

5.3 Correction des systèmes asservis

Sommaire

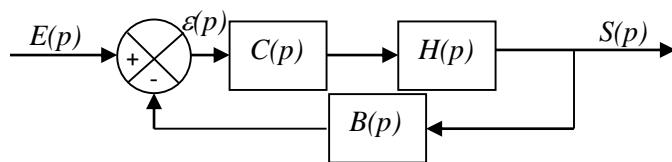
1 Introduction à la correction des systèmes asservis :	3
1.1 Définition – but de la correction :	3
1.2 Méthode de correction des systèmes asservis :	5
2 Correcteur proportionnel :	5
2. 1 Influence sur la stabilité :	5
2.2 Influence sur la précision :	5
2.3 Influence sur la rapidité :	5
2.4 Réglage de K_P par rapport à la précision :	7
2.5 Réglage de K_P par rapport à la rapidité :	7
3 Correcteur intégral :	8
3.1 Correcteur intégral pur :	8
3.1.1 Influence sur la stabilité :	8
3.1.2 Influence sur la précision :	8
3.1.3 Influence sur la rapidité :	9
3.2 Correcteur proportionnel et intégral :	10
3.2.1 Influence sur la stabilité :	10
3.2.2 Influence sur la précision :	10
3.2.3 Influence sur la rapidité :	10
3.2.4 Réglage du correcteur proportionnel et intégral :	11
3.3 Correcteur à retard de phase :	12
3.3.1 Influence sur la stabilité :	12
3.3.2 Influence sur la précision :	12
3.3.3 Influence sur la rapidité :	12
3.3.4 Réglage du correcteur à retard de phase :	12
4 Correcteur dérivé :	14
4.1 Correcteur dérivé pur :	14

4.1.1 Influence sur la stabilité :	14
4.1.2 Influence sur la précision :.....	14
4.1.3 Influence sur la rapidité :.....	14
4.2 Correcteur proportionnel et dérivé:.....	15
4.2.1 Influence sur la stabilité :	15
4.2.2 Influence sur la précision :.....	15
4.2.3 Influence sur la rapidité :.....	15
4.2.4 Réglage d'un correcteur proportionnel et dérivé :	17
4.3 Correcteur à avance de phase :.....	17
4.3.1 Influence sur la stabilité :	18
4.3.2 Influence sur la précision :.....	18
4.3.3 Influence sur la rapidité :.....	18
4.3.3 Réglage d'un correcteur à avance de phase :.....	19
5 Correcteur proportionnel intégral et dérivé :	19
5.1 Correcteur PID théorique :	19
5.2 Correcteur PID réel :.....	20
6 Tableau récapitulatif :.....	21

1 Introduction à la correction des systèmes asservis :

1.1 Définition – but de la correction :

Afin d'améliorer les performances d'un système asservi en termes de stabilité, précision et rapidité, une méthode possible consiste à introduire un correcteur à la suite de l'écart entre la consigne et la réponse du système (qui n'est pas la seule solution possible pour réaliser la correction). Le but de la correction est ainsi de doter l'asservissement des qualités attendues par le calcul et la mise en place du correcteur nécessaire. Les spécifications sont formulées soit dans le domaine temporel soit dans le domaine fréquentiel.



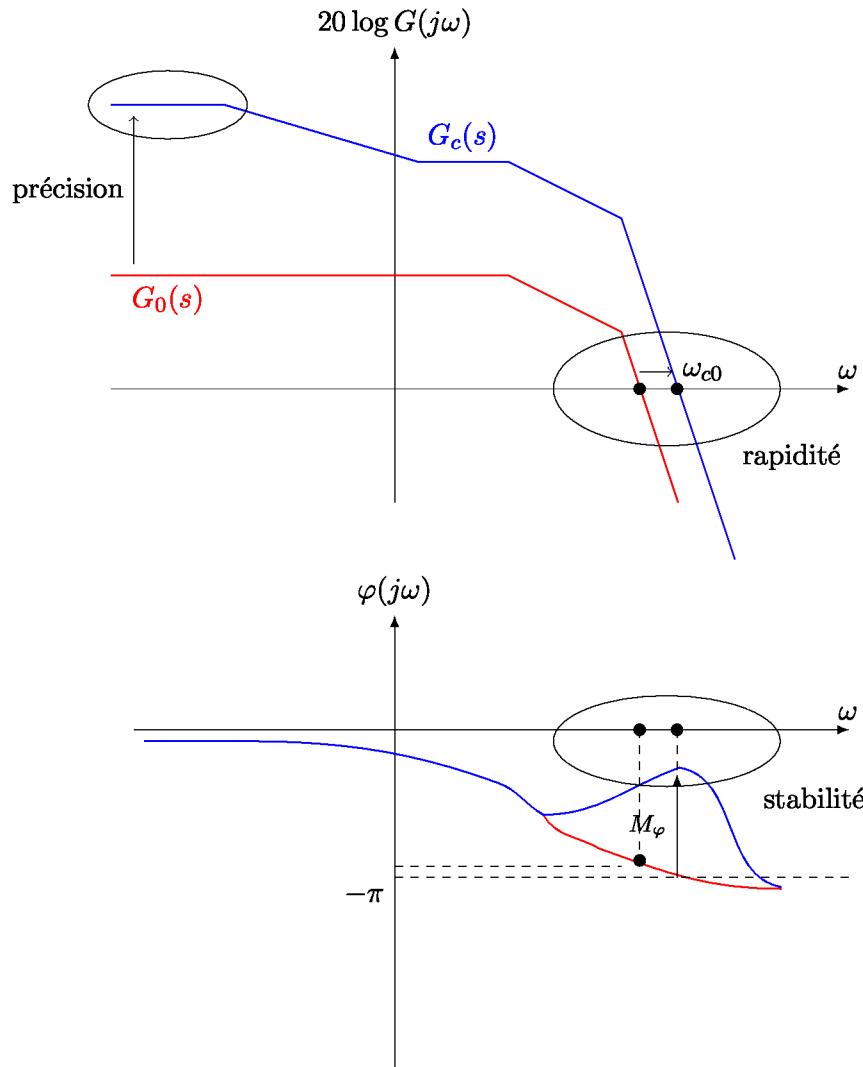
L'introduction d'un correcteur en série avec le processus modifie la boucle ouverte du système et par conséquent la boucle fermée. La correction la plus courante est basée sur l'association de trois correcteurs élémentaires (en série ou en parallèle)

- correcteur proportionnel ;
- correcteur intégral;
- correcteur dérivé.

Nous allons détailler les actions de chacun d'entre eux et constater leurs effets sur le système. Sans toutefois en faire un dogme, au vu de la diversité des problèmes d'automatique, on peut énoncer des critères relativement généraux pour le réglage d'un système asservi.

- un système asservi doit être stable, et au-delà, posséder des marges de stabilité suffisantes pour ne pas risquer de déstabiliser le système par une augmentation du gain (marge de gain) ou par des retards parasites générant des déphasages (marge de phase) ;
- après une perturbation, le système doit revenir à l'équilibre et cela de façon suffisamment amortie ;
- l'erreur en régime permanent doit être aussi faible que possible (nulle dans le meilleur des cas notamment pour l'erreur statique et très faible pour l'erreur de trainage) ;
- le régime transitoire doit être suffisamment bref pour un retour rapide au régime permanent.

Il n'y a pas de correcteur « idéal » chacun pouvant agir sur des phénomènes contradictoires. Le diagramme de Bode de la figure ci-dessous présente les effets sur les paramètres du système.



- Pour améliorer la précision, il est possible d'augmenter le gain statique au voisinage des basses fréquences.
- Pour améliorer la rapidité, il est intéressant de choisir une pulsation de coupure à 0 dB plus élevée (plus grande bande passante).
- Pour améliorer la stabilité (augmentation de la marge de phase), il est souhaitable de corriger la courbe de phase au voisinage de la fréquence de coupure à 0 dB.

Toutes ces évolutions sont localisées, mais l'action d'un correcteur est naturellement globale et agit sur tout le spectre de fréquence y aura donc des compromis à choisir lors de la correction de la fonction de transfert d'un système.

1.2 Méthode de correction des systèmes asservis :

Il n'y a pas de méthode unique pour le réglage d'un système asservi. Cependant, les principes généraux énoncés ci-dessus amènent à proposer une démarche pouvant conduire à satisfaire les critères énoncés plus haut et applicable aux systèmes linéaires continus et invariants.

Si $H(p)$ est la fonction de transfert du système, on rappelle que le facteur de résonance Q est le rapport d'amplitude sortie/entrée à la pulsation de résonance ω_r divisé par sa valeur à la pulsation 0 dB.

$$Q = \frac{|H(j \cdot \omega)|_{\max}}{|H(j \cdot \omega_{0dB})|} = \frac{|H(j \cdot \omega_r)|}{|H(j \cdot \omega_{0dB})|}$$

Une stabilité « correcte » est assurée pour la quasi-totalité des systèmes asservis lorsque le facteur de résonance Q du système est de l'ordre de 1,3 c'est-à-dire 2,3 dB. Cela correspond à des marges de stabilité suffisantes (de l'ordre d'une dizaine de décibels pour la marge de gain et d'une cinquantaine de degrés pour la marge de phase). Ce choix résulte d'un compromis entre les exigences contradictoires de précision et de stabilité lorsque l'on modifie le gain de la boucle. On adopte alors la valeur du gain K de la boucle conduisant à un facteur de résonance $Q = 1,3$.

2 Correcteur proportionnel :

Un correcteur proportionnel est un gain pur dont la fonction de transfert peut s'écrire :

$$C(p) = K_P.$$

D'un point de vue temporel : si $K_P > 1$, son action se traduit par :

2. 1 Influence sur la stabilité :

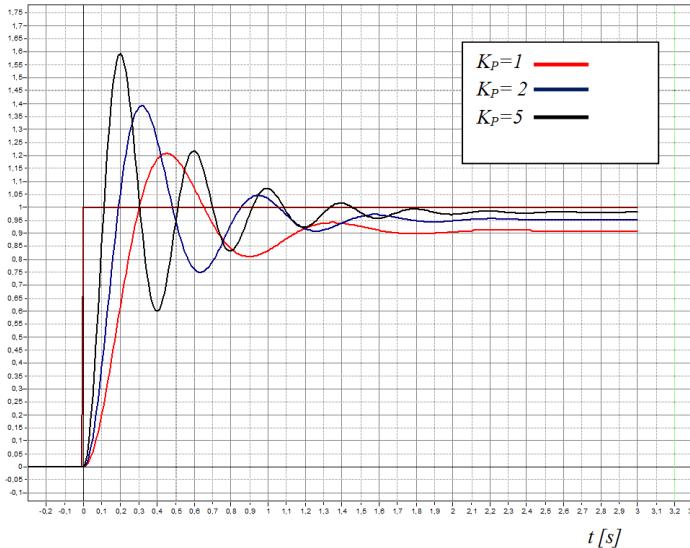
- si $K_P > 1$ alors, généralement, il advient une diminution des marges de gain et de phase;
- si le gain K_P est trop élevé, le système peut devenir oscillant ;
- si la phase à l'infini du système est proche de -180° par valeurs supérieures, alors le système peut devenir instable.

2.2 Influence sur la précision :

- une amélioration de l'écart statique.

2.3 Influence sur la rapidité :

- une augmentation du gain améliore la rapidité du système mais peut conduire à des dépassemens.



Action d'un correcteur proportionnel : réponses temporelles à un échelon unitaire.

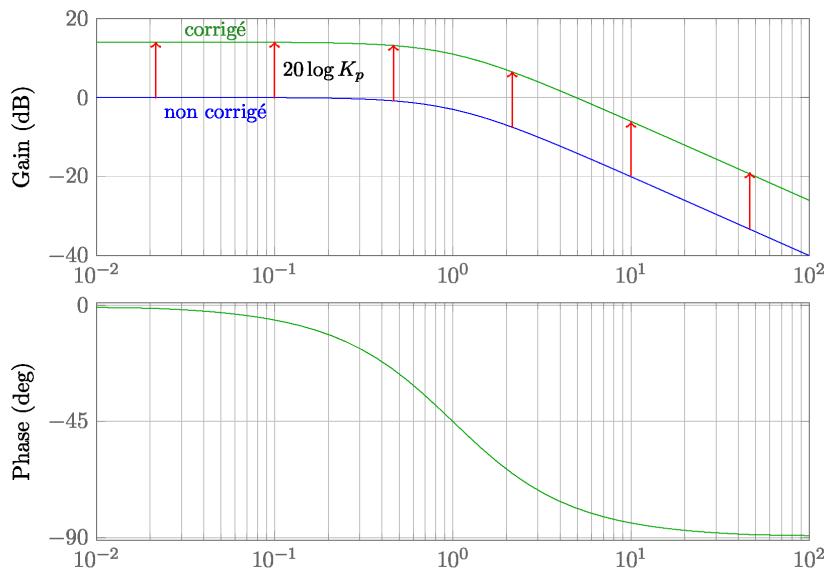
$$H(p) = \frac{10}{1 + p + 0.2 \cdot p^2}$$

D'un point de vue fréquentiel :

Un correcteur proportionnel n'agit que sur le gain, la phase restant inchangée. Sur un diagramme de Bode, la mise en place d'un correcteur proportionnel de gain K_p se traduit par une translation verticale de $20 \log(K_p)$

Notons $H(p)$ la fonction de transfert en boucle ouverte du système. La fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé devient $FTBO_{co}(p) = K_p \cdot H(p)$. Le gain et la phase sont alors tels que :

$$\begin{cases} G_{co}(\omega) = 20 \cdot \log|H(\omega)| + 20 \cdot \log(K_p) = G(\omega) + 20 \cdot \log(K_p) \\ \phi_{co}(\omega) = \phi(\omega) \end{cases}$$



La mesure de la translation donne la valeur de K_p en dB : $T_{dB} = 20 \log K_p$ et donc $K_p = 10^{\frac{T_{dB}}{20}}$;

2.4 Réglage de K_P par rapport à la précision :

Pour régler un correcteur proportionnel vis à vis d'une précision imposée, si K est le gain de la FTBO, on calcule la valeur du gain K_P du correcteur proportionnel à partir de K en fonction des résultats du tableau ci-dessous.

type d'entrée	impulsion	échelon	rampe	parabole
	δ_0	$\frac{E_0}{P}$	$\frac{V_0}{P^2}$	$\frac{A_0}{P^3}$
classe $\alpha = 0$	0	$\frac{E_0}{1+K}$	∞	∞
classe $\alpha = 1$	0	0	$\frac{V_0}{K}$	∞
classe $\alpha = 2$	0	0	0	$\frac{A_0}{K}$

Erreur en fonction de l'entrée et de la classe du système (retour unitaire)

2.5 Réglage de K_P par rapport à la rapidité :

Pour régler le correcteur proportionnel vis à vis d'une performance en rapidité imposée, si K est le gain de la FTBO, on calcule la valeur du gain K_P du correcteur proportionnel à partir de K en fonction de la rapidité imposée.

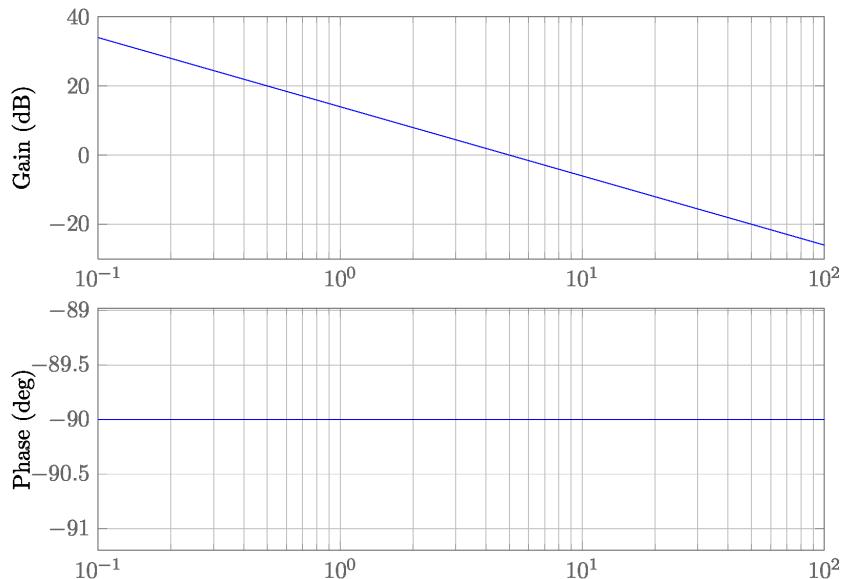
3 Correcteur intégral :

3.1 Correcteur intégral pur :

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert $C(p) = \frac{K_i}{p}$.

Notons $H(p)$ la fonction de transfert en boucle ouverte du système. La fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé devient $FTBO_{co}(p) = \frac{K_i}{p} \cdot H(p)$. Le gain et la phase sont alors tels que :

$$\begin{cases} G_{co}(\omega) = 20 \cdot \log|H(\omega)| + 20 \cdot \log(K_i) - 20 \cdot \log(\omega) = G(\omega) + 20 \cdot \log(K_i) - 20 \cdot \log(\omega) \\ \phi_{co}(\omega) = \phi(\omega) + \arg\left(\frac{K_i}{j \cdot \omega}\right) = \phi(\omega) - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



Correcteur intégral pur $C(p) = \frac{5}{p}$: Diagrammes de Bode

3.1.1 Influence sur la stabilité :

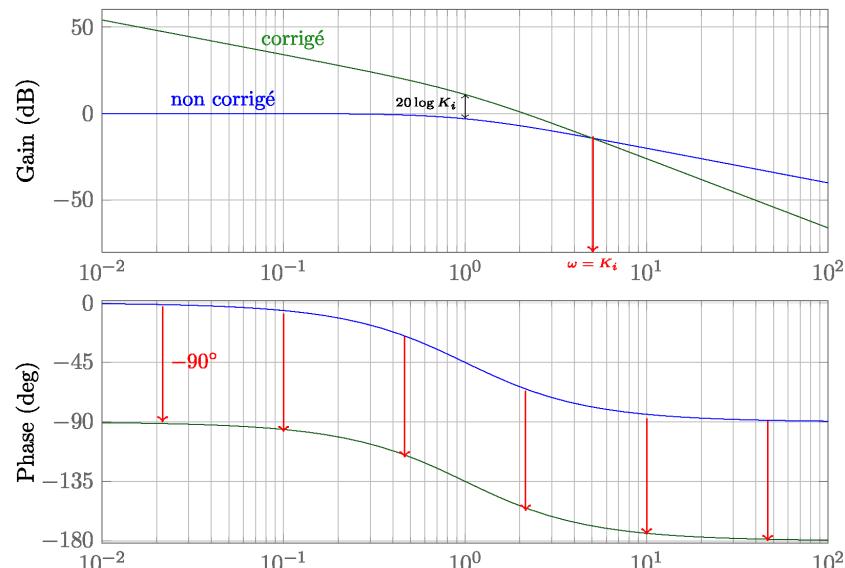
Ce correcteur « apporte » une phase de -90° à la boucle ouverte du système ce qui diminue fortement sa stabilité et peut engendrer de l'instabilité. Les marges sont globalement diminuées.

3.1.2 Influence sur la précision :

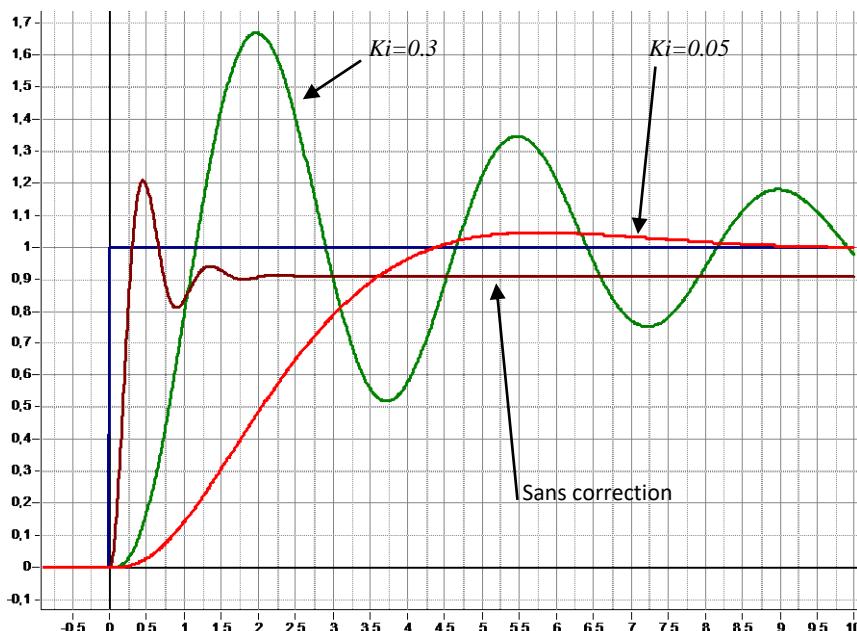
Ce correcteur a une action positive sur la précision du système et peut suffire pour rendre l'écart nul en fonction de la classe de la fonction de transfert de la boucle ouverte et de la forme de l'entrée. Placé en amont d'une perturbation, il permet d'annuler les effets d'une perturbation indicielle.

3.1.3 Influence sur la rapidité :

Ce correcteur amplifie les effets sur le gain aux basses fréquences et les diminue aux hautes fréquences. La bande passante diminue : le temps de réponse augmente.



Action d'un correcteur intégral pur – diagramme de Bode



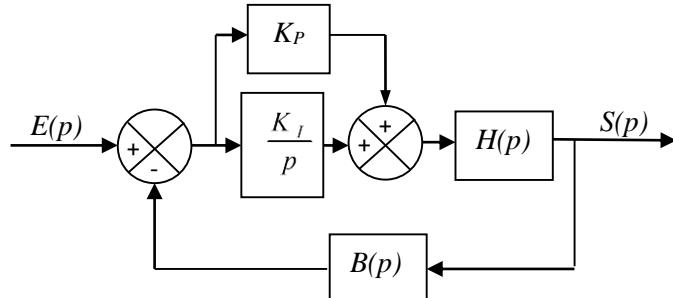
Action d'un correcteur intégral

$$\text{Réponses temporales à un échelon unitaire. } H(p) = \frac{10}{1 + p + 0.2 \cdot p^2} .$$

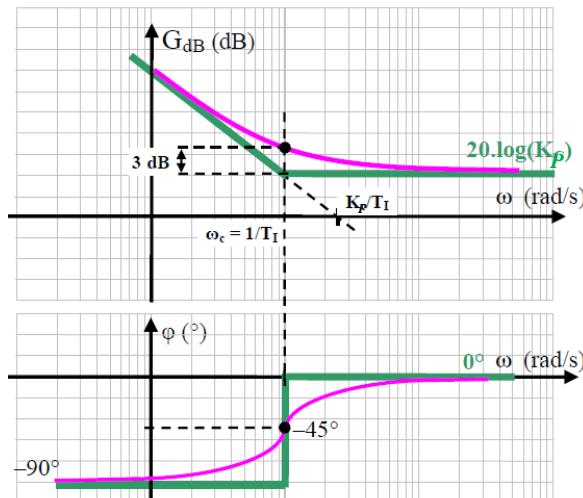
3.2 Correcteur proportionnel et intégral :

La fonction de transfert du correcteur est :

$$C(p) = K_P + \frac{K_I}{P} = K_P \cdot \left(\frac{1+T_I p}{T_I p} \right) \text{ on pose : } T_I = \frac{K_P}{K_I}$$



Correcteur proportionnel et intégral



Correcteur proportionnel et intégral – diagrammes de Bode

3.2.1 Influence sur la stabilité :

Le correcteur *PI* est moins « néfaste » que le correcteur intégral pur. Le choix de K_I est essentiel pour éviter de diminuer la phase de la boucle ouverte au voisinage du point d'affixe -1 .

3.2.2 Influence sur la précision :

A l'instar du correcteur intégral pur, le correcteur *PI* améliore la précision et annule l'écart statique pour une entrée indicielle. Son rôle est également efficace pour annuler les effets de perturbations s'il est situé en amont de celles-ci.

3.2.3 Influence sur la rapidité :

L'augmentation du gain K_P améliore la rapidité du système tout en diminuant les marges de stabilité.

3.2.4 Réglage du correcteur proportionnel et intégral :

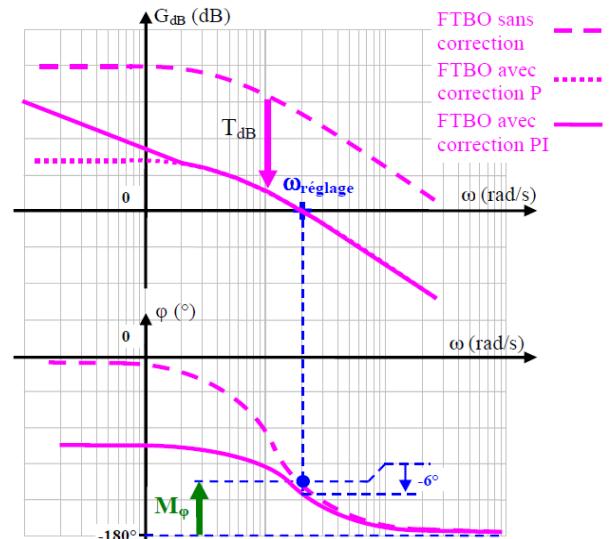
Réglage du correcteur par rapport à la stabilité à l'aide du diagramme de Bode. On choisit le coefficient K_P de façon à obtenir la marge de phase désirée avec la correction proportionnelle seule. La mesure de la translation T_{dB} donne la valeur de K_P en dB :

$$T_{dB} = 20 \log K_P \text{ et donc } K_P = 10^{\frac{T_{dB}}{20}}$$

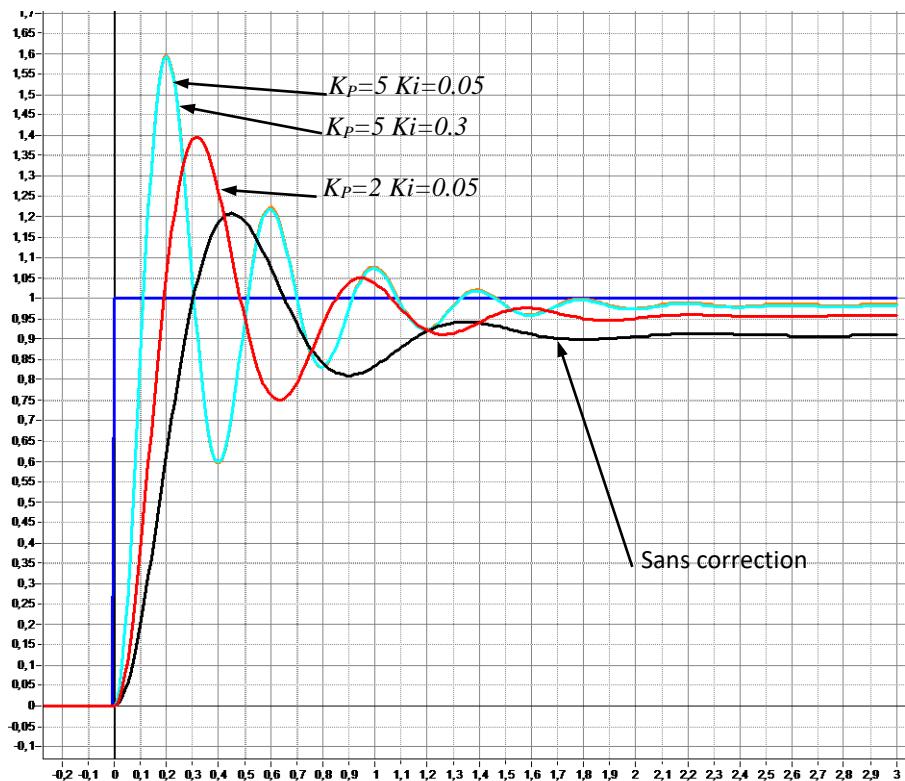
On met ensuite en place l'« effet intégral » mais cela ne doit pas (ou peu) modifier le réglage effectué à la pulsation $\omega_{réglage}$.

On choisit de prendre une constante T_I telle que $\omega_{réglage} \gg 1/T_I$. On prend en général :

$$T_I = \frac{10}{\omega_{réglage}}$$



Action d'un correcteur proportionnel et intégral – diagrammes de Bode



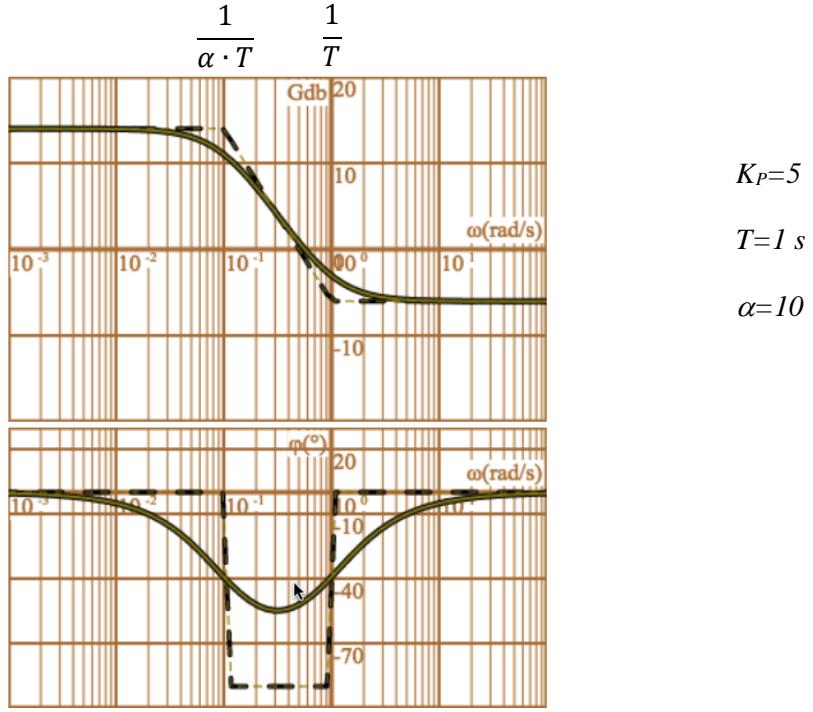
Action d'un correcteur proportionnel et intégral
réponses temporelles à un échelon unitaire

3.3 Correcteur à retard de phase :

La fonction de transfert de ce correcteur est donnée par :

$$C(p) = K_P \cdot \frac{1+T \cdot p}{1+\alpha \cdot T \cdot p} \quad \text{avec } \alpha > 1.$$

Son diagramme de Bode montre qu'il augmente le gain de la boucle ouverte aux basses fréquences.



Correcteur à retard de phase – diagrammes de Bode

3.3.1 Influence sur la stabilité :

Il peut rendre le système instable en fonction des paramètres choisis. Il faut donc l'utiliser avec précaution.

3.3.2 Influence sur la précision :

La précision du système est améliorée sans toutefois annuler l'écart statique (la classe du système n'est pas augmentée comme pour un correcteur *PI*).

3.3.3 Influence sur la rapidité :

Il a tendance à diminuer la rapidité du système.

3.3.4 Réglage du correcteur à retard de phase :

On choisit souvent $K_P = \alpha$. Le correcteur à retard de phase permet d'améliorer la précision du système. Le déphasage est maximal pour :

$$\omega_m = \frac{1}{T \cdot \sqrt{\alpha}}$$

Le déphasage maximal introduit est $-\varphi_m$ tel que :

$$\sin(-\varphi_m) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

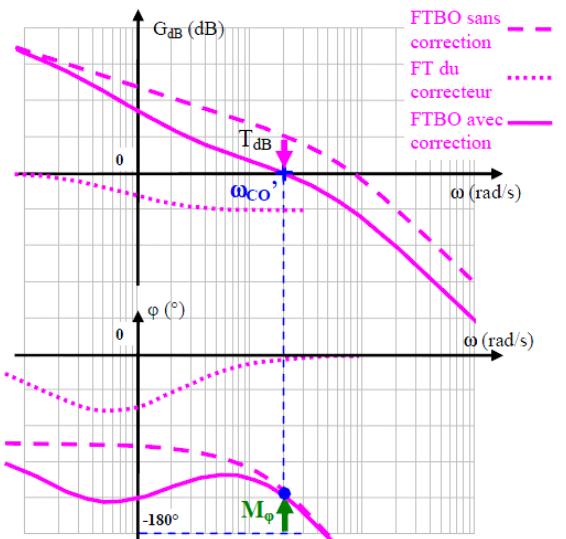
Il faudra vérifier de plus que la bosse de déphasage supplémentaire apportée ne provoque pas de surtensions indésirables en basses fréquences. Le correcteur permet de multiplier par α le gain statique ; il diminue donc l'erreur statique dans le même rapport.

Réglage du correcteur par rapport à la stabilité à l'aide du diagramme de Bode :

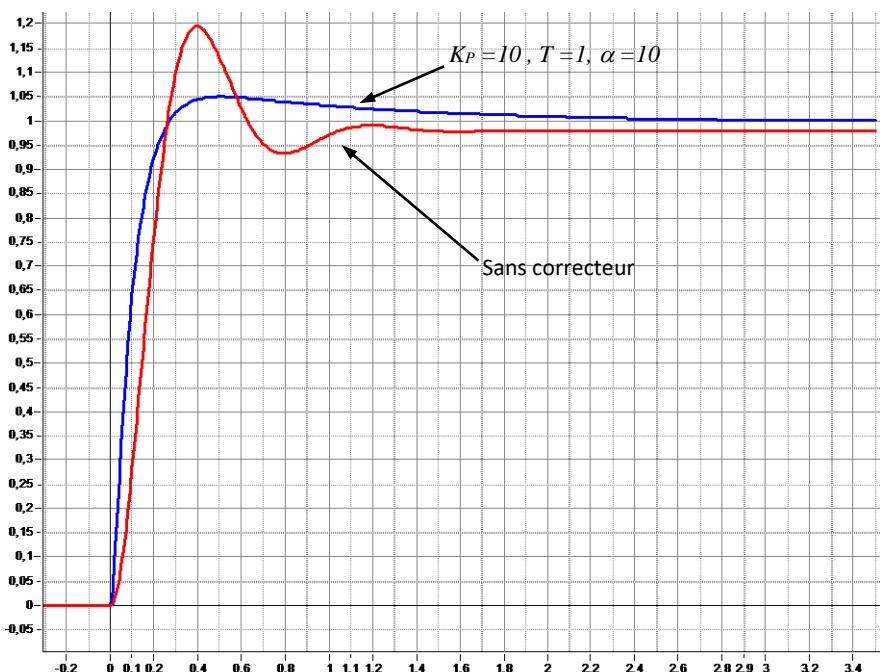
On identifie la valeur de la pulsation de coupure en haute fréquences qui permet d'obtenir la marge de phase désirée. La mesure de la translation T_{dB} nécessaire de la courbe de gain pour obtenir cette nouvelle pulsation de coupure ω_{0dB} donne la valeur de α en dB

$$T_{dB} = -20 \log \alpha \text{ et donc } \alpha = 10^{-\frac{T_{dB}}{20}}$$

Le réglage précédent ne doit être que faiblement modifié par le déphasage apporté par le correcteur. On rejette donc la diminution de phase vers les basses fréquences en choisissant $\omega_{0dB} \gg \frac{1}{T}$. On choisit généralement : $T = \frac{10}{\omega_{0dB}}$.



Action d'un correcteur à retard de phase – diagrammes de Bode



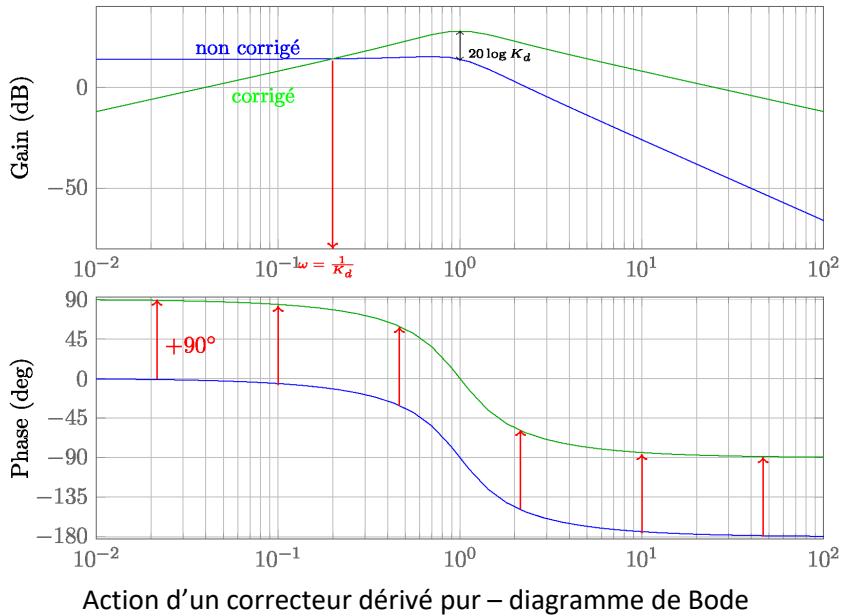
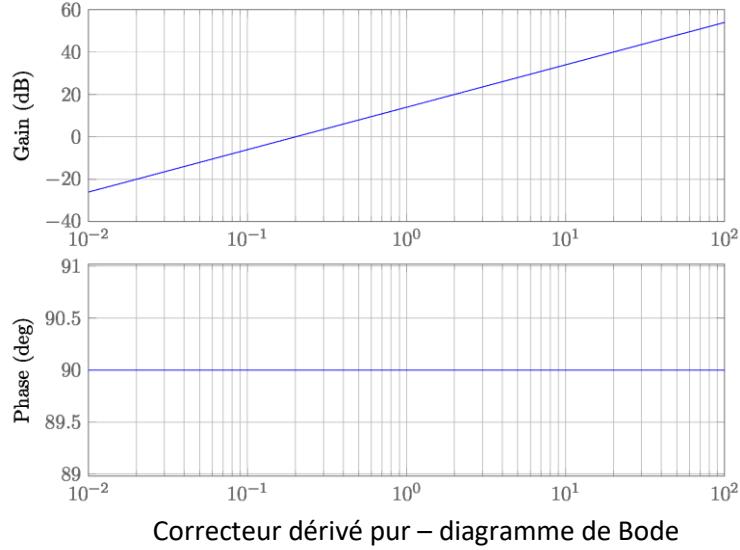
Action d'un correcteur à retard de phase - réponses temporales à un échelon unitaire.

$$H(p) = \frac{49}{1 + 5 \cdot p + 0,65 \cdot p^2}$$

4 Correcteur dérivé :

4.1 Correcteur dérivé pur :

La fonction de transfert du correcteur s'écrit $C(p) = K_d \cdot p$. Il est irréalisable physiquement car il n'est pas causal (la puissance du numérateur est supérieure au dénominateur).



4.1.1 Influence sur la stabilité :

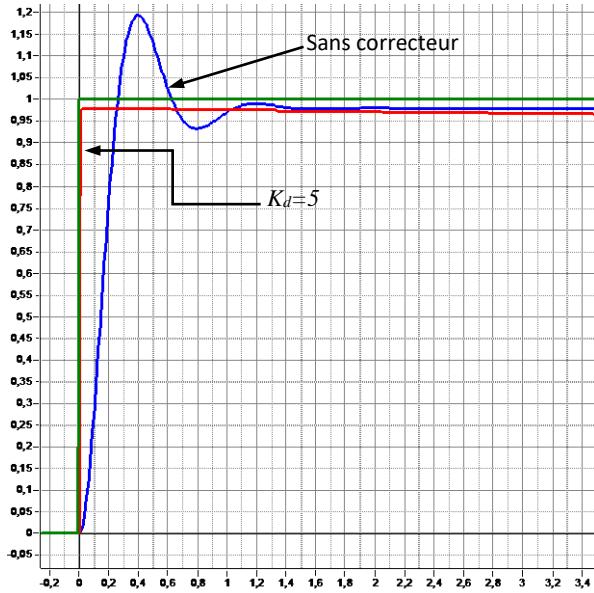
Ce correcteur augmente la phase de 90° ce qui améliore la stabilité.

4.1.2 Influence sur la précision :

Il dégrade la précision et rend le système plus sensible aux perturbations.

4.1.3 Influence sur la rapidité :

Il améliore la rapidité aux hautes fréquences et la diminue aux basses fréquences.



Action d'un correcteur dérivé pur – réponses temporelles à un échelon unitaire.

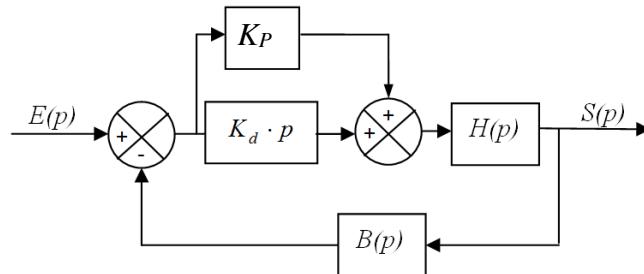
$$H(p) = \frac{49}{1 + 5 \cdot p + 0.65 \cdot p^2}$$

4.2 Correcteur proportionnel et dérivé :

La fonction de transfert du correcteur est :

$$C(p) = K_P + K_d \cdot p$$

Ce correcteur n'est pas réalisable physiquement.



4.2.1 Influence sur la stabilité :

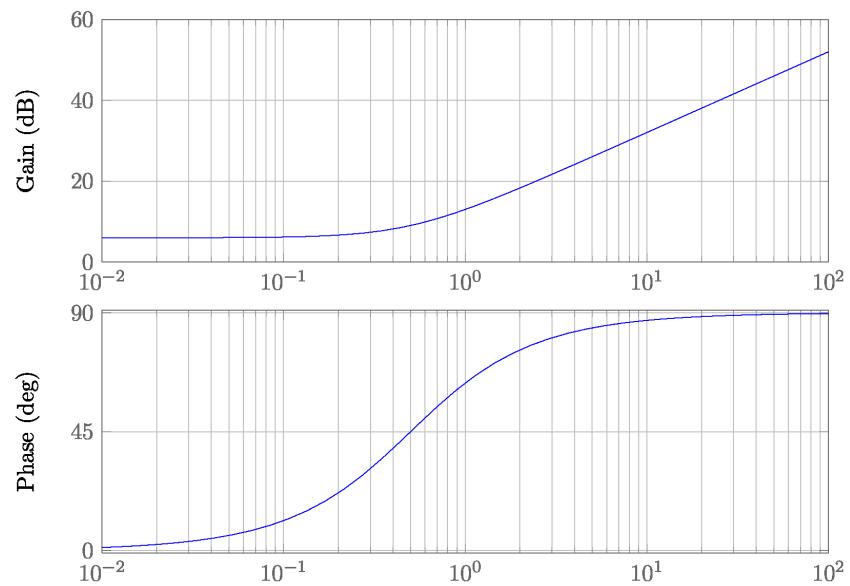
Comme le correcteur déivateur pur, il augmente la phase de 90° ce qui améliore les marges de stabilité.

4.2.2 Influence sur la précision :

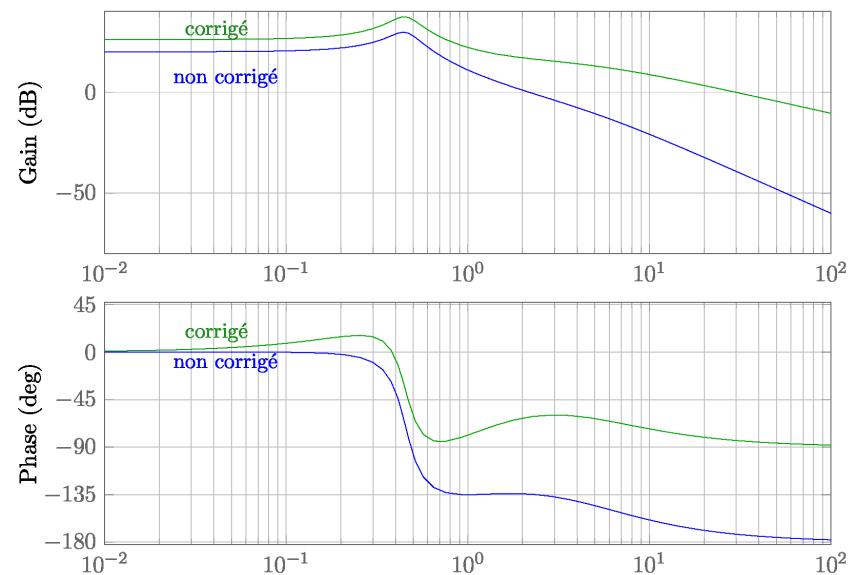
Il dégrade la précision et rend le système plus sensible aux perturbations à l'instar du correcteur déivateur pur.

4.2.3 Influence sur la rapidité :

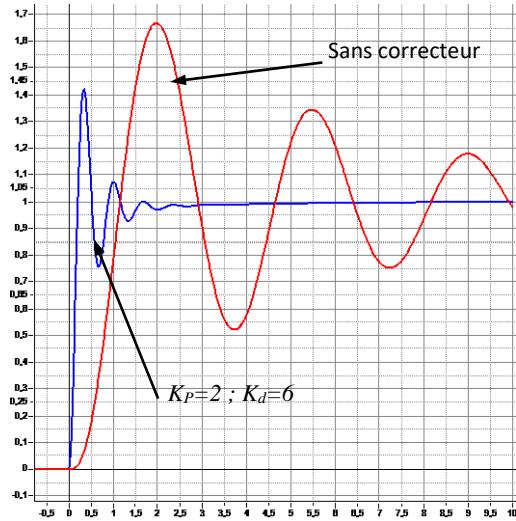
Il améliore la rapidité aux hautes fréquences et amplifie les phénomènes à ces fréquences et notamment les bruits.



Correcteur proportionnel et dérivé – diagramme de Bode



Action d'un correcteur proportionnel et dérivé – diagrammes de Bode



Action d'un correcteur proportionnel et dérivé

$$\text{Réponses temporelles à un échelon unitaire. } H(p) = \frac{3}{p \cdot (1 + p + 0,2 \cdot p^2)}$$

4.2.4 Réglage d'un correcteur proportionnel et dérivé :

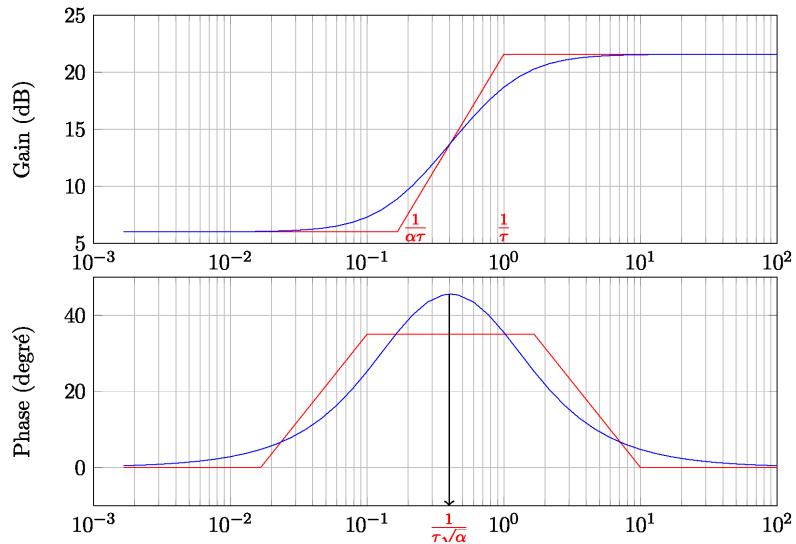
On utilisera la procédure décrite pour le correcteur à avance de phase ci-après en

prenant $\frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_m}$.

4.3 Correcteur à avance de phase :

La fonction de transfert de ce correcteur est donnée par :

$$C(p) = K_p \cdot \frac{1 + \alpha \cdot T \cdot p}{1 + T \cdot p} \text{ avec } \alpha > 1$$



Correcteur à avance de phase – diagrammes de Bode

La phase du correcteur passe par un maximum φ_m tel que :

$$\sin(\varphi_M) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \text{ pour une pulsation : } \omega_M = \frac{1}{T \cdot \sqrt{\alpha}}$$

4.3.1 Influence sur la stabilité :

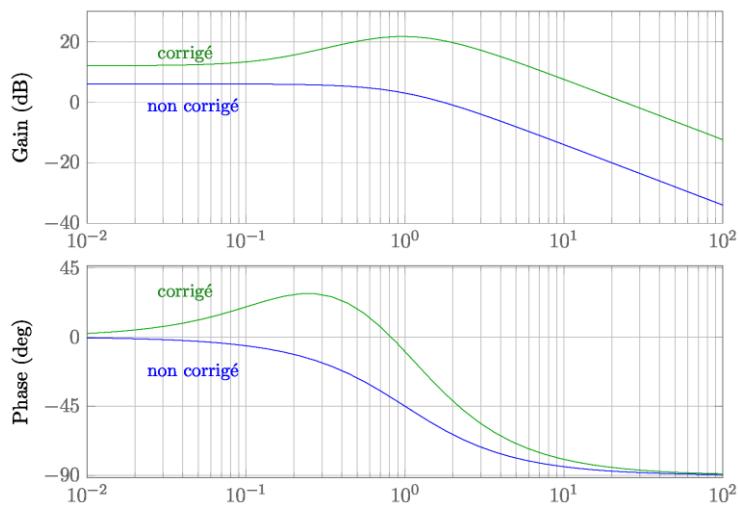
Pour $\frac{1}{\alpha \cdot T} < \omega < \frac{1}{T}$, la phase est augmentée et les marges de stabilité sont donc plus grandes.

4.3.2 Influence sur la précision :

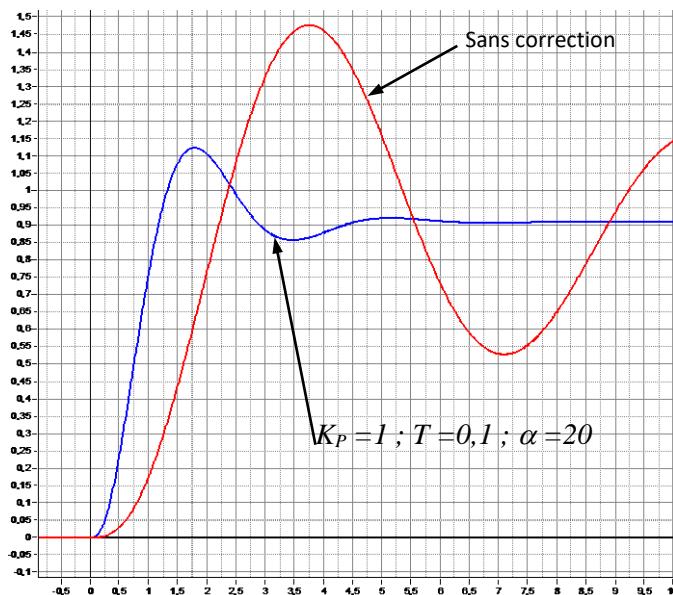
La précision est dégradée par l'action de ce correcteur.

4.3.3 Influence sur la rapidité :

Il améliore la bande passante du système et donc sa rapidité.



Action d'un correcteur à avance de phase – diagrammes de Bode



Action d'un correcteur à avance de phase – réponses temporelles à un échelon unitaire

$$H(p) = \frac{10}{(1 + 2 \cdot p + 0.02 \cdot p^2) \cdot (1 + 0.5 \cdot p) \cdot (1 + 5 \cdot p)}$$

4.3.3 Réglage d'un correcteur à avance de phase :

Le dimensionnement se fera donc en centrant la pulsation ω_M sur la pulsation de la FTBO non corrigée pour laquelle le gain est nul (pulsation centrale du correcteur), puis en choisissant le coefficient α tel que la phase ajoutée permette d'atteindre la marge souhaitée et enfin en choisissant K_P qui permet de ne pas augmenter le gain à la pulsation ω_M .

- On détermine T pour faire coïncider la pulsation de phase maximale ω_M avec la pulsation de coupure ω_{0dB} du système non corrigé. On calcule donc :

$$T = \frac{1}{\omega_{0dB} \cdot \sqrt{\alpha}}$$

- On désire une augmentation de la marge de phase d'une quantité $\Delta\varphi$. On utilise alors la relation ci-dessous pour déterminer α :

$$\alpha = \frac{1 + \sin \Delta\varphi}{1 - \sin \Delta\varphi}$$

- On ajuste la valeur du gain K_P pour que le gain du système corrigé soit bien 0 dB pour la pulsation :

$$\omega_M = \frac{1}{T \cdot \sqrt{\alpha}}$$

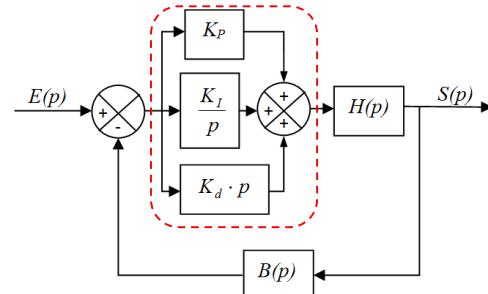
5 Correcteur proportionnel intégral et dérivé :

5.1 Correcteur PID théorique :

La fonction de transfert de ce correcteur s'écrit en fonction du type :

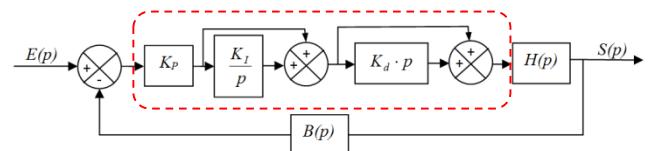
PID parallèle :

$$C(p) = K_P + \frac{K_I}{p} + K_d \cdot p$$



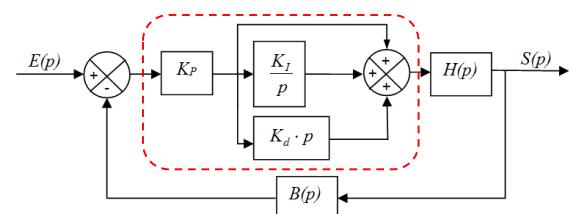
PID série :

$$C(p) = K_P \cdot \left(1 + \frac{K_I}{p} \right) \cdot (1 + K_d \cdot p)$$

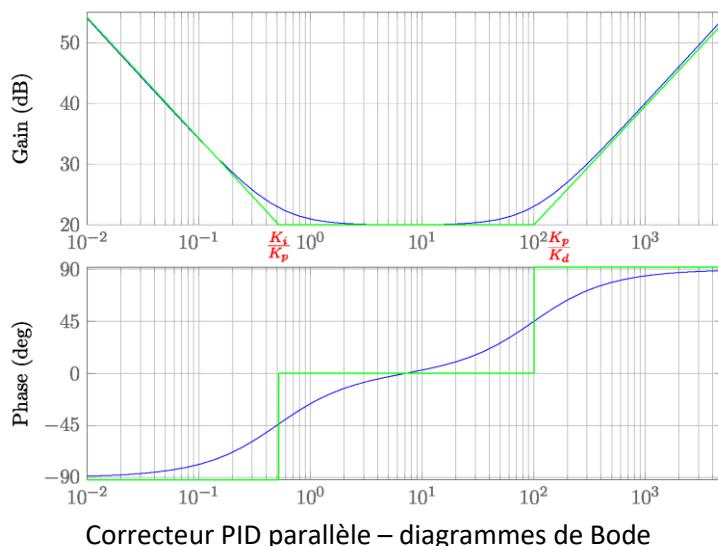


PID mixte :

$$C(p) = K_P \cdot \left(1 + \frac{K_I}{p} + K_d \cdot p \right)$$



Pour ces trois fonctions de transfert, le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur et ne représentent donc pas des systèmes physiques causaux. Le diagramme de Bode ci-après représente l'évolution fréquentielle d'un correcteur PID parallèle.



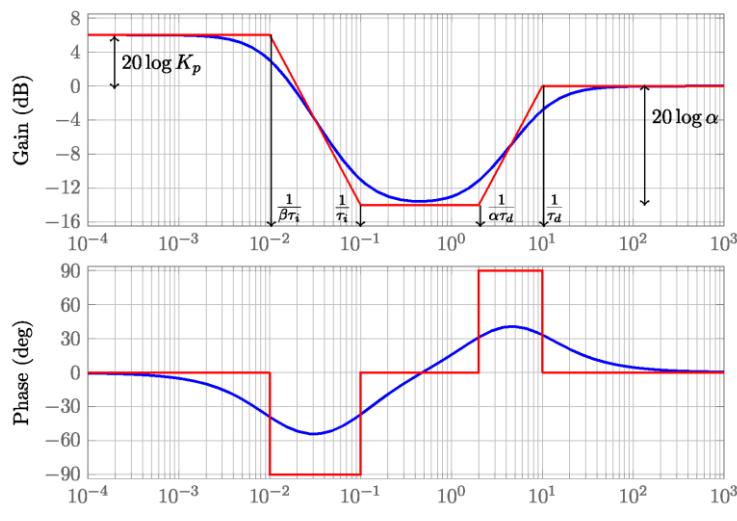
5.2 Correcteur PID réel :

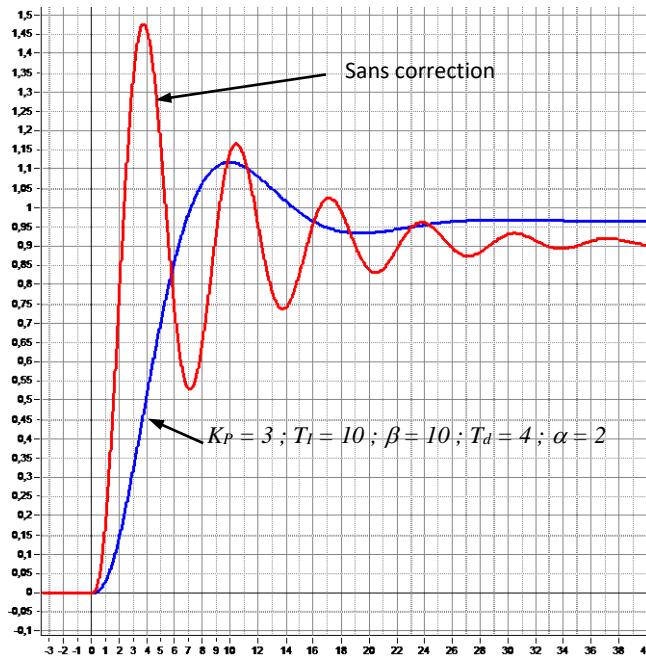
La fonction de transfert d'un correcteur PID réel s'écrit :

$$C(p) = K_p \cdot \frac{1+T_I \cdot p}{1+\beta \cdot T_I \cdot p} \cdot \frac{1+\alpha \cdot T_d \cdot p}{1+T_d \cdot p} \text{ avec } \alpha > 1 \text{ et } \beta > 1.$$

L'action du correcteur intégral est placée aux basses fréquences afin que le retard sur la phase intervienne avant la pulsation de coupure pour qu'il ne perturbe pas les marges. L'action du correcteur dérivé est placée à des fréquences plus élevées afin d'apporter le maximum de phase à la pulsation de coupure pour augmenter la marge de phase et pour améliorer également la marge de gain.

Le réglage de ce correcteur est délicat : trois paramètres sont à ajuster avec des incidences parfois contradictoires.





Action d'un correcteur proportionnel, intégral et dérivé
réponses temporelles à un échelon unitaire

$$H(p) = \frac{10}{(1 + 2 \cdot p + 0.02 \cdot p^2) \cdot (1 + 0.5 \cdot p) \cdot (1 + 5 \cdot p)}$$

6 Tableau récapitulatif :

	<i>Stabilité</i>	<i>Précision</i>	<i>Rapidité</i>	<i>Amortissement</i>
Correcteur <i>P</i>	diminuée	améliorée	améliorée	diminué
Correcteur <i>PI</i>	conservée	améliorée	conservée ou diminuée	peu d'influence
Correcteur <i>PD</i>	améliorée		conservée ou améliorée	
Correcteur <i>RP</i>	diminuée	améliorée	améliorée	diminué
Correcteur <i>AP</i>	améliorée	peu d'influence	améliorée	

Influence des correcteurs