5.4 Correction numérique des systèmes asservis

Sommaire

1 Systèmes discrets (introduction à l'asservissement numérique)

1.1 Principe de l'asservissement numérique

Afin de mettre en œuvre les asservissements en milieu industriel, l'usage d'outils informatiques comme organes de contrôle des processus asservis est essentiel. C'est le cas par exemple des ordinateurs ou des microcontrôleurs qui peuvent assumer des fonctions de calculateurs numériques. Mais de tels instruments sont à base de composants électroniques (microprocesseurs, mémoires, ...) et fonctionnent avec des signaux binaires, porteurs d'informations numériques, on parle alors de signaux numériques. Se pose alors un problème fondamental, à savoir qu'un outil numérique ne peut s'accommoder de signaux analogiques, pourtant quasi exclusifs dans la majorité des systèmes physiques. En effet, le mode de traitement des informations imposé par un calculateur est de nature numérique et cadencé dans le temps de façon périodique grâce à une horloge. Le temps et l'amplitude du signal sont donc des grandeurs discrètes.

1.2 Les différents types de signaux :

Il est important de distinguer les différents types de signaux que l'on peut rencontrer dans la chaîne d'information/commande d'un système (Figure 1) :

- Signal analogique ;
- Signal échantillonné ;
- Signal numérique ;
- Signal quantifié.

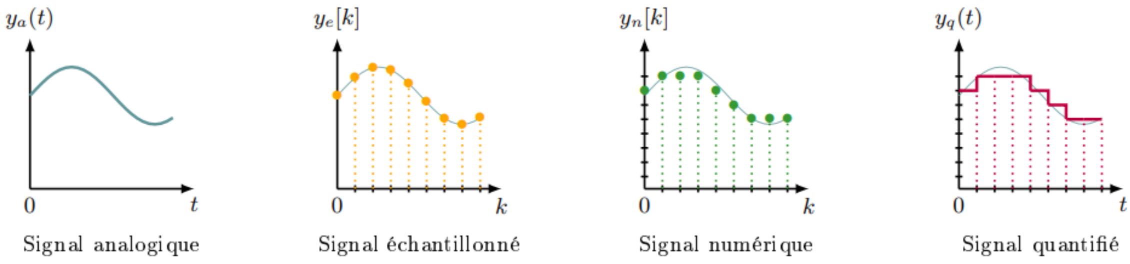


Figure 1 : Différents type de signaux

- <u>Un signal analogique</u> est une image continue de la grandeur physique mesurée (possédant une relation affine ou linéaire).
- <u>Le signal échantillonné</u> est une discrétisation temporelle du signal analogique, dont chaque échantillon est espacé dans le temps de la période d'échantillonnage T_e.
- <u>Le signal numérique</u> est une discrétisation de l'amplitude du signal échantillonné, il dépend de l'espace mémoire alloué à la variable numérique de la carte de commande numérique (pour n bits d'espace mémoire alloué, on aura alors 2^n valeurs numériques possibles pour la variable).
- <u>Le signal quantifié</u> est l'image continue du signal numérique, le système commandé étant de nature continue, il lui faut un signal de commande qui est continue, c'est le signal quantifié.

Remarque : A propos de la période d'échantillonnage
En général :

- *La période d'échantillonnage $\boldsymbol{T_e}$ est choisie dix fois plus petite que la plus grande constante de temps du système (pôle dominant).*
- Si la période d'échantillonnage est très petite, on tend vers les correcteurs continus définis précédemment mais des problèmes numériques apparaissent et la commande du système n'est alors pas convenable.

1.3 Transformée en z

Pour traiter les correcteurs numériques, on utilise la transformée en z (équivalent discret de la transformée de Laplace) qui permet d'analyser les performances des correcteurs numériques et les dimensionner sans passer par les transformées en p.

La méthode proposée dans cette partie consiste à dimensionner les correcteurs dans le domaine de Laplace (déterminer les coefficients de ce correcteur) puis discrétiser l'équation différentielle correspondant au correcteur de manière à obtenir une équation de récurrence discrète correspondant à la commande envoyée au système. Nous utilisons dans la suite les acquis du chapitre sur l'ingénierie numérique pour passer des fonctions de transfert des correcteurs à leur représentation discrète.

Définition de la transformée en z :

On appelle transformée en z d'un signal $f(t)$ la transformée de Laplace $F^*(p)$ du signal échantillonné $f^*(t)$, dans laquelle on effectue la substitution :

$$z = e^{T_e \cdot p}$$

Notation : $\mathcal{Z}\,[f(t)]$

Par ailleurs : $F^*(p) = \mathcal{L}[f^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k \cdot T_e) \cdot e^{-k \cdot T_e \cdot p}$

Et en posant $z = e^{T_e \cdot p}$

$$F(z) = \mathcal{L}[f^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k \cdot T_e) \cdot z^{-k \cdot}$$

Voir table des transformées en z en annexe.

1.4 Structure générale d'une commande numérique :

Le système évolue de manière continue (caractérisé par des équations différentielles), mais la carte de commande numérique évolue de manière discrète (caractérisée par des suites). La commande du système nécessite donc l'usage de différents éléments permettant de passer d'une expression continue à une expression discrète, ce sont les CAN (convertisseur analogique/numérique) et CNA (convertisseur numérique/analogique). Voici en Figure 2, un schéma représentant la position de ces composants dans la structure d'une commande numérique.

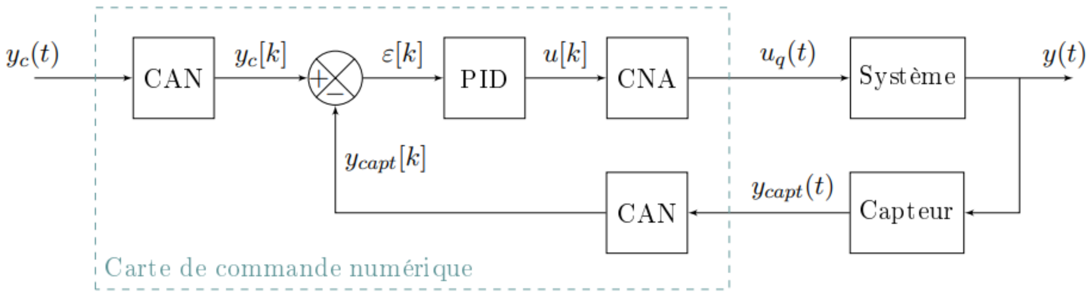


Figure 2 : Schéma d'une structure de commande numérique.

Dans la suite de ce chapitre, on confondra signal échantillonné et signal numérique, en faisant l'hypothèse que la mémoire allouée pour la variable mesurée est infinie. Cette hypothèse est souvent prise en compte, ce qui n'empêche pas d'étudier à part l'impact d'une taille de mémoire finie sur la résolution de mesure.

1.5 Capteur, CAN et CNA

1.5.1 Capteur

Les capteurs peuvent renvoyer différents types de signaux, on les distingue alors comme :

- Capteur analogique (potentiomètre, jauge d'extensométrie) ;
- Capteur numérique (codeur incrémental, codeur absolu).

Le signal renvoyé par un capteur analogique est continu, il faut donc le convertir en un signal numérique pour que la carte de commande numérique puisse traiter cette information afin de commander le système.

1.5.2 CAN - convertisseur analogique/numérique (échantillonneur)

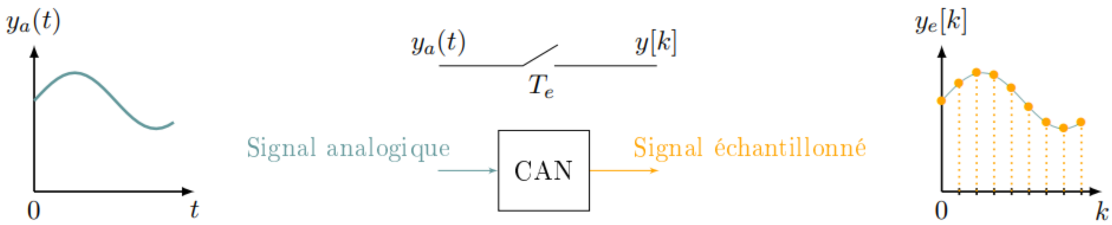


Figure 3 : CAN : Convertisseur analogique / numérique

Le CAN est modélisé par un interrupteur commandé de rapport cyclique nul et de période T_e.

1.5.3 CNA - convertisseur numérique/ analogique (bloqueur ordre zéro =BOZ)

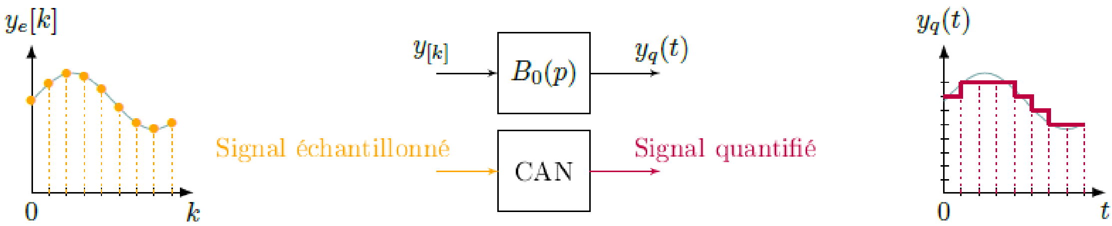


Figure 4 : CNA : Convertisseur numérique / analogique

Le CNA est modélisé par un bloqueur d'ordre 0 (BOZ). Il permet de reconstituer analogiquement un signal continu à partir d'un signal à temps discret. (Signal quantifié)

1.6 Modélisation par équations aux différences

Une équation aux différences est la représentation d'une équation différentielle dans le domaine numérique. On utilise alors des méthodes numériques pour effectuer les opérations de dérivation et d'intégration (voir cours sur l'ingénierie numérique).

Pour alléger les écritures on écrit $x(k \cdot T_e) = x_k$:

- Dérivée numérique à un pas arrière : $y_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$
- Intégration par les rectangles à gauche : $y_k = y_{k-1} + T_e \cdot x_k$
- Intégration par trapèzes : $y_k = y_{k-1} + T_e \cdot \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$

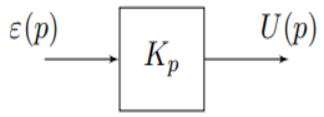
1.6.1 Correcteur Proportionnel

Comme $U(p) = K_p \cdot \varepsilon(p)$ l'implantation est immédiate : en effet, on obtient à l'instant t_k :

$$\boxed{u_k = K_p \cdot \varepsilon_k}$$

La programmation de ce type de correcteur est élémentaire : connaissant e_k et $s_k$mesuré à un instant t_k , on calcule simplement la commande par la relation :

$$u_k = K_p \cdot (e_k - s_k)$$



$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p$$

Figure 4 : Correcteur proportionnel

1.6.2 Correcteur Proportionnel Intégral

On peut écrire ce correcteur sous la forme :

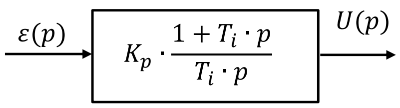
$$U(p) = K_p \cdot \frac{1+T_i \cdot p}{T_i \cdot p} \cdot \varepsilon(p),$$

Soit encore :

$$T_i \cdot p \cdot U(p) = K_p \cdot (1 + T_i \cdot p) \cdot \varepsilon(p).$$

En repassant dans le domaine temporel, on obtient l'équation différentielle :

$$T_i \cdot \frac{du(t)}{dt} = K_p \cdot T_i \cdot \frac{d \cdot \varepsilon(t)}{dt} + K_p \cdot \varepsilon(t)$$



$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$$

Figure 5 : Correcteur proportionnel intégral

À partir de cette équation différentielle, on peut établir la relation donnant u_k en fonction de ε_k et des quantités précédentes. Cette relation est appelée « **équation de récurrence** ». Pour obtenir cette équation, il suffit d'utiliser un schéma de dérivation numérique à 1 pas arrière pour calculer les dérivées et évaluer l'équation à un instant t_k. On obtient ainsi :

$$T_i \cdot \frac{u_k - u_{k-1}}{T_e} = K_p \cdot T_i \cdot \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{T_e} + K_p \cdot \varepsilon_k$$

$$T_i . u_k = T_i . u_{k-1} + K_p \cdot (T_e + T_i) \cdot \varepsilon_k - K_p \cdot T_i \cdot \varepsilon_{k-1}$$

<u>Soit l'équation de récurrence du correcteur PI :</u>

$$\boxed{u_k = u_{k-1} + K_p \cdot \frac{T_e + T_i}{T_i} \cdot \varepsilon_k - K_p \cdot \varepsilon_{k-1}}$$

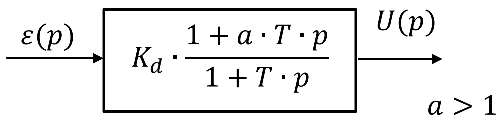
1.6.3 Correcteur à Avance de Phase

On peut écrire ce correcteur sous la forme :

$U(p) + T \cdot p \cdot U(p) = K_d \cdot \varepsilon(p) + K_d \cdot a \cdot T \cdot p \cdot \varepsilon(p)$.

En repassant dans le domaine temporel, on obtient l'équation différentielle :

$$u(t) + T \cdot \frac{du(t)}{dt} = K_d \cdot \varepsilon(t) + K_d \cdot a \cdot T \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$



$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_d \frac{1 + a \cdot T \cdot p}{1 + T \cdot p}$$

Figure 6 : Correcteur à avance de phase

En utilisant la même approximation que précédemment pour les dérivées (dérivée arrière), on obtient :

$$u_k + T \cdot \frac{u_k - u_{k-1}}{T_e} = K_d \cdot \varepsilon_k + K_d \cdot a \cdot T \cdot \frac{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})}{T_e}$$

Soit l'équation de récurrence du correcteur à avance de phase :

$$\boxed{u_k = \frac{T}{T_e + T} \cdot u_{k-1} + K_d \cdot \frac{T_e + a \cdot T}{T_e + T} \cdot \varepsilon_k - K_d \cdot \frac{a \cdot T}{T_e + T} \cdot \varepsilon_{k-1}}$$

Ou :

$$u_k = \frac{\frac{T}{T_e}}{1 + \frac{T}{T_e}} \cdot u_{k-1} + K_d \cdot \frac{1 + \frac{a \cdot T}{T_e}}{1 + \frac{T}{T_e}} \cdot \varepsilon_k - K_d \cdot \frac{\frac{a \cdot T}{T_e}}{1 + \frac{T}{T_e}} \cdot \varepsilon_{k-1}$$

On pose parfois :

$$r_0 = \frac{\frac{T}{T_e}}{1+\frac{T}{T_e}}, r_1 = K_d \cdot \frac{1+\frac{a \cdot T}{T_e}}{1+\frac{T}{T_e}}, r_2 = -K_d \cdot \frac{\frac{a \cdot T}{T_e}}{1+\frac{T}{T_e}}$$

Et l'équation de récurrence devient :

$$\boxed{u_k = r_0 \cdot u_{k-1} + r_1 \cdot \varepsilon_k + r_2 \cdot \varepsilon_{k-1}}$$

1.7 Limites du modèle linéaire continu

La Figure 6 montre la réponse en courant d'un circuit RL classique à une tension d'entrée sinusoïdale. Les différentes figures représentent les réponses calculées numériquement pour différentes périodes d'échantillonnage T_e

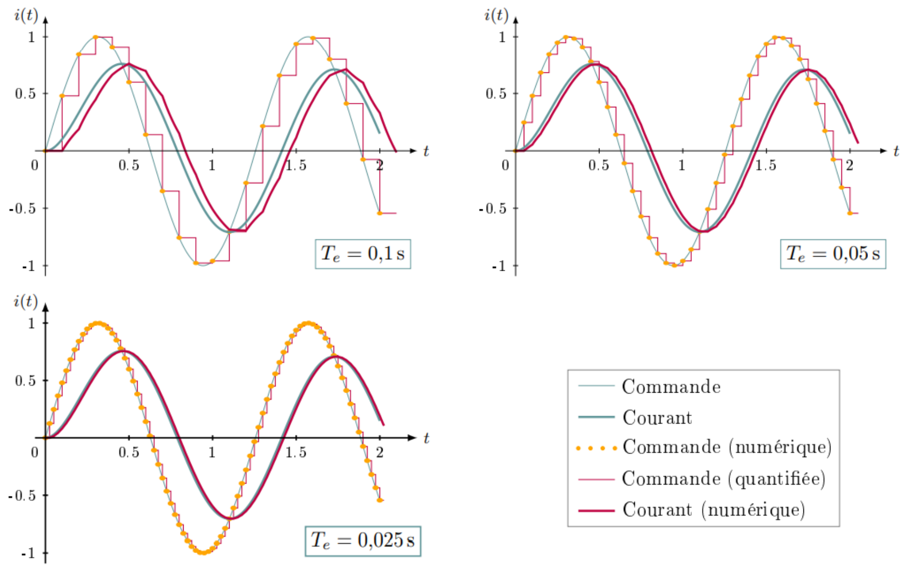


Figure 6 : Influence de $T_e$sur la réponse d'un système d'ordre 1 (Circuit RL)

Remarque sur le Retard :
On constate que le courant obtenu par la commande numérique est en retard sur le courant analogique, mais ce retard tend vers 0 quand la période d'échantillonnage T_e diminue. Un retard peut provoquer des instabilités absentes du modèle analogique.

Annexe :

Table des transformées en z :

f_n	$Z[f_n]$	f_n	$Z[f_n]$
$\delta_n(t)$	1	$na^n u_n(t)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$\delta_{n-k}(t)$	z^{-k}	$te^{-at}u_n(t)$	$\frac{zT_e e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2}$
$u_n(t)$	$\frac{z}{z-1}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{z(z-\cos(\omega T_e))}{z^2-2z\cos(\omega T_e)+1}$
$nu_n(t)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{z(z-\sin(\omega T_e))}{z^2-2z\cos(\omega T_e)+1}$
$tu_n(t)$	$\frac{zTe}{(z-1)^2}$	$a^n \cos(nb)u_n(t)$	$\frac{z^2-az\cos b}{z^2-2az\cos b+a^2}$
$n^2u_n(t)$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$e^{-at}\cos(\omega t)u_n(t)$	$\frac{z^2-ze^{-aT_e}\cos(\omega T_e)}{z^2-2ze^{-aT_e}\cos(\omega T_e)+e^{-2aT_e}}$
$t^2u_n(t)/2!$	$\frac{T_e z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$a^n \sin(nb)u_n(t)$	$\frac{az\sin b}{z^2-2az\cos b+a^2}$
$a^nu_n(t)$	$\frac{z}{z-a}$	$e^{-at}\sin(\omega t)u_n(t)$	$\frac{ze^{-aT_e}\sin(\omega T_e)}{z^2-2ze^{-aT_e}\cos(\omega T_e)+e^{-2aT_e}}$
$e^{-at}u_n(t)$	$\frac{z}{z-e^{-aT_e}}$		