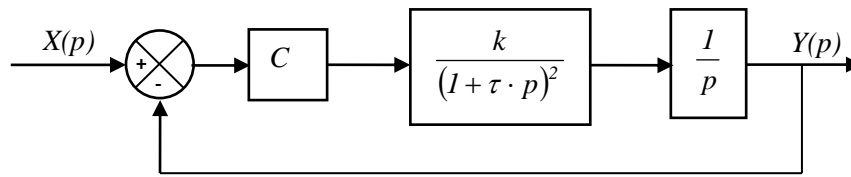
Connaissances	Savoir-faire
Correction	Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase
Correction d'un système asservi	Choisir un type de correcteur adapté

## Sommaire

5.3.1 Asservissement à correction proportionnelle : .....	2
5.3.2 Lecture de marges et correction proportionnelle : .....	2
5.3.3 détermination d'un correcteur P et I : .....	3
5.3.4 Position – Vitesse – Accélération (PVA) : .....	4
I Présentation : .....	4
II Travail demandé : .....	4
5.3.5 Positionnement d'une antenne de satellite : .....	5
I Présentation : .....	5
II Travail demandé : .....	5
1. étude du système avec correcteur proportionnel : .....	5
2. étude du système avec correcteur proportionnel-dérivé : .....	5
5.3.6 Asservissement de position angulaire- Synthèse d'un correcteur Avance de Phase. ....	6
I Présentation : .....	6
II Travail demandé : .....	6
1.Synthèse du correcteur $D(p)$ par la méthode du modèle : .....	6
2. Synthèse d'un correcteur avance de phase : .....	7
3. Application à l'asservissement de position: .....	7
5.3.7 Véhicule hybride Toyota Prius : .....	9
I Présentation : .....	9
II Travail demandé : .....	11

### 5.3.1 Asservissement à correction proportionnelle :

On considère un asservissement à correction proportionnelle décrit par le schéma-bloc à retour unitaire de la figure ci-dessous.



Pour les applications numériques on prendra :  $C=1$ ,  $k=0,5$  et  $\tau=2s$ .

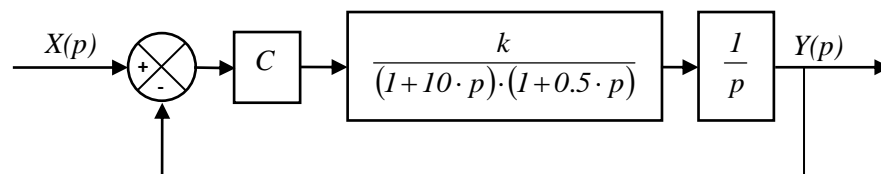
**Q1.** Calculer la valeur de la pulsation qui donne une phase de  $-180^\circ$ .

**Q2.** En déduire la valeur  $C_1$  du gain  $C$  correspondant à la limite de la stabilité. La comparer avec la valeur proposée initialement.

**Q3.** Déterminer la valeur de  $C_2$  du gain  $C$  qui donne une marge de gain de  $12\text{ dB}$ .

### 5.3.2 Lecture de marges et correction proportionnelle :

On considère un asservissement à correction proportionnelle décrit par le schéma-bloc à retour unitaire de la figure ci-dessous.

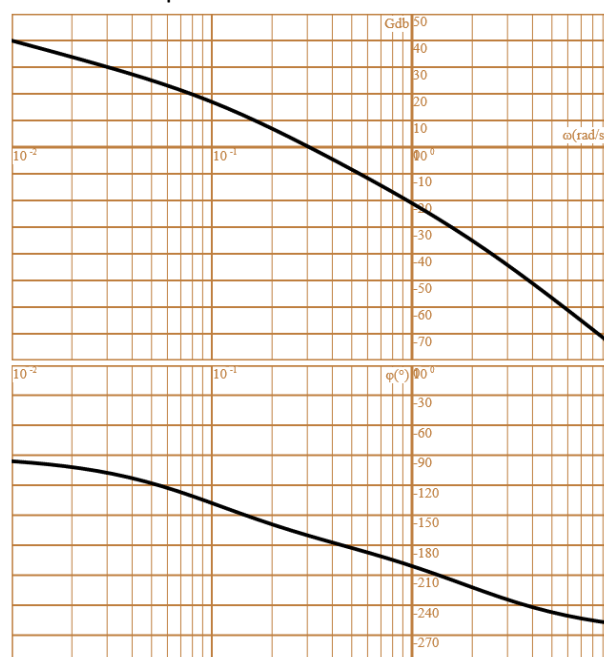


**Q1.** Indiquer, en justifiant la réponse, à quelle fonction de transfert correspondent les diagrammes de Bode de la figure ci-dessous.

**Q2.** Déterminer graphiquement les marges de gain et de phase du système décrit précédemment dans le cas où  $C=1$ .

**Q3.** Le cahier des charges impose des marges de gain et de phase minimales de  $12\text{ dB}$  et  $40^\circ$ .

Déterminer la plus grande valeur de  $C$  permettant de vérifier ce cahier des charges.



### 5.3.3 détermination d'un correcteur P et I :

Considérons un système dont la boucle ouverte se caractérise par :  $H(p) = \frac{k}{(1 + 5 \cdot p)^2}$  avec pour

cahier des charges associé en boucle fermée :

- $BP(-3 \text{ dB}) > 0,2 \text{ rad/s}$  (critère équivalent de rapidité)
- Une erreur statique nulle.
- $MP_{\min} = 40^\circ$

**Q1.** Tracer rapidement les diagrammes de Bode de  $H(p)$  pour  $k = 1$ . Quelle est la pulsation de coupure du système ?

**Q2.** Calculer les valeurs de la pulsation  $\omega_{dB}$  et du gain  $k$  qui correspondent à une marge de phase de  $45^\circ$ .

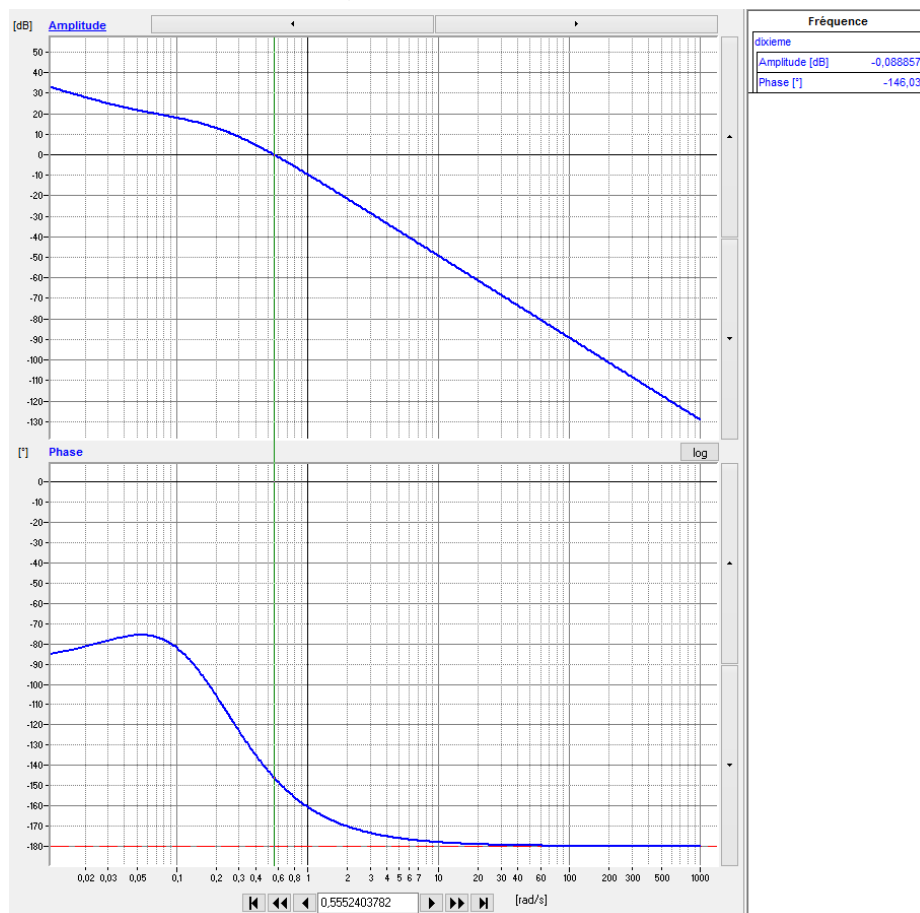
On veut annuler l'erreur statique de position du système à l'aide d'un correcteur de fonction de

transfert :  $C(p) = k_c \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau \cdot p}\right)$

**Q3.** De quel type de correcteur s'agit-il ? Tracer l'allure du diagramme de Bode de ce correcteur.

**Q4. Première méthode :** On place ce correcteur en amont du système dont  $k$  a été défini à la question Q2. On désire assurer une marge de phase de  $40^\circ$ . Déterminer  $k_c$  et  $\tau$  (méthode du 1/10).

**Q5.** On donne le tracé de la *FTBO corrigée*. Vérifier si la marge de phase a été obtenue.



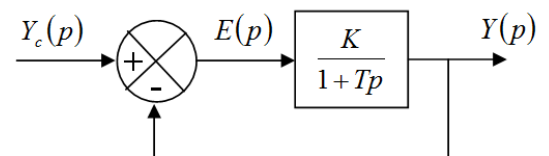
**Q6 Deuxième méthode :** On place le correcteur sur la pulsation de coupure du système (méthode de compensation du pôle dominant), déterminer la valeur de  $\tau$  puis calculer alors le nouveau gain  $k_c$  pour obtenir une marge de phase de  $40^\circ$ .

**Q7.** Comparer les deux méthodes vis-à-vis du cahier des charges. Pour la rapidité on considérera que  $\omega_{0dB} FTBO \cong \omega_{3dB} FTBF$

### 5.3.4 Position – Vitesse – Accélération (PVA) :

#### I Présentation :

Le suivi de trajectoires de robots peut être spécifié par des données sur la position, la vitesse et l'accélération (PVA). Soit l'asservissement ci-contre :



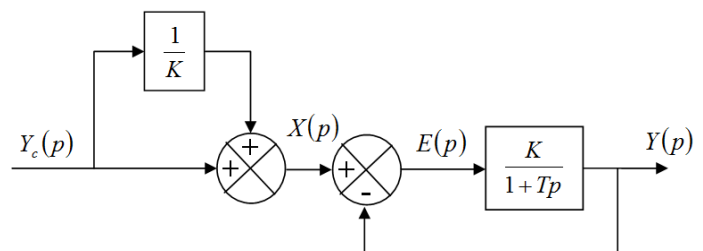
#### II Travail demandé :

**Q1.** Ecrire la fonction de transfert  $H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)}$ .

**Q2.** Si  $y_c(t) = y_0 = cste$ , que devient  $y(t)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  ? Quel est alors l'écart  $e_0$  entre  $y_0$  et  $y(\infty)$  ?

**Q3.** Que devient l'écart  $e_1 = y_c(t) - y(\infty)$ . Si l'entrée est une rampe de pente  $a$  ?

Afin de rendre l'asservissement plus performant, on propose la structure ci-contre:



**Q4.** Ecrire la fonction de transfert

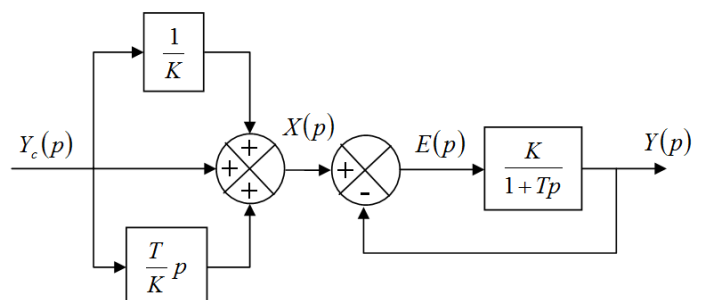
$H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)}$  ; montrer qu'elle est

équivalente à celle d'un asservissement classique à retour unitaire dont la fonction de transfert de la chaîne directe serait  $\frac{1}{T_i p}$  ; calculer  $T_i$ .

**Q5.** Reprendre les questions **Q2.** et **Q3.**

**Q6.** Qu'en est-il de l'écart  $e_2 = y_c(t) - y(\infty)$ , pour une entrée de la forme  $y_c(t) = 0,5b \cdot t^2 \cdot u(t)$

On considère à présent la structure ci-contre:



**Q7.** Ecrire les fonctions de transfert

$H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)}$  et  $\frac{X(p)}{Y_c(p)}$ .

**Q8.** Reprendre les questions **Q2**, **Q3** et **Q6**.

**Q9.** Conclusion.

## 5.3.5 Positionnement d'une antenne de satellite :

### I Présentation :

Une antenne parabolique permet sur un satellite l'échange d'informations avec la terre.

Cette antenne doit être précisément orientée vers les antennes sur terre. A cette fin, deux moteurs asservis en position assurent l'orientation angulaire. On se propose d'étudier l'un des asservissements.

Le système est piloté par une tension de consigne  $U_c(p)$  et assure une position angulaire  $\theta(p)$  de l'antenne.

Le comportement du moteur est modélisé par une fonction de transfert du premier ordre de gain :

$K_m = 11 \text{ rad/s/V}$  et de constante de temps  $\tau_m = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$ .

Il est commandé par une tension  $U_m(p)$  fournie par un amplificateur et admet en sortie la vitesse de rotation  $\omega_m(p)$ .

L'amplificateur est modélisé par une fonction de transfert du premier ordre :

de gain  $K_A = 50$  et de constante de temps  $\tau_A = 0.5 \times 10^{-3} \text{ s}$ .

Il est commandé par une tension  $V(p)$ .

Un correcteur de fonction de transfert  $C(p)$  est placé en amont de l'amplificateur et adapte la tension  $\alpha(p)$  en une tension  $V(p)$  pour commander l'amplificateur.

Un capteur de gain  $K_c = 2 \text{ V/rad}$  assure la chaîne de retour en mesurant  $\theta(p)$  et fournit une tension  $e(p)$ . La mesure est comparée à la consigne  $U_c(p)$  tel que  $\alpha(p) = U_c(p) - e(p)$ .



FIG. 1 – Satellite et antennes de communication.

### II Travail demandé :

#### 1. étude du système avec correcteur proportionnel :

**Q1.** Tracer le schéma bloc du système.

**Q2.** Calculer la fonction de transfert en boucle ouverte puis la fonction de transfert en boucle fermée pour un correcteur proportionnel :  $C(p) = K_P$ .

**Q3.** Déterminer si le système est stable pour  $K_P = 1$ ,  $K_P = 2$  et  $K_P = 4$  (voir Bode en annexe)

#### 2. étude du système avec correcteur proportionnel-dérivé :

On choisit d'utiliser un correcteur proportionnel-dérivé :  $C(p) = K_P + K_d p$  où  $K_P = 4$  et  $K_d = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ .

**Q4.** Tracer le diagramme de Bode asymptotique du correcteur.

**Q5.** Tracer le diagramme de Bode asymptotique du système en boucle ouverte avec correcteur proportionnel-dérivé. Que pensez-vous de la stabilité ?

**Q6.** Vérifier la stabilité du système par le calcul des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée.

### 5.3.6 Asservissement de position angulaire- Synthèse d'un correcteur Avance de Phase.

#### I Présentation :

Nous considérons un asservissement de position angulaire. La fonction de transfert du système à commander (modèle du moteur à courant continu dont on néglige la constante de temps électrique) est :

$$G(p) = \frac{K}{p \cdot (1 + T_m \cdot p)} = \frac{1.69}{p \cdot (1 + 0.16 \cdot p)}$$

Le schéma bloc de l'asservissement est représenté sur la figure 1.

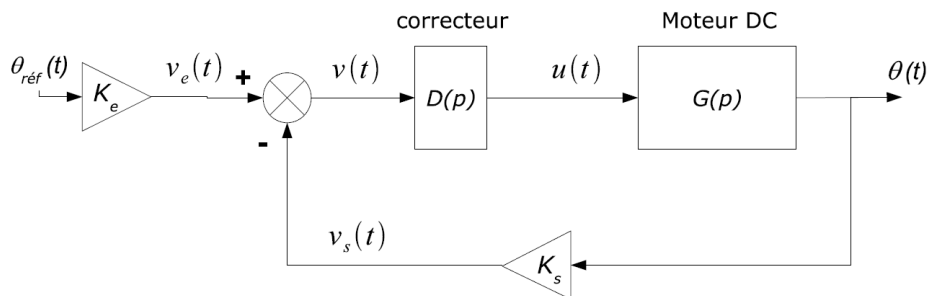


Figure 1 : Asservissement de position angulaire du moteur

On rappelle que le capteur de position angulaire est linéaire et de gain  $K_s = 10 \text{ V/tr}$  et que l'on pose  $K_e = K_s$ .

$D(p)$  est la fonction de transfert d'un correcteur que nous allons synthétiser ; on propose de faire l'étude du correcteur :

$$D(p) = \frac{1 + \tau_1 \cdot p}{1 + \tau \cdot p}$$

Ce correcteur est de type avance de phase lorsque  $\tau_1 > \tau$ .

#### II Travail demandé :

##### 1.Synthèse du correcteur $D(p)$ par la méthode du modèle :

On appelle méthode du modèle la méthode qui permet d'obtenir, par identification, les paramètres d'un correcteur afin d'obtenir un modèle désiré en boucle fermée.

Nous proposons de calculer les paramètres  $\tau_1$  et  $\tau$  du correcteur  $D(p)$  afin que le système asservi se comporte comme un système du second ordre avec un amortissement  $a = 0.7$ .

**Q1.** Quel effet peut avoir le correcteur  $D(p)$  sur la précision de l'asservissement ?

Argumenter.

**Q2.** Nous avons deux paramètres à régler pour répondre à une spécification (amortissement) ; le degré de liberté va être utilisé en faisant **une compensation du pôle** lié à la constante de temps mécanique : on pose  $\tau_1 = T_m$ .

Montrer que le modèle fonction de transfert du système asservi est, dans ce cas, un modèle du second ordre.

**Q3.** Calculer le paramètre  $\tau$  qui permet d'avoir un facteur d'amortissement  $a = 0.7$ .

## 2. Synthèse d'un correcteur avance de phase :

On pose  $\tau_I = \alpha \cdot \tau$  avec  $\alpha > 1$ . Le correcteur avance de phase s'écrit alors :

$$D(p) = \frac{1 + \alpha \cdot \tau \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \quad \alpha > 1$$

Caractéristiques harmoniques de l'avance de phase :

**Q1.** Tracer le comportement fréquentiel asymptotique de  $D(p)$  dans le plan de Bode. Ecrire le module et l'argument de  $D(j\omega)$ .

**Q2.** Montrer que l'argument est maximal<sup>1</sup> pour la pulsation  $\omega_{Max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha \cdot \tau}}$ . Placer cette pulsation sur le tracé asymptotique.

**Q3.** On note  $\Phi_{Max}$ , l'argument maximal. Montrer que :

$$\phi_{Max} = \arctan \sqrt{\alpha} - \arctan \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

En utilisant les égalités trigonométriques adéquates<sup>2</sup>, montrer que l'on a la relation :

$$\sin(\phi_{max}) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

**Q4.** Montrer que pour la pulsation  $\omega_{Max}$ , le module en décibels égale  $10 \log \alpha$ .

**Q5.** De manière générale, quel est l'apport de ce correcteur sur le lieu de transfert de la boucle ouverte.

## 3. Application à l'asservissement de position:

Soient  $TI(p)$  la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $D(p) = 1$  et  $T_{Av\phi}(p)$  la

fonction de transfert en boucle ouverte pour  $D(p) = \frac{1 + \alpha \cdot \tau \cdot p}{1 + \tau \cdot p}$

La réponse harmonique de  $TI(p)$  est représentée sur la figure 2, réponse à partir de laquelle nous avons mesuré une marge de phase de  $35^\circ$  à la pulsation  $\omega_{0dB} = 9.5 \text{ rad/s}$ . L'objectif de l'exercice est de placer l'avance de phase  $D(p)$  pour améliorer le degré de stabilité de l'asservissement et obtenir une marge de phase de  $65^\circ$ . Le correcteur  $D(p)$  doit donc être calculé pour apporter :

*Marge de phase à apporter = Marge de phase désirée - Marge de phase avant correction*  
soit :  $\Phi_{Max} = 65^\circ - 35^\circ = 30^\circ$

**Q1.** Calculer le paramètre  $\alpha$  qui garantisse  $\Phi_{Max} = 30^\circ$ .

**Q2.** Sur la boucle ouverte après correction notée  $T_{Av\phi}(p)$ , on souhaite que la pulsation de mesure de la nouvelle marge de phase corresponde à celle que nous avons noté  $\omega_{Max}$ , c'est à dire à la pulsation où le correcteur apporte le maximum  $\Phi_{Max}$  de phase. Déterminer graphiquement la valeur de  $\omega_{Max}$ .

**Q3.** Dédurre des résultats précédents la valeur de  $\tau$ .

**Q4.** Esquisser la réponse harmonique de ce correcteur considéré seul en notant les valeurs remarquables.

**Q5.** A partir de cette esquisse, tracer, sur la figure 2, la réponse harmonique de la fonction de transfert  $T_{Av\phi}(p)$ , boucle ouverte après correction.

**Q6.** Mesurer la nouvelle marge. Pourquoi ce résultat est-il un peu inférieur à la marge escomptée ?

<sup>1</sup> On rappelle que :  $\frac{d \arctan u}{d\omega} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{d\omega}$

<sup>2</sup> On s'en sort rapidement en utilisant les égalités pratiques :  $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ;  $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ;  $\sin(a-b) = \sin(a) \cdot \cos(b) - \sin(b) \cdot \cos(a)$

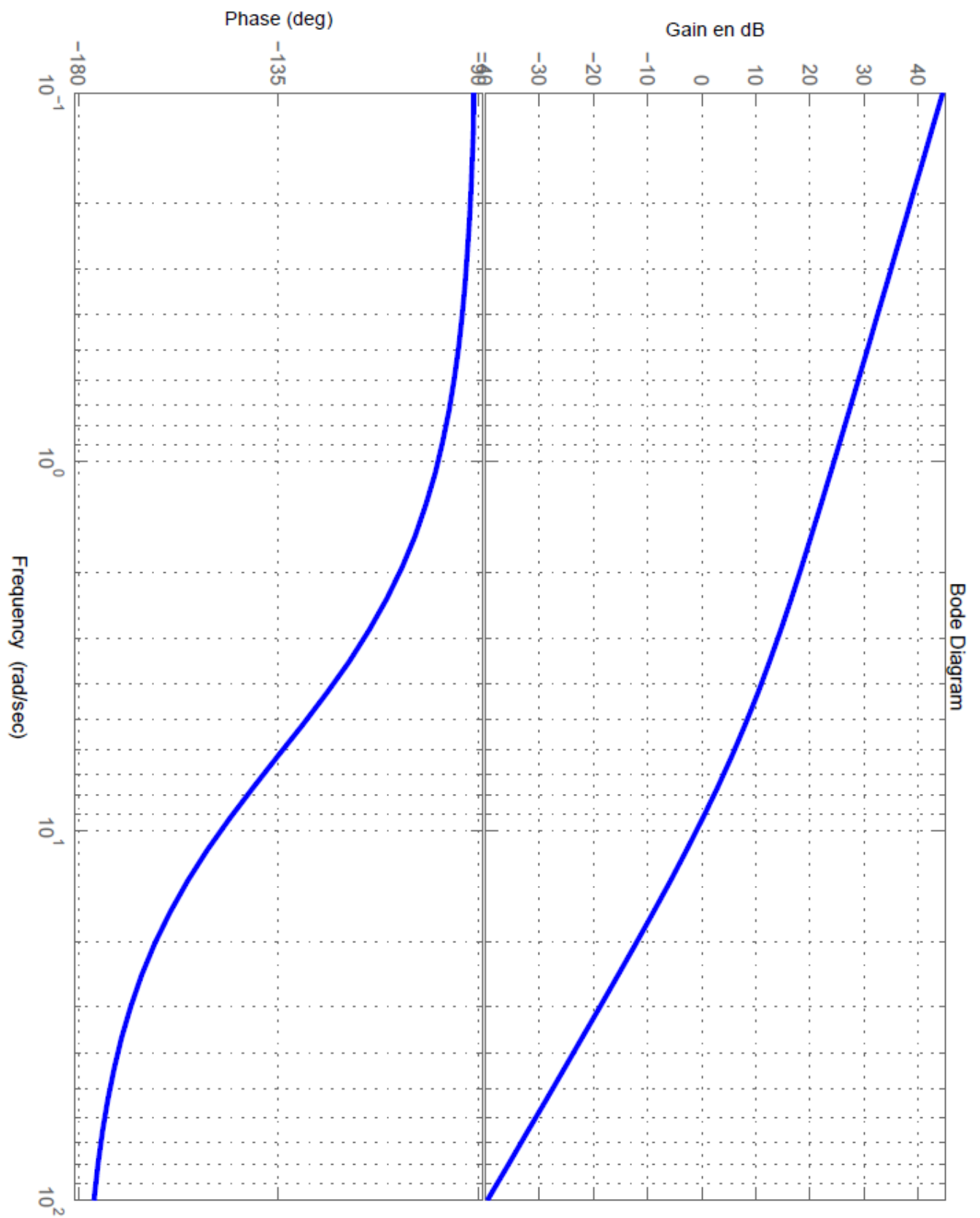


Figure 2 : réponse harmonique de  $Tl(p)$



### 5.3.7 Véhicule hybride Toyota Prius :

#### I Présentation :

Dans le contexte actuel d'économie des énergies fossiles et de réduction des émissions de gaz nocifs, le système de propulsion hybride constitue une alternative intéressante à la propulsion classique par moteur thermique seul car il permet de réduire la consommation.

La spécificité de la solution retenue sur la Prius consiste à :

- Récupérer l'énergie du véhicule lors du freinage,
- Exploiter le moteur thermique à son rendement optimal.



Photo 1

#### Architecture du système hybride HSD TOYOTA

Comme le montre le dessin la figure 1, la technologie hybride de TOYOTA, nommée HSD (Hybrid Synergy Drive) associe un moteur thermique à essence et sa transmission, à deux machines électriques et une batterie de puissance.

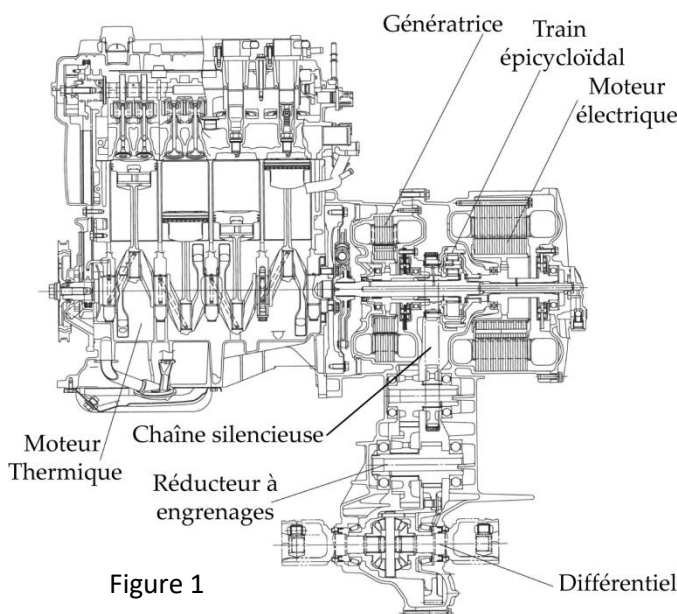
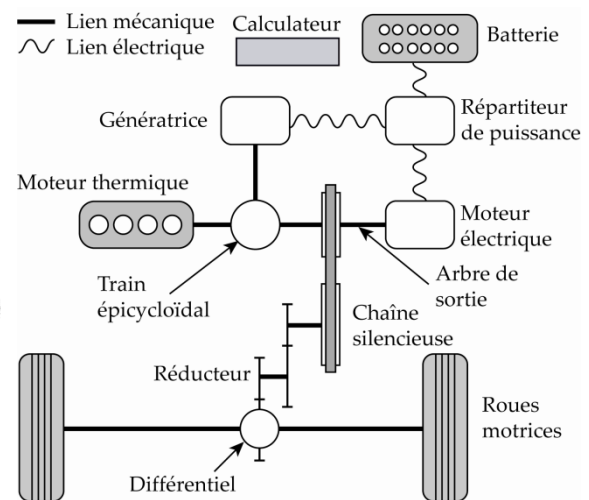


Figure 1



Le schéma de principe ci-contre et la figure 1 mettent en évidence les deux machines électriques (le moteur électrique et la génératrice) reliées au moteur thermique par un train épicycloïdal.

A partir de la position de la **pédale d'accélérateur** et de la vitesse du véhicule, le **calculateur** détermine la **vitesse de rotation optimale** du **moteur thermique** et la consigne d'**ouverture du papillon des gaz**. La puissance en sortie du moteur thermique est transmise, grâce à un **train épicycloïdal**, à la **chaîne silencieuse** et à la **génératrice**. Un **asservissement en vitesse** de la génératrice permet de contrôler la vitesse de rotation du moteur thermique.

Le **répartiteur de puissance** gère les échanges de puissance électrique entre la **génératrice**, le **moteur électrique** et la **batterie**.

**Le moteur électrique** entraîne la chaîne silencieuse, seul ou en complément du moteur thermique. Il récupère également l'énergie cinétique ou potentielle du véhicule lors des phases de ralentissement.

Les chaînes d'énergie et d'information, figure 2, permettent de percevoir l'organisation des différents composants du HSD. Les fonctions des capteurs relatifs à l'enfoncement de la pédale de frein, au sélecteur de marche et à la température de l'eau du moteur thermique seront développées ultérieurement.

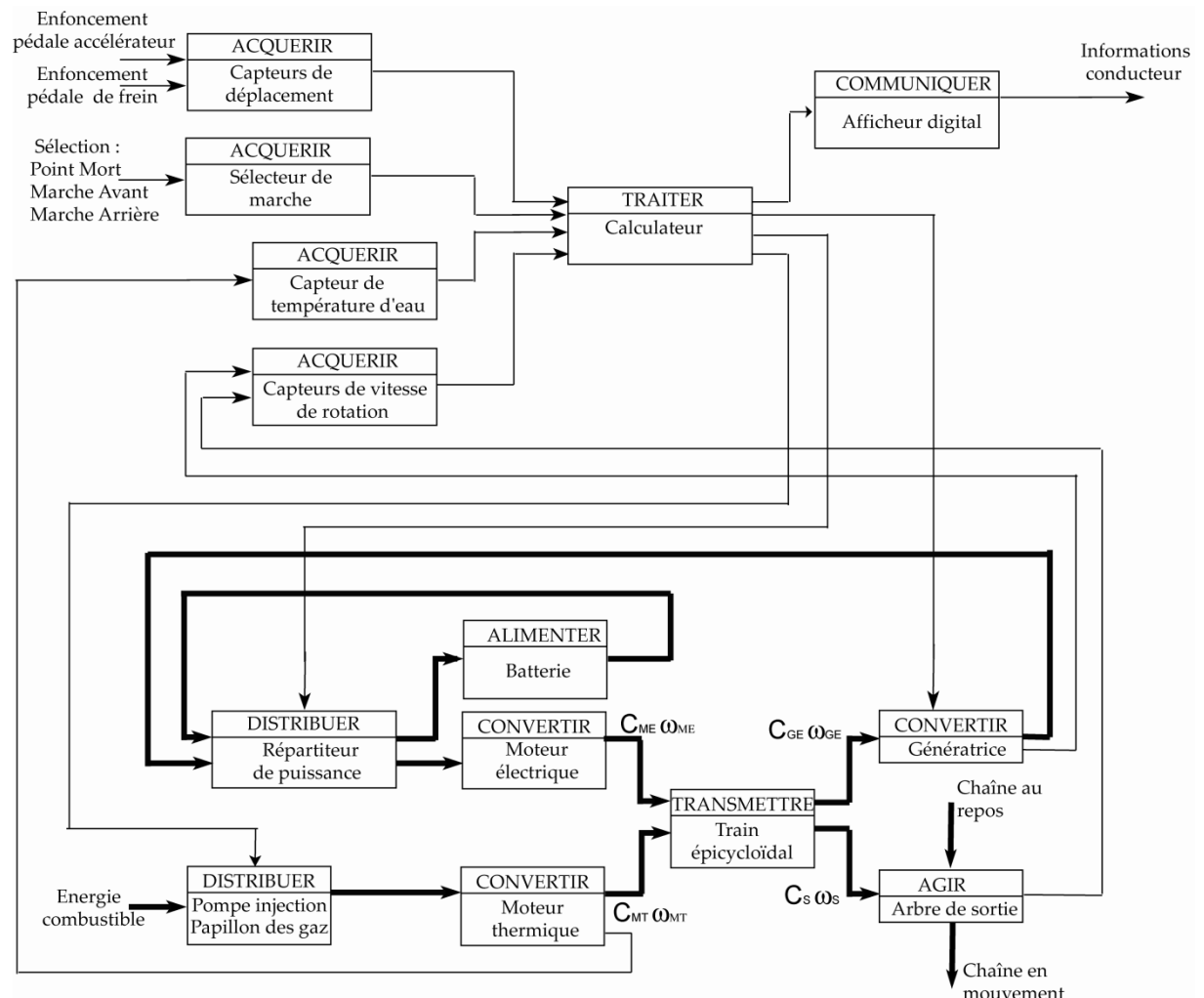


Figure 2 – Chaîne d'information (partie supérieure) et Chaîne d'énergie (partie inférieure)

Le Cahier des Charges, tableau 1, caractérise les fonctions de services du système HSD.

Fonctions de service	Critères	Niveaux
<b>FS1</b> : permettre au combustible d'entraîner le véhicule	Réduction de la consommation par rapport aux véhicules traditionnels comparables	40 %
	Consommation en cycle mixte	4,3 l pour 100 km
	Vitesse maximale	170 km/h
	Temps d'accélération de 0 à 100 km/h	10,9 s
	Temps d'accélération de 50 à 80 km/h	4,4 s
	Puissance maximale du système hybride	110 kW à 85 km/h
<b>FS2</b> : respecter l'environnement	Réduction des émissions nocives de CO <sub>2</sub>	40 % en dessous des normes européennes
<b>FS3</b> : être commandé par le conducteur	Positions du sélecteur Enfoncements des Pédales	PM/MA/MAR Accélérateur/frein
<b>FS4</b> : s'adapter à la vitesse du véhicule	Vitesse de passage du mode tout électrique au mode hybride (démarrage du moteur thermique)	50 km/h
<b>FS5</b> : alimenter en énergie les composants auxiliaires	Puissance maximale absorbée par les « consommateurs » d'énergie (climatisation, direction assistée, confort, ...)	4 kW maxi
<b>FS6</b> : récupérer l'énergie cinétique du véhicule en freinage	Pourcentage de l'énergie cinétique récupérable	70 %

Tableau 1

Remarque : la performance de consommation en cycle mixte est à comparer à une consommation de 7,7 l / 100 km pour un véhicule à essence classique aux caractéristiques comparables.

## II Travail demandé :

### **Contrôle de la vitesse du moteur thermique en fonctionnement hybride**

En mode hybride, la vitesse de rotation du moteur thermique est réglée afin de le faire fonctionner à son rendement maximum. Ce contrôle ne pouvant être réalisé au niveau du papillon des gaz, c'est un asservissement en vitesse de la génératrice qui permet de contrôler l'ensemble des autres vitesses de rotation.

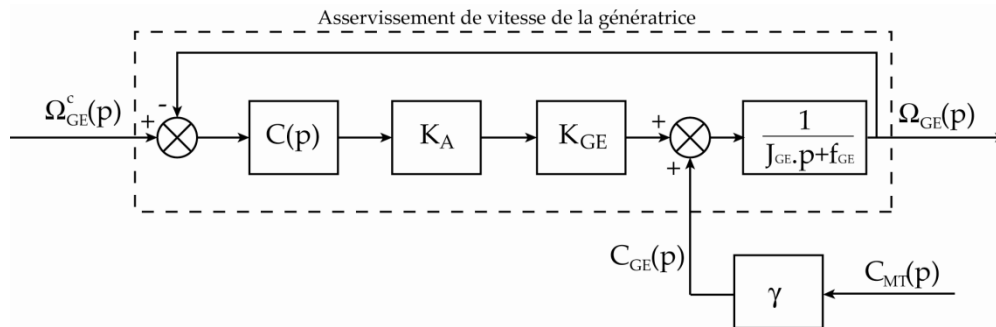
La consommation du véhicule est directement liée aux qualités de cet asservissement. Cette partie s'intéresse à la justification et au dimensionnement d'un correcteur approprié.

Les performances attendues de cet asservissement sont les suivantes :

Critères	Niveaux
<b>Précision</b>	Ecart en régime permanent :
	<ul style="list-style-type: none"> <li>nul vis à vis d'une commande en échelon du type <math>\omega_{GE}^C(t) = \omega_0 \cdot u(t)</math>, <math>\omega_0</math> constante, et <math>u(t)</math> la fonction échelon unité.</li> <li>nul vis à vis d'une perturbation constante du type <math>c_{MT}(t) = C_0 \cdot u(t)</math>, <math>C_0</math> constante</li> </ul>
<b>Rapidité</b>	Pulsation de coupure à 0dB de la FTBO : $\omega_{0dB} = 1.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
<b>Stabilité</b>	Marge de phase $M\varphi > 45^\circ$

Tableau 2

Un asservissement régule le courant dans la génératrice. Ainsi, les comportements mécanique et électrique de la génératrice se modélisent par le schéma bloc figure 4 où  $C_{MT}(p)$  est assimilé à une perturbation extérieure.



Avec :  $K_{GE} = 2 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$  ;  $K_A = 0.5 \text{ A} \cdot \text{V}^{-1}$  ;  $J_{GE} = 0.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  ;  $f_{GE} = 0.05 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$  et  $\gamma = 0.28$

Figure 4

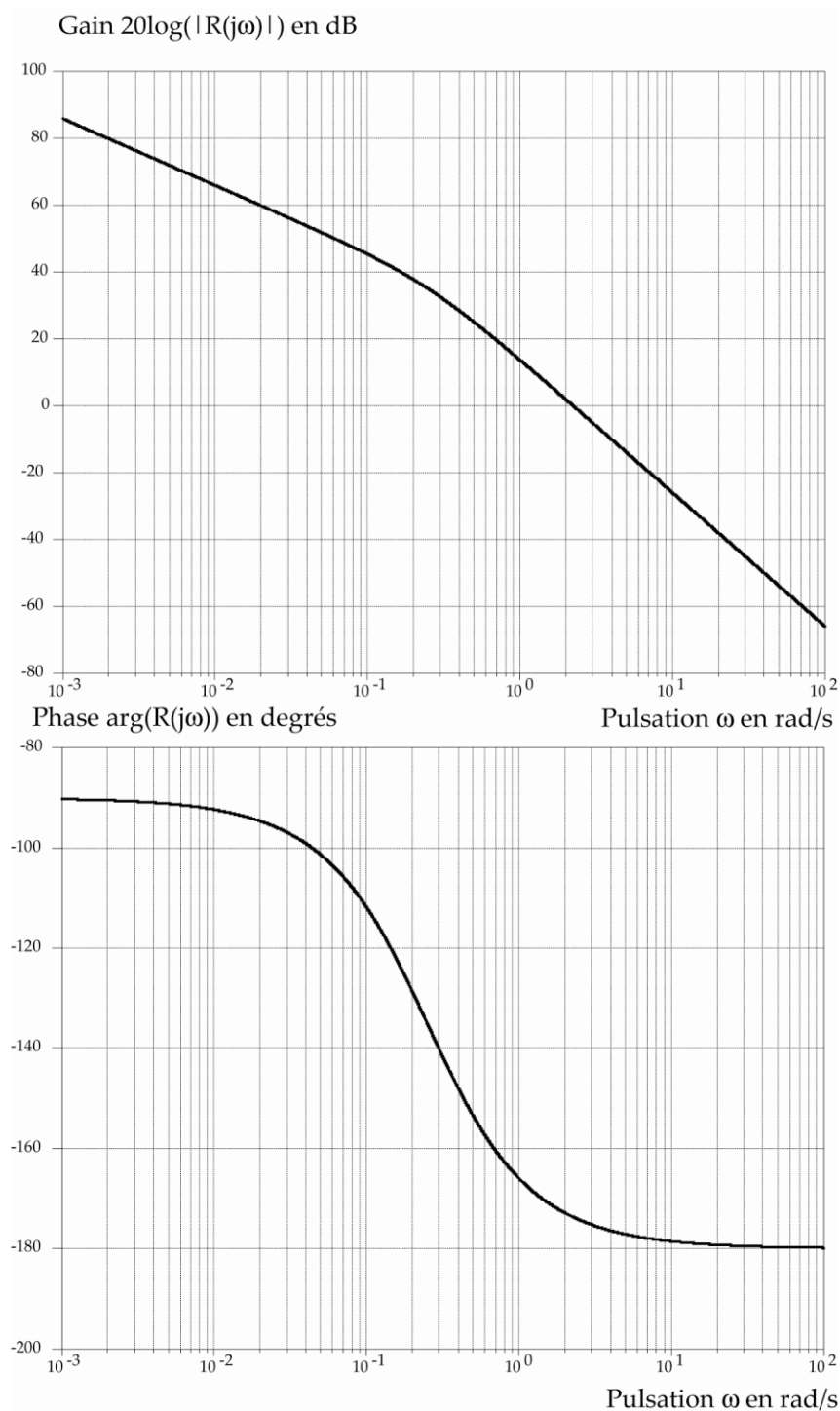
**Q1.** Déterminer l'expression de  $\Omega_{GE}(p)$  en fonction de  $\Omega_{GE}^c(p)$  et de  $C_{MT}(p)$

**Q2.** Expliquer pourquoi un asservissement avec correction unitaire ( $C(p)=I$ ) ne permet pas de satisfaire le cahier des charges (tableau 2).

### Correction intégrale

Le premier correcteur envisagé est un correcteur intégral, tel que  $C(p) = C_1(p) = \frac{K_i}{p}$ . Le

diagramme de Bode de la fonction  $R(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K_i \cdot K_A \cdot K_{GE}}{(J_{GE} \cdot p + f_{GE})}$  est fourni dans le document réponses ci-dessous.



**Q3.** Justifier que ce correcteur ne permet pas de satisfaire l'ensemble des critères du cahier des charges (tableau 2).

**Correction Intégrale associée à une correction à avance de phase**

La fonction de transfert du second correcteur envisagé est notée

$$C(p) = \frac{K_i}{p} \cdot \frac{1+T \cdot p}{1+a \cdot T \cdot p} = C_1(p) \cdot C_2(p) \text{ avec } a < 1 \text{ et } C_1(p) = \frac{K_i}{p} \text{ et } C_2(p) = \frac{1+T \cdot p}{1+a \cdot T \cdot p}$$

Le diagramme de Bode du correcteur  $C_2(p)$  est donné figure 5.

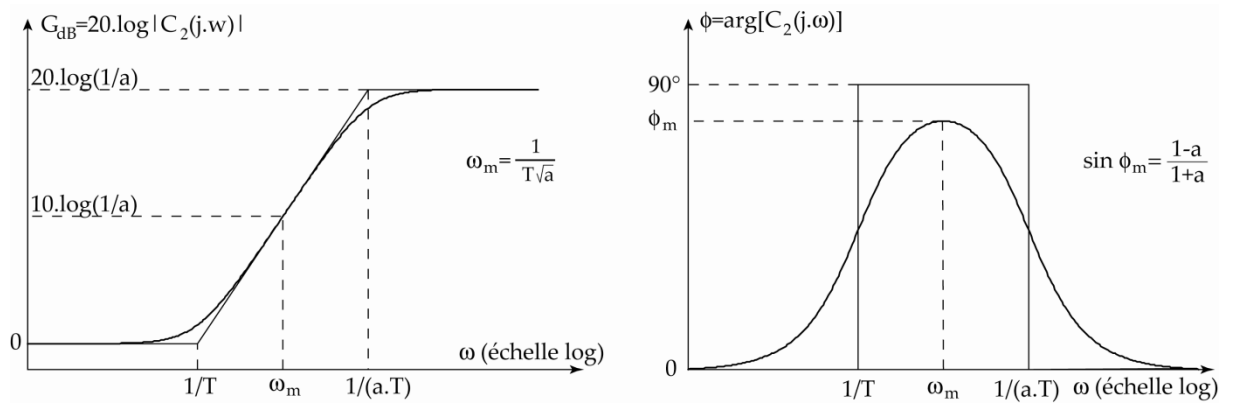


Figure 5

Afin d'apporter le maximum de marges de stabilité, on décide de placer  $\omega_m$  en  $\omega_{0dB}$

**Q4.** Déterminer  $\phi_m$  pour que la marge de phase soit effectivement de  $45^\circ$ . En déduire la valeur de  $a$  et de  $T$ . (On pourra se servir du diagramme de Bode de  $R(p)$  fourni ci-dessus)

**Q5.** Déterminer finalement  $K_i$  pour que la pulsation  $\omega_{0dB}$  soit effectivement la pulsation de coupure à 0 dB.

**Q6.** Que pensez vous de la marge de gain du système ?

**Q7.** Conclure sur les capacités du correcteur à satisfaire l'ensemble des critères du cahier des charges (tableau 2).

### 5.3.5 Positionnement d'une antenne de satellite :

Annexe 1

Q3. Tracé de la FTBO pour  $K_P=1$

