

5₁ Etude fréquentielle

Connaissances B1	Savoir-faire
Caractéristiques des grandeurs physiques : <ul style="list-style-type: none">• caractéristiques fréquentielles	Décrire l'évolution des grandeurs

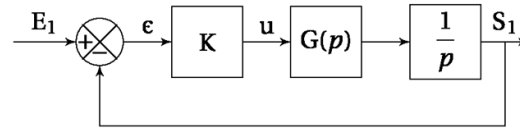
Sommaire

5.1.1: Etude d'un système bouclé :	2
I Présentation :	2
II Travail demandé :	2
5.1.2 Généralisation des tracés asymptotiques :	4
5.1.3 Suspension automobile :	4
I Présentation :	4
II Travail demandé :	5
1 Modélisation de la suspension :	5
2 Réponses temporelles de la suspension :	6
2.1 Réponse indicielle	6
2.2 Réponse impulsionnelle	6
3 Réponse fréquentielle de la suspension :	6
Document réponse DR1	8
5.1.4 Bras de robot à muscles artificiels :	9
1 Présentation du système	9
2 Modélisation du système	10
3 Choix d'un correcteur proportionnel	11
Documents réponse	13
DR1	13
DR2	13
DR3	14
DR4	14
DR5	15

5.1.1: Etude d'un système bouclé :

I Présentation :

Soit un système décrit par le schéma bloc ci-dessous :



Un relevé fréquentiel du mécanisme a permis de préciser la fonction $G(p)$ (tableau ci-dessous).

Pulsation [rad.s ⁻¹]	0.10	0.18	0.32	0.56	1.00	1.78	3.16
$G_G(\omega)$ [dB]	-6.0	-6.0	-5.8	-5.4	-4.2	-1.2	-11.0
ϕ_G [°]	-1.7	-3.1	-5.6	-10.4	21.8	-68.6	-147.7
$G(j, \omega)$ [dB] <i>intégrateur</i>							
$G_{FTBO}(\omega)$							
ϕ_{FTBO} [°]							

Pulsation [rad.s ⁻¹]	5.62	10.00	17.78	31.62	50.30	80.00
$G_G(\omega)$ [dB]	-23.1	-33.7	-43.9	-54.0	-62.0	-70.1
ϕ_G [°]	-166.3	-172.9	-176.1	-177.8	-178.6	-179.1
$G(j, \omega)$ [dB] <i>intégrateur</i>						
$G_{FTBO}(\omega)$						
ϕ_{FTBO} [°]						

Relevé fréquentiel de $G(p)$

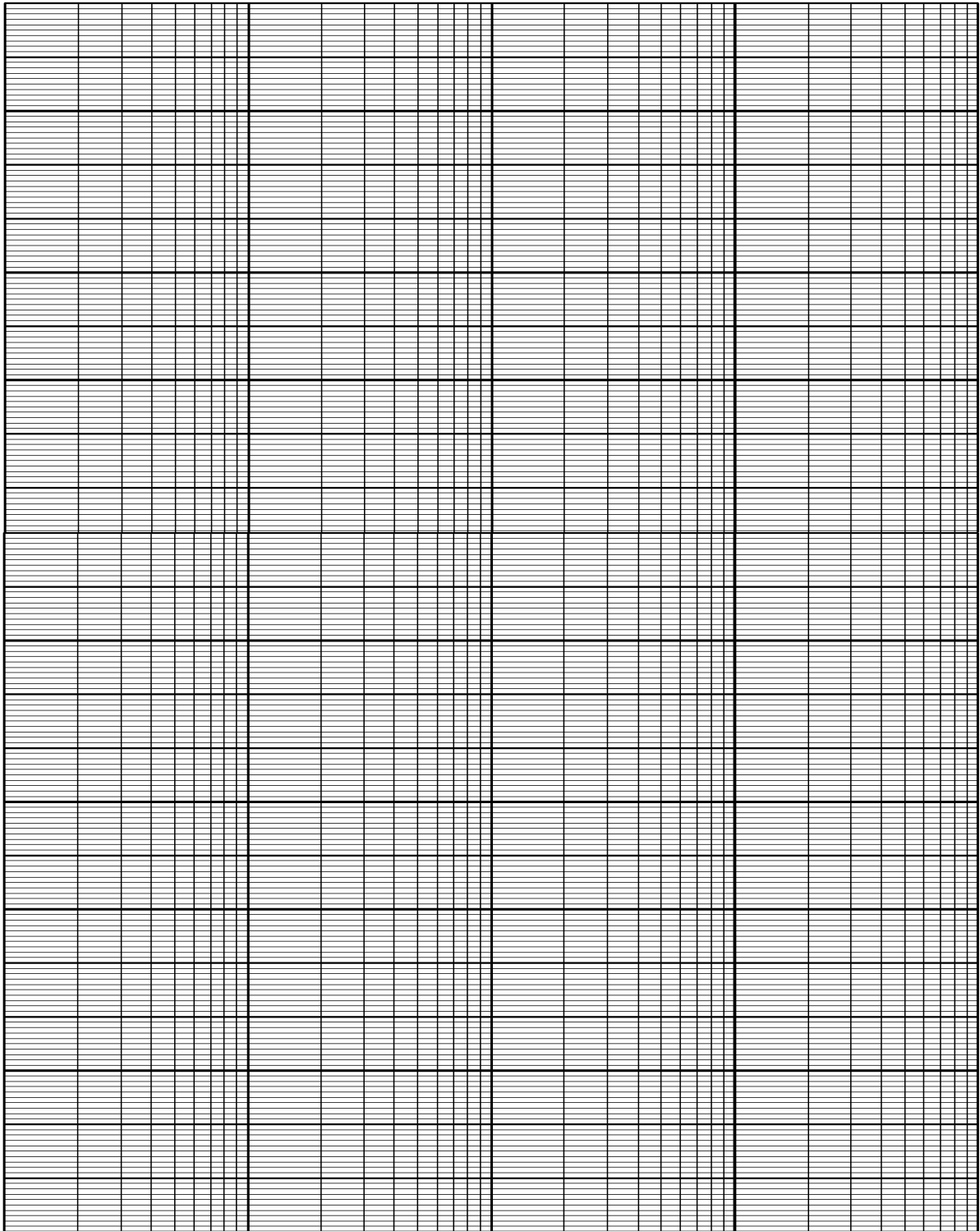
II Travail demandé :

Q1. Tracer les diagrammes de Bode de $G(p)$.

Q2. A partir de ces tracés déterminer l'ordre et les paramètres caractéristiques de $G(p)$.

Q3. Sur ces mêmes diagrammes, tracer les diagrammes de $\frac{1}{p}$ puis les diagrammes de Bode de la

$FTBO$ pour $K = 1$.



5.1.2 Généralisation des tracés asymptotiques :

Pour les fonctions transferts ci-dessous faites une étude permettant de tracer les diagrammes asymptotiques de gain et de phase.

$$H_0(p) = 3 + \frac{3}{p} + \frac{0.3}{p^2}$$

$$H_1(p) = \frac{50}{1 + 1.11 \cdot p + 0.01 \cdot p^2}$$

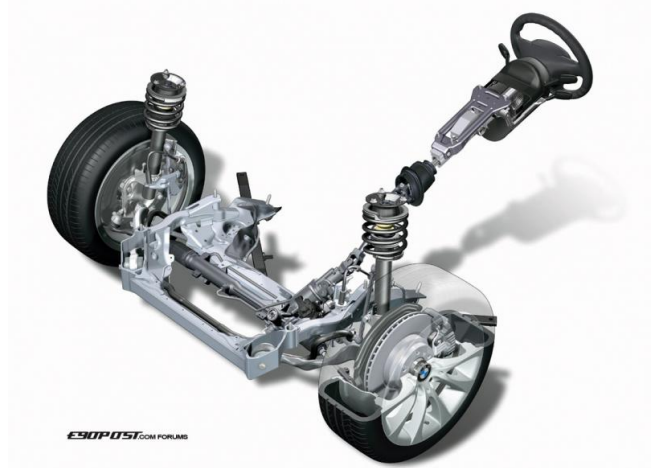
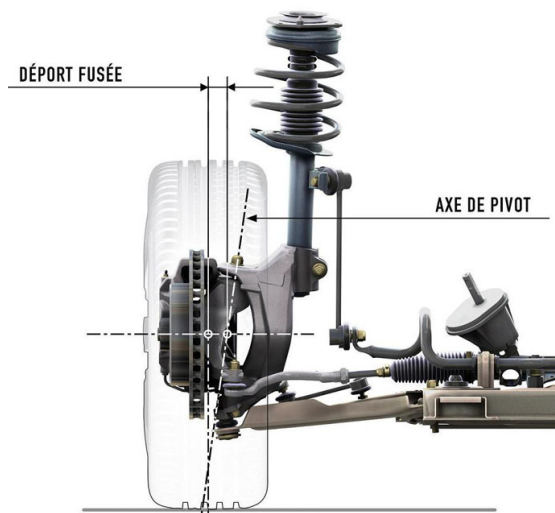
$$H_2(p) = \frac{1 + 5 \cdot p}{p^2 \cdot (1 + 0.25 \cdot p)^2}$$

$$H_3(p) = \frac{p \cdot (1 + 0.25 \cdot p)^2}{p^2 \cdot (1 + 1.11 \cdot p + 0.01 \cdot p^2)}$$

5.1.3 Suspension automobile :

I Présentation :

Il s'agit de déterminer le déplacement vertical $z(t)$ du châssis du véhicule par rapport au référentiel galiléen lié à la route en fonction du déplacement vertical $z_r(t)$ de l'axe de la roue par rapport à ce même référentiel correspondant au passage du véhicule sur un sol accidenté.

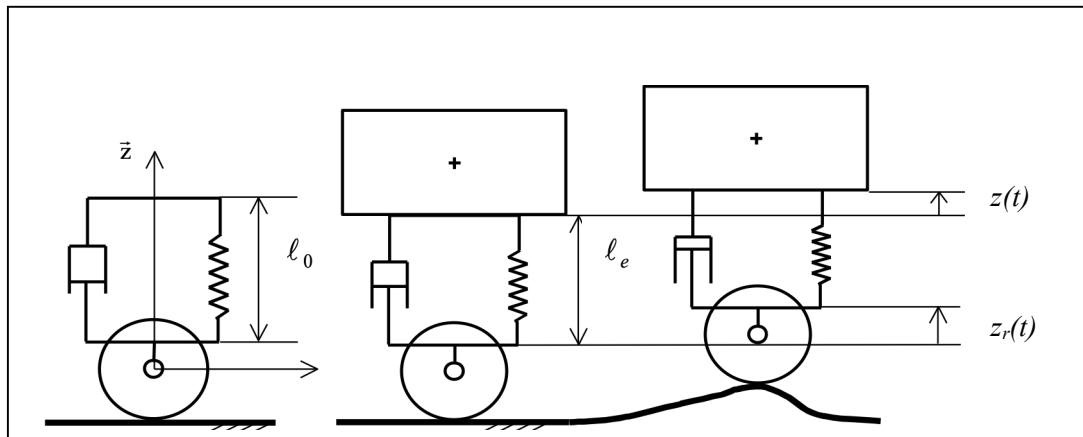


Pour appréhender le fonctionnement de la suspension, on propose ici une modélisation et on envisage la réponse $z(t)$ à des déplacements $z_r(t)$ particuliers imposés.

On appelle f le coefficient de frottement visqueux de l'amortisseur et k est le coefficient de raideur du ressort.

La force de pesanteur appliquée au quart de châssis est d'intensité $M \cdot g$, $4 \cdot M$ représente alors la masse suspendue du véhicule. On suppose que chaque roue « supporte » le même poids.

On donne $M=250Kg$



Modèle quart de véhicule

II Travail demandé :

1 Modélisation de la suspension :

Q1. Appliquer le théorème de la résultante dynamique à la masse suspendue M en équilibre dans le référentiel galiléen considéré.

Q2. Appliquer le théorème de la résultante dynamique à la masse suspendue M en mouvement dans le référentiel galiléen considéré et expliciter l'équation ci-dessous :

$$-k \cdot (z(t) - z_r(t) + \ell_e - \ell_0) - f \cdot \frac{d(z(t) - z_r(t))}{dt} - M \cdot g = M \cdot \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \quad (2)$$

Q3. En déduire l'équation différentielle liant $z_r(t)$ et $z(t)$ en commentant les actions à mener.

Q4. En déduire la fonction de transfert de la suspension $H(p) = \frac{Z(p)}{Z_r(p)}$ en fonction de k, f, M et la variable de Laplace p . On précisera les hypothèses nécessaires sur les conditions initiales de la suspension.

Exprimer, en fonction de k, f, M , les paramètres K, τ, a et ω_n correspondant à la forme canonique de $H(p)$ donnée ci-dessous :

$$H(p) = \frac{Z(p)}{Z_r(p)} = K \frac{1 + \tau \cdot p}{1 + \frac{2 \cdot a}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}$$

Pour la suite on retiendra : $K = 1$; $\tau = 0,1 \text{ s}$; $\omega_n = 7,071 \text{ rad.s}^{-1}$; $a = 0,141$

2 Réponses temporelles de la suspension :

2.1 Réponse indicielle

On désire caractériser le comportement de la suspension lors du franchissement d'un trottoir de hauteur $z_0 = 0,2 \text{ m}$. L'entrée correspondante est modélisée par un échelon $z_r(t) = z_0 \cdot u(t)$ d'amplitude z_0 .

Q5. Exprimer $Z(p)$ transformée de Laplace de la réponse de la suspension lors de ce franchissement.

Q6. Par application du théorème de la valeur finale, déterminer $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$. Ce résultat vous semble-t-il cohérent ? Justifier.

Q7. A partir des valeurs K , τ , a et ω_n donner l'allure de la réponse ; pente à l'origine, valeur finale, période des éventuelles oscillations, $t_{5\%}$, le dépassement %.

On considérera, pour les trois derniers calculs que l'apport du premier ordre est négligeable donc que le numérateur de $H(p)$ sera égal à l'unité.

2.2 Réponse impulsionnelle

On désire caractériser le comportement de la suspension lors du franchissement d'un ralentisseur de hauteur $z_0 = 0,1 \text{ m}$ à haute vitesse. L'entrée correspondante est modélisée par une impulsion de Dirac $z_r(t) = z_0 \cdot \delta(t)$ d'amplitude z_0 .

Q8 Exprimer $Z(p)$ transformée de Laplace de la réponse de la suspension lors de ce franchissement. Déterminer $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$. Ce résultat vous semble-t-il cohérent ? Justifier.

3 Réponse fréquentielle de la suspension :

On désire caractériser le comportement de la suspension lors du passage sur une route bosselée. L'entrée correspondante est modélisée par une fonction sinusoïdale $z_r(t) = z_0 \cdot \sin \omega \cdot t$ avec $z_0 = 0,1 \text{ m}$.

La pulsation ω de cette fonction sinusoïdale du temps dépend de la vitesse de passage du véhicule V et de la longueur d'onde en mètres du profil de la route λ .

Q9. Calculer $|H(j\omega)|$ et $\arg(H(j\omega))$.

Q10. En déduire l'expression de la réponse en régime permanent de la suspension $z(t)$ en fonction de K , τ , a et ω_n .

Q11. Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode de $H(j\omega)$ sur le document réponse DR1.

Q12. Démontrer que :

$$\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = \frac{\sqrt{1+\tau^2\omega^2} \cdot \omega \cdot \left(\frac{\tau^2}{1+\tau^2\omega^2} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4 \cdot a^2}{\omega_n^2} \omega^2 \right] - \frac{2}{\omega_n^2} \cdot \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + \frac{4 \cdot a^2}{\omega_n^2} \right)}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2a \cdot \omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Q13. Déterminer que le maximum de $|H(j\omega)|$ est atteint pour la pulsation de résonance :

$$\omega_r = \frac{\sqrt{\sqrt{1 + \left(\tau^4 \cdot \omega_n^4 + 2 \cdot \tau^2 \cdot \omega_n^2 (1 - 2 \cdot a^2)\right)} - 1}}{\tau}.$$

On désire assurer, pour le confort des occupants du véhicule, une pulsation ω_r de résonance correspondant à une fréquence d'oscillation de la caisse de 1Hz ¹. On peut pour cela modifier la valeur du coefficient de frottement visqueux de l'amortisseur.

Q14. Déterminer la valeur de f correspondante.

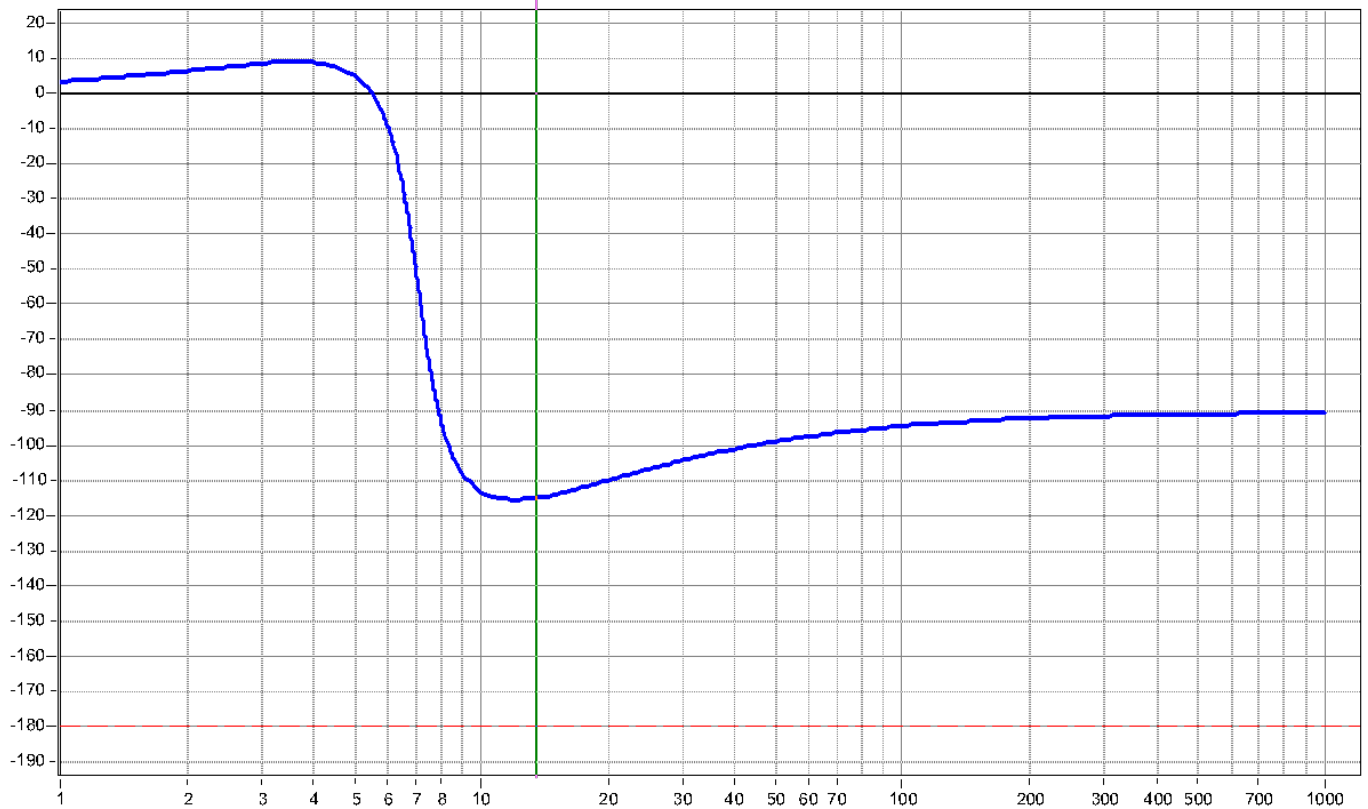
¹ suspension molle, $f=1,5\text{ Hz}$ suspension dure

Document réponse DR1

[dB] **Amplitude**



[°] **Phase**



5.1.4 Bras de robot à muscles artificiels :

1 Présentation du système

L'étude proposée concerne un manipulateur à muscles artificiels développé par des chercheurs. Ce dernier, représenté sur la Figure 1, est un manipulateur à structure anthropomorphe à 7 degrés de liberté activés par des paires de muscles artificiels montés en opposition.

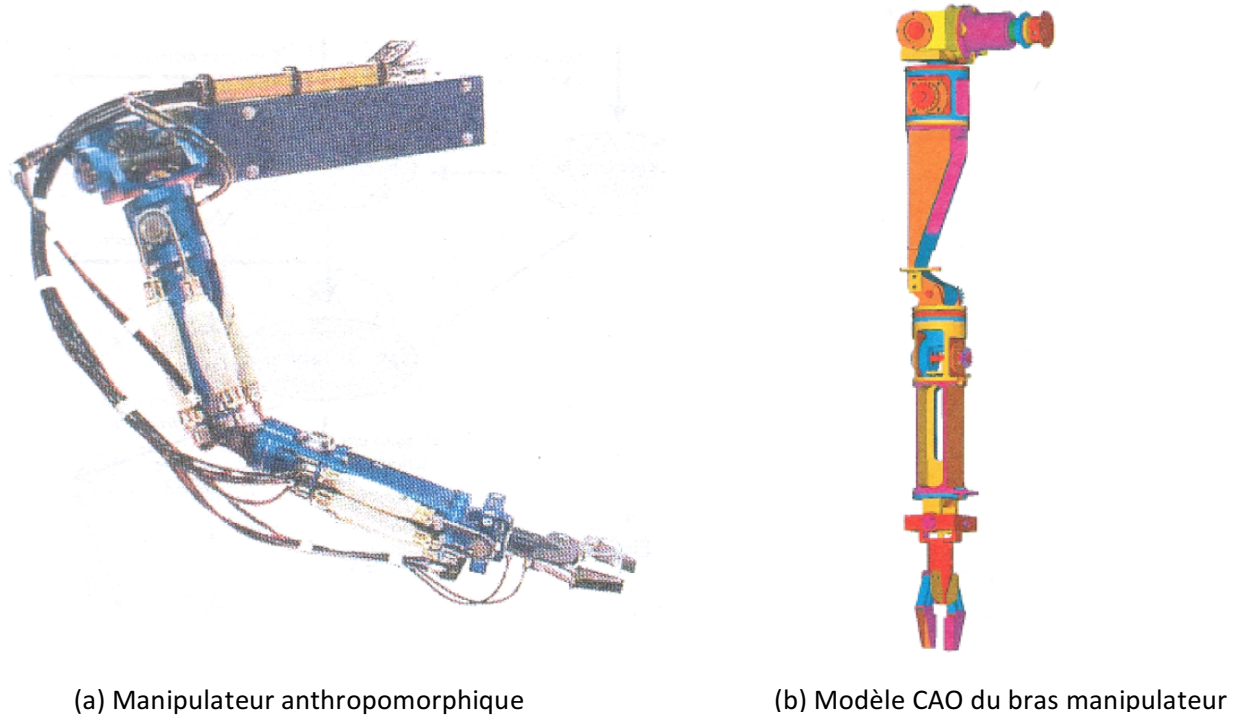


Figure 1 – Bras manipulateur à muscles artificiels

Un muscle artificiel est constitué d'une vessie en caoutchouc emprisonnée dans une tresse de fils. L'angle d'inclinaison de cette tresse permet de convertir le gonflement de la vessie, sous l'effet de la pression qui lui est imposée, en effort de traction.

La modulation de la pression, réalisée à partir d'une tension de commande U , permet alors de faire varier l'effort de traction. En associant deux muscles en opposition, on peut ainsi activer une articulation (créer un mouvement de rotation du bras), comme indiqué sur la Figure 3.

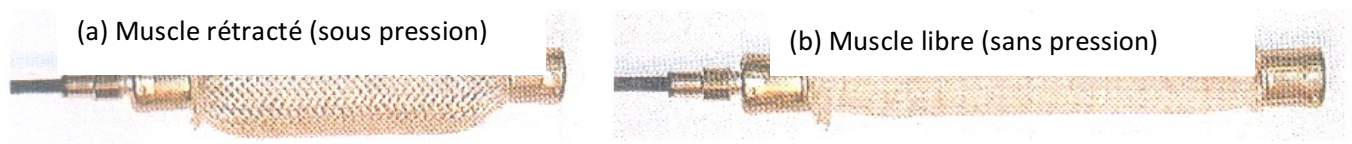


Figure 2 – Muscle artificiel

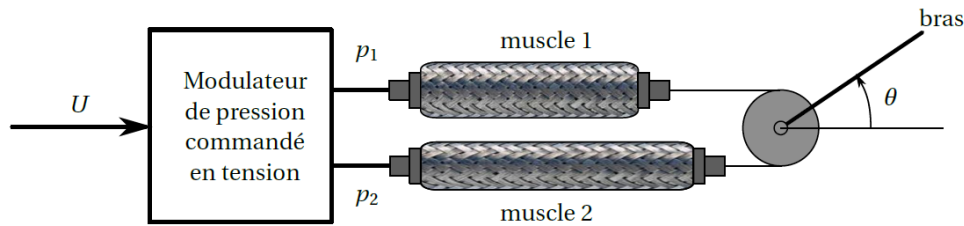


Figure 3 – Montage en opposition des muscles

2 Modélisation du système

Q1. En s'aidant du schéma de la Figure 3 et du fonctionnement d'un muscle artificiel (en supposant le bras libre), montrer que le bras tourne grâce à la différence de pressions $p_1 - p_2$ (p_1 pression dans le muscle 1 et p_2 pression dans le muscle 2) (on donnera notamment le sens de rotation en fonction du signe de $p_1 - p_2$).

Le comportement du bras est régi, autour d'un point de fonctionnement, par les équations suivantes :

$$C_m(t) - C_{ext}(t) = I_e \cdot \ddot{\theta}(t) \quad (1)$$

avec $I_e = 0.5 \text{ kg.m}^2$.

$$C_m(t) = K_4 \cdot (p_1(t) - p_2(t)) - K_5 \cdot \theta(t) - K_7 \cdot \dot{\theta}(t) \quad (2)$$

avec $K_4 = 4 \text{ N.m.bar}^{-1}$; $K_5 = 5 \text{ N.m.rad}^{-1}$ et $K_7 = 0.8 \text{ N.m.rad}^{-1}.s$

- $C_m(t)$ est le couple exercé par les muscles sur le bras,
- $C_{ext}(t)$ un couple extérieur agissant également sur le bras.
- $p_1(t)$ et $p_2(t)$ sont les pressions dans les deux muscles.
- $\theta(t)$ est l'angle de rotation du bras ($\dot{\theta}(t)$ est la dérivée première de $\theta(t)$, $\ddot{\theta}(t)$ la dérivée seconde).

On notera $P_1(p)$, $P_2(p)$, $C_m(p)$, $C_{ext}(p)$ et $\Theta(p)$ les transformées de Laplace des différentes variables. On écrit la relation entre $\Theta(p)$ et les couples $C_m(p)$ et $C_{ext}(p)$ sous la forme suivante :

$$\Theta(p) = H_b(p) \cdot ((P_1(p) - P_2(p)) \cdot H_m(p) - C_{ext}(p))$$

Le modulateur de pression est caractérisé par sa fonction de transfert $H_M(p) = \frac{P_1(p) - P_2(p)}{U(p)}$.

La tension de commande $U(p)$ est élaborée par un correcteur de fonction de transfert $H_c(p)$ à partir de l'écart ε entre l'angle de consigne $\Theta_c(p)$ et l'angle réel $\Theta(p)$.

Q2. Compléter le schéma-blocs du DR1 en renseignant les fonctions de transfert des différents blocs et en indiquant le nom des composants.

Q3. Passer les équations (1) et (2) dans le domaine de Laplace. (CI nulles)

Q4. En déduire l'expression des fonctions de transfert $H_m(p)$ et $H_b(p)$.

On donne les diagrammes de Bode du modulateur dans le DR2. On travaille dans la bande de pulsations $\omega \in [0; 25 \text{ rad.s}^{-1}]$.

Q5. Donner un argument qui justifie que le modulateur peut être modélisé par une fonction de transfert du premier ordre $H_M(p) = \frac{K_M}{1 + T_M \cdot p}$ dans cette bande de pulsations uniquement.

Q6. Identifier les valeurs numériques de K_M et T_M à partir de ces diagrammes, en détaillant la méthode d'identification et en précisant les unités.

3 Choix d'un correcteur proportionnel

On prend pour le moment un correcteur proportionnel de fonction de transfert $H_c(p) = K$ avec K constante positive. On considère que $C_{ext} = 0$.

Q7. Déterminer la FTBO du système et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$H_{BO}(p) = \frac{K_{BO}}{(1 + T_M \cdot p) \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot a}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$$

où on donnera les valeurs de K_{BO} , a et ω_0 en fonction de K , K_4 , K_5 , K_7 , K_M et I_e .

Dans la suite, on prendra l'expression sous la forme : $H_{BO}(p) = \frac{0.2 \cdot K}{(1 + 0.06 \cdot p) \cdot (1 + 0.158 \cdot p + 0.1 \cdot p^2)}$

Q8. En déduire les valeurs numériques de a et ω_0 . Quel phénomène apparaîtra sur le diagramme de gain compte tenu de ces valeurs ? Justifier.

Q9. Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode dans le cas où $K = 1$ sur le DR3.

Q10. Donner l'allure des courbes réelles sur le DR3. On utilisera le tableau 1 (ci-après) qui fournit les valeurs exactes du gain et de la phase pour différentes pulsations, de façon à être précis dans le tracé réel.

Pour analyser la stabilité du système, on regarde dans un premier temps si le gain en décibel $G[dB]$ est négatif pour une phase de -180° . On en déduit alors la marge de gain $MG = 0 - G[dB]$. **Q11.** En utilisant le diagramme de Bode réel de la FTBO, indiquer si le système vérifie ce premier critère en donnant la marge de gain MG .

On définit également la pulsation ω_{odB} pour laquelle le gain $G_{dB} = 0 \text{ dB}$. On dit que le système est stable si la phase pour cette pulsation particulière est supérieure à -180° .

Pulsation $[rad.s^{-1}]$	Amplitude $[dB]$	Phase (degré)
1	-13.2150	-13.51420
2	-10.6917	-34.91530
3.6	-10.4036	-129.3868
4	-13.0853	-146.6481
6	-23.3632	-179.5332
8	-29.7651	-192.3059
10	-34.5348	-200.8832
20	-49.7037	-225.5037
30	-59.2635	-237.8553

Table 1 – Valeurs exactes pour le gain et la phase

(Pour un gain $K = 1$, on constate que le système vérifie bien ce deuxième critère car il n'y a pas de pulsation de coupure à 0 dB ; le système est donc toujours stable).

Pour avoir un système correctement réglé (rapide et stable), on recherche à avoir une phase pour la pulsation de coupure à 0 dB égale à -135° (on dit alors que la marge de phase est de 45°).

Q12. Comment est modifié le diagramme de Bode lorsque K augmente ?

Q13. Donner graphiquement la valeur de K que l'on doit prendre pour que le système soit correctement réglé (phase de -135° pour la pulsation ω_{odB}).

On cherche maintenant à vérifier quelle est la précision du système en fonction de la valeur de K .

On applique un échelon de consigne $\theta_c(t) = \theta_0 \cdot u(t)$ avec $\theta_0 = 1 \text{ rad}$.

Q14. Déterminer l'erreur statique $\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\theta_c(t) - \theta(t))$ en fonction de K . Conclure sur la précision du système en fonction de K .

Q15 On donne la réponse indicielle du système pour l'échelon de consigne de 1 rad et une valeur de $K = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ dans le DR4. Confirmer le résultat de la question précédente.

On choisit maintenant d'utiliser un correcteur proportionnel intégral de fonction de transfert

$H_c(p) = K \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$ avec $T_i = 1.43 \text{ s}$ et $K = 3.5 \text{ V.rad}^{-1}$. On donne les diagrammes de Bode réels de la

nouvelle FTBO sur le DR5.

Q16. Justifier l'allure de ces diagrammes en traçant le diagramme de Bode asymptotique.

Q17. Montrer que le système est bien réglé en termes de marge de phase et de marge de gain.

Q18. Montrer également que le système est précis.

On cherche maintenant à vérifier que le système est toujours performant même en présence d'une perturbation $C_{ext}(t)$.

Q19. En utilisant le schéma-blocs, écrire l'angle du bras sous la forme $\Theta_c(p) = A_1(p) \cdot \Theta_c(p) - A_2(p) \cdot C_{ext}(p)$ où l'on exprimera $A_1(p)$ et $A_2(p)$ à l'aide des fonctions de transfert $H_c(p)$, $H_M(p)$, $H_m(p)$ et $H_b(p)$.

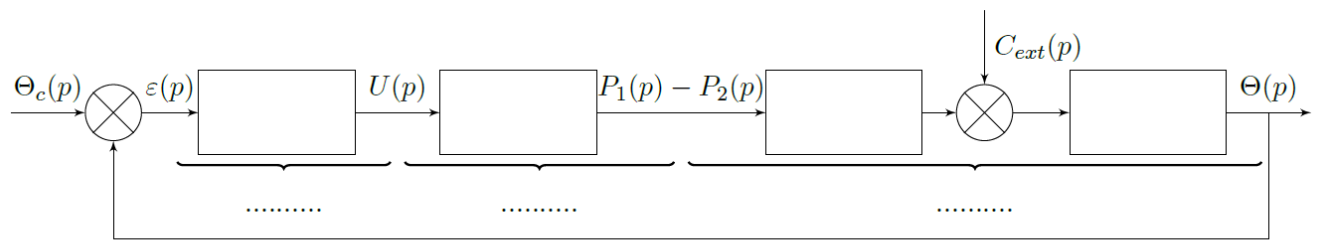
On peut montrer que le système est stable quelle que soit la perturbation (les fonctions de transfert ont le même dénominateur).

On cherche finalement à vérifier qu'une perturbation en échelon $C_{ext}(t) = C_0 \cdot u(t)$ ne modifie pas l'angle du bras. On suppose que celui-ci est nul (on a également $\theta_c(t) = 0$).

Q20. Calculer la valeur de $\theta(t)$ en régime permanent après application du couple $C_{ext}(t)$ pour le correcteur proportionnel intégral retenu. Conclure sur les performances du système.

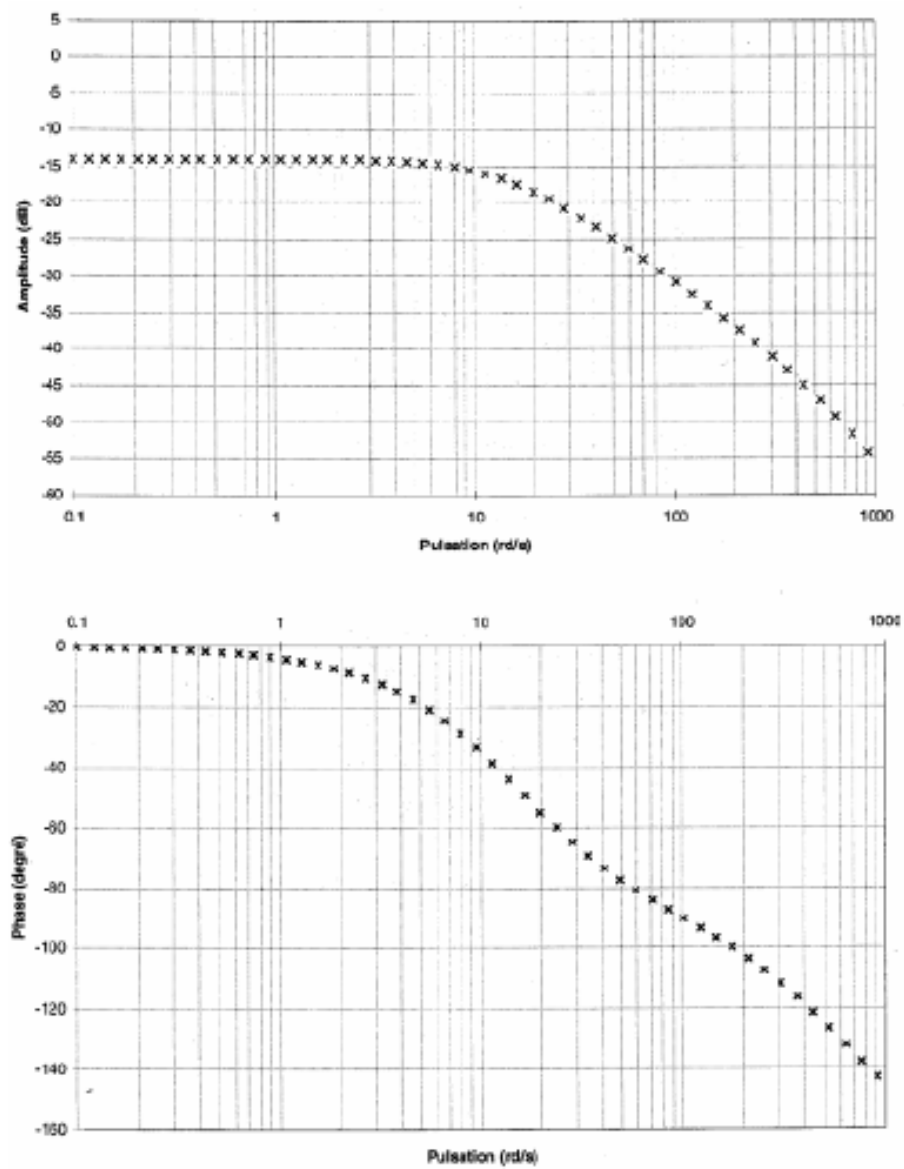
Documents réponse

DR1



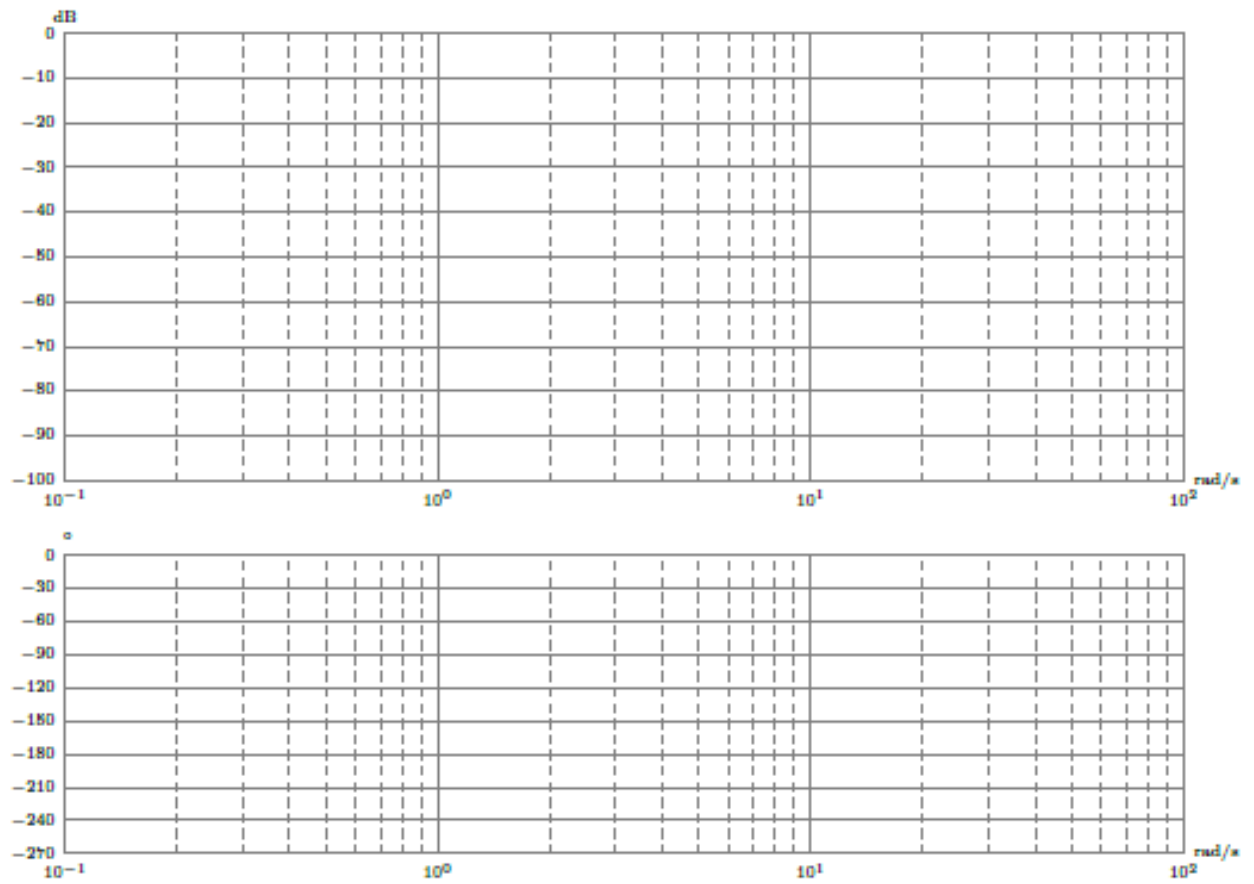
DR 1 – Schéma-blocs du bras à compléter.

DR2



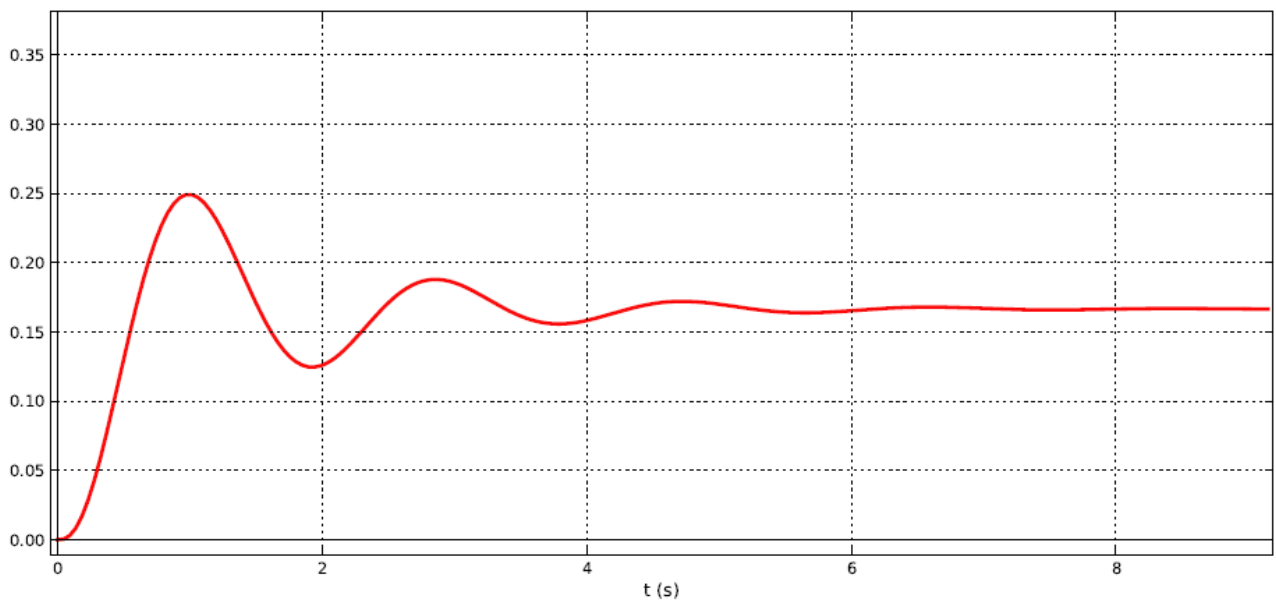
DR 2 – Diagramme de Bode du modulateur.

DR3



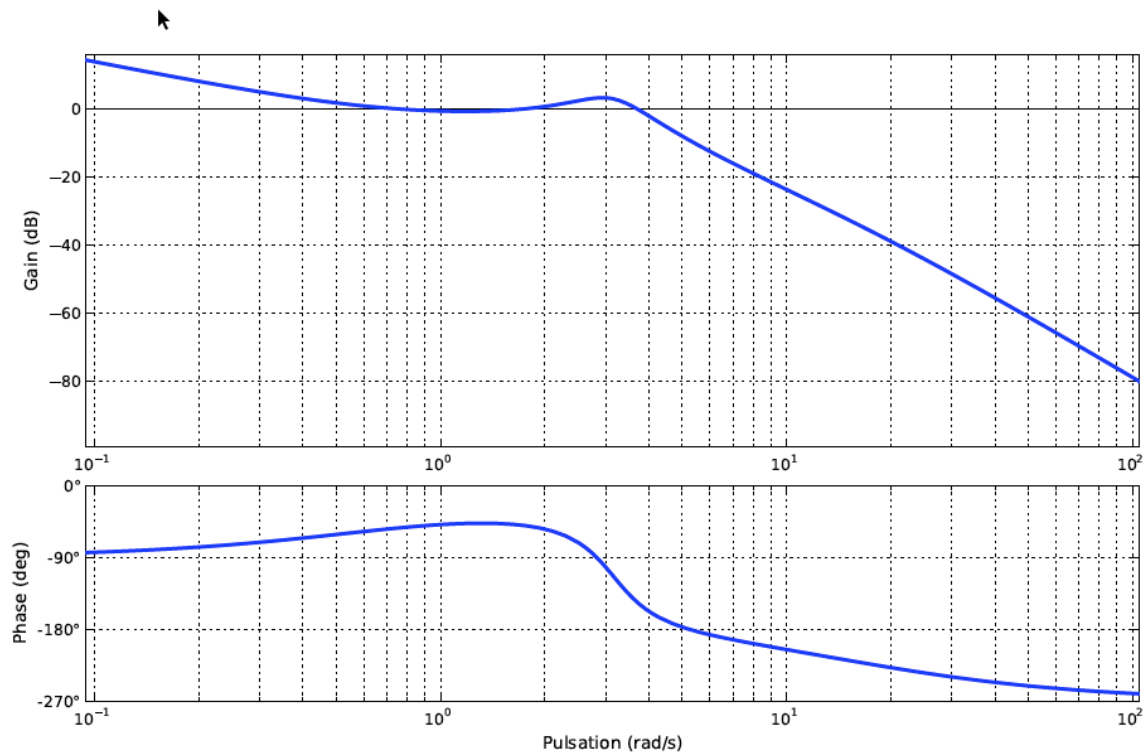
DR 3 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte.

DR4



DR 4 – Réponse indicielle avec correction proportionnelle.

DR5



DR 5 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec correction intégrale.