

# 5.2 Performance des systèmes asservis

---

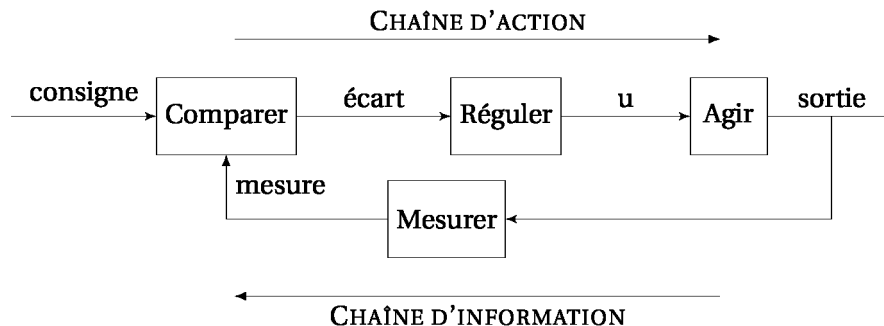
## Sommaire

1	Caractérisation des systèmes asservis :	2
1.1	Structure des systèmes asservis :	2
1.2	Caractéristiques d'un système asservi :	2
2	Stabilité :	3
2.1	Position du problème et définitions :	3
2.2	Etude de la stabilité :	4
2.3	Conditions de la stabilité :	4
2.4	Position des pôles :	5
2.5	Critères de stabilité :	7
2.5.1	Critère algébrique.....	7
2.5.1	Critère graphique : critère du revers.....	7
2.6	Marges de stabilité :	8
2.6.1	Influence de la position de la FTBO par rapport au point critique :	8
2.6.2	Marges de stabilité sur les diagrammes de Bode :	10
3	Précision :	10
3.1	Position du problème :	10
3.2	Données :	11
3.2.1	Cas du retour unitaire :	11
3.2.2	Cas du retour non unitaire :	11
3.3	Erreur en régime permanent, erreur statique :	12
3.3.1	Définition :	12
3.3.2	Calculs préalables :	12
3.3.3	Erreur indicielle - réponse à un échelon :	13
3.3.4	Erreur de trainage - réponse à une rampe :	13
3.3.5	Tableau récapitulatif :	14
3.4	Effet d'une perturbation sur la précision :	15
3.4.1	Présentation du problème :	15
3.4.2	Perturbation constante :	16
4	Rapidité :	17
4.1	Temps de réponse-temps de montée :	17
4.2	Temps de montée et bande passante :	18

# 1 Caractérisation des systèmes asservis :

## 1.1 Structure des systèmes asservis :

Un système asservi linéaire peut se représenter par le schéma ci-dessous. On y retrouve, une chaîne d'action qui agit sur le système pour obtenir la sortie souhaitée en fonction de la consigne, une chaîne d'information qui prélève une image de la sortie, cette image est comparée à la consigne à atteindre.



Les outils permettant son étude (transformation de Laplace, schémas blocs, analyse fréquentielle et temporelle,...) étant connus. Il faut maintenant caractériser le fonctionnement souhaité d'un système asservi et préciser les moyens permettant d'obtenir ce fonctionnement.

## 1.2 Caractéristiques d'un système asservi :

Les critères de performances couramment utilisés sont au nombre de trois à savoir :

Précision : La précision étant l'écart entre la consigne et la sortie du système, il semble évident que l'on souhaite que cet écart soit nul :

- dans le cas d'une régulation, on cherchera à obtenir pour un échelon une erreur statique nulle,
- si le système doit suivre une consigne évolutive (suivi de trajectoire), une erreur de trainage nulle.

Stabilité : La stabilité est la qualité la plus importante que doit posséder le système asservi. Un système qui atteint sa position finale après de nombreuses oscillations est stable mais ne peut être considéré comme un système performant. La stabilité n'est donc pas seulement une qualité binaire (stable /non stable). La notion de dépassement, associée aux marges de stabilité, permet de caractériser cette stabilité relative.

Rapidité : Comme pour la précision, on souhaite que le système soit le plus rapide possible. Souvent après avoir réglé la stabilité et la précision souhaitées, il ne reste plus de possibilité de réglage de la rapidité sans modifier les paramètres précédents.

## 2 Stabilité :

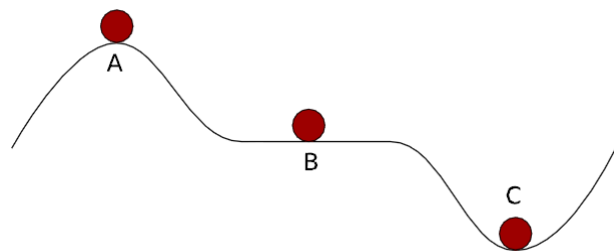
### 2.1 Position du problème et définitions :

Une manière intuitive de préciser la notion de stabilité est d'imaginer un système que l'on écarte de sa position initiale par une impulsion et de regarder son évolution :

- s'il retrouve sa position initiale, il est stable,
- s'il s'en écarte, il est instable.
- s'il s'écarte de sa position initiale pour trouver une autre position stable différente de la première, le système s'écarte mais ne diverge pas (on parle alors de système à stabilité indifférente).

La stabilité (au sens de Lyapunov) peut être illustrée (voir figure ci-dessous) par une bille soumise à la pesanteur, roulant dans un rail.

- A : position d'équilibre instable,
- B : position d'équilibre indifférent,
- C : position d'équilibre stable.



Plusieurs définitions sont alors envisageables :

- Définition 1. Soit un signal temporel  $f$ . On dit que ce signal est borné si :

$$\exists F_0 > 0, \forall t > 0; |f(t)| < F_0$$

- Définition 2. Stabilité EBSB (Entrée Bornée-Sortie Bornée) :

Soit un système dont l'entrée est  $e(t)$  et la sortie  $s(t)$ . On dit que ce système est stable EBSB si pour toute entrée  $e(t)$  bornée la sortie  $s(t)$  est bornée.

Remarque : Cela revient à solliciter le système avec une entrée bornée (de type échelon par exemple) et à vérifier que la sortie ne diverge pas.

- Définition 3. Stabilité en réponse libre :

Soit un système de fonction de transfert  $H(p)$ . Sa réponse impulsionnelle est  $h(t)$ . Ce système est stable en réponse libre si :

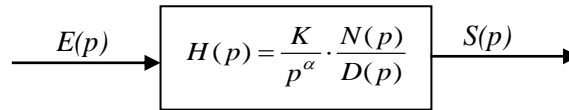
$$\int_0^{+\infty} h(t) < +\infty$$

Remarque : Pour étudier la réponse libre d'un système, il suffit de le solliciter par une impulsion de Dirac et de vérifier que celui-ci revient en position initiale.

## 2.2 Etude de la stabilité :

### Modèle d'étude :

Tout système linéaire (sans retard) peut se mettre sous la forme du schéma bloc ci-dessous.



Avec:

- $K$  le gain  $K > 0$ ;
- $N(p)$  et  $D(p)$  deux polynômes tel que :
- $N(0) = 1$  et  $D(0) = 1$ ;
- $N(p)$  de degré  $n$ ,  $N(p) = 1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n \cdot p^n$  ;
- $D(p)$  de degré  $d$ ,  $D(p) = 1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + a_d \cdot p^d$  ;
- $\alpha$  la classe du système.

Pour un système physique, en vertu du principe de causalité (l'effet ne peut précéder la cause), le degré du dénominateur est supérieur au degré du numérateur ( $d + \alpha > n$ ).

## 2.3 Conditions de la stabilité :

Pour évaluer la stabilité du système au sens EBSB, on perturbe celui-ci par une entrée de type Dirac unitaire :  $e(t) = \delta(t)$ , ou encore  $E(p) = 1$ . La sortie est alors égale à la fonction de transfert du système :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = H(p)$$

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n \cdot p^n}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_d \cdot p^d}$$

$$H(p) = \frac{K'}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n \cdot p^n}{\prod_{i=1}^d (p - p_i)}$$

et la réponse temporelle se met sous la forme :

$$s(t) = \sum_{i=1}^d A_i \cdot t^k \cdot e^{p_i \cdot t} + \sum_{m=1}^{\alpha} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$$

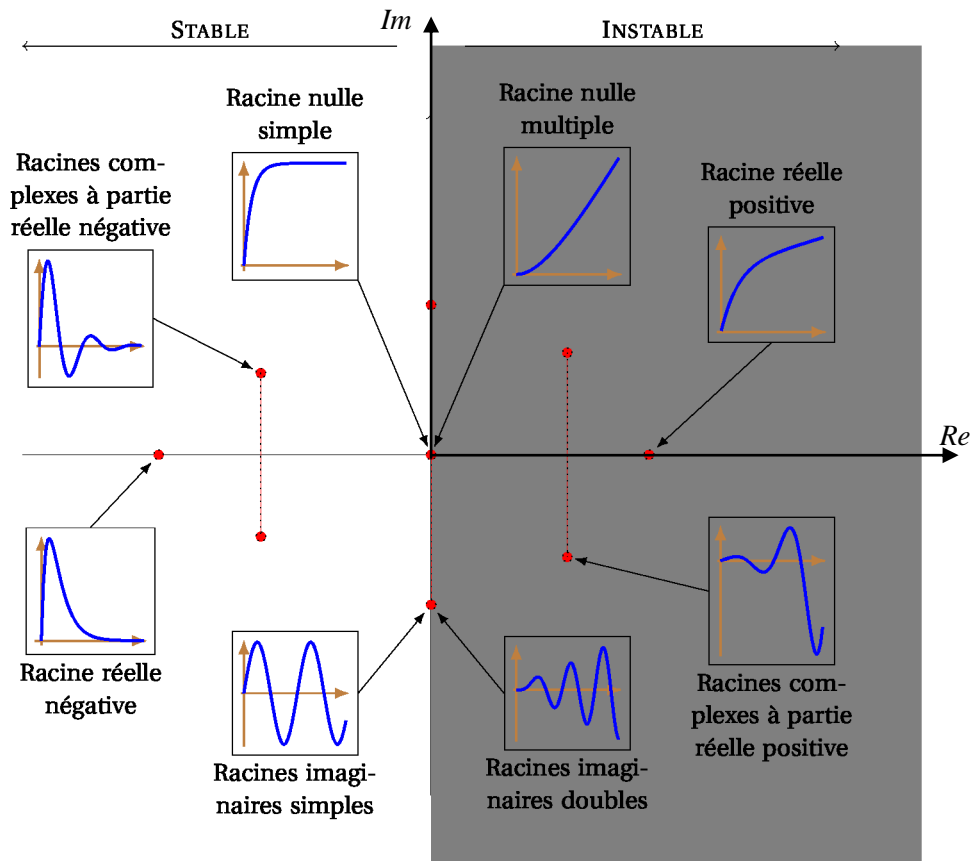
Condition de stabilité : pour que la sortie soit bornée, Les exponentielles doivent toutes être décroissantes donc : tous les pôles  $p_i$  sont à **partie réelle négative**, et si la classe  $\alpha$  est inférieure ou égale à 1 :  $\alpha \leq 1$ .

Remarque :

- On dit que le système est marginalement stable (ou juste instable ou stabilité impropre) si au plus un pôle à sa partie réelle nulle ( $\alpha = 1$ ).

## 2.4 Position des pôles :

La position des pôles dans le plan complexe de la fonction de transfert en boucle fermée nous renseigne sur la stabilité de la fonction de transfert (voir figure ci-dessous). Il suffit donc d'étudier les racines du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée pour savoir si le système est stable ou instable. Mais si on sait résoudre des polynômes de degré 1, 2, 3 voire 4, on ne sait pas déterminer de manière systématique les racines d'un polynôme de degré supérieur mais il existe des outils<sup>1</sup> qui à défaut de nous donner les racines nous indiquent le signe de celles-ci.

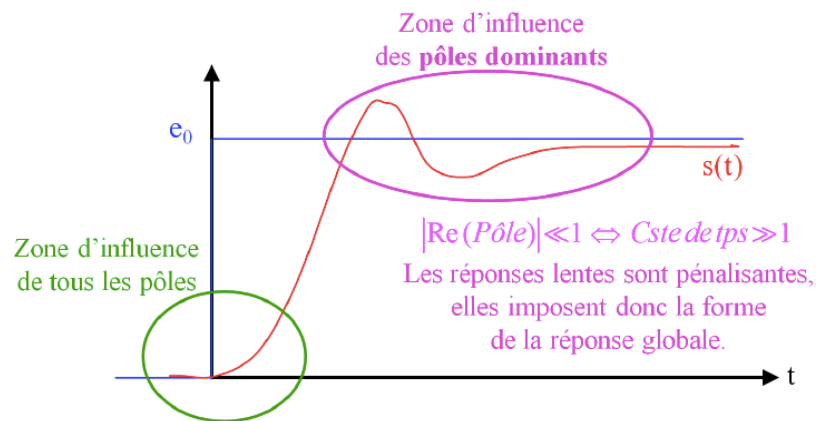


Positions des pôles et stabilité

**Notion de Pôles dominants :** Les pôles dont la partie réelle est proche de l'axe des imaginaires sont les plus lents. Ils sont responsables de la majeure partie de l'écart avec la valeur à convergence : Ce sont les pôles dominants.

Les pôles  $p_d$  dont la partie réelle est, en valeur absolue, très grande devant celle des pôles dominants peuvent alors être négligés.

<sup>1</sup> Le critère de Routh est l'un de ses outils, sa mise en œuvre n'est pas au programme



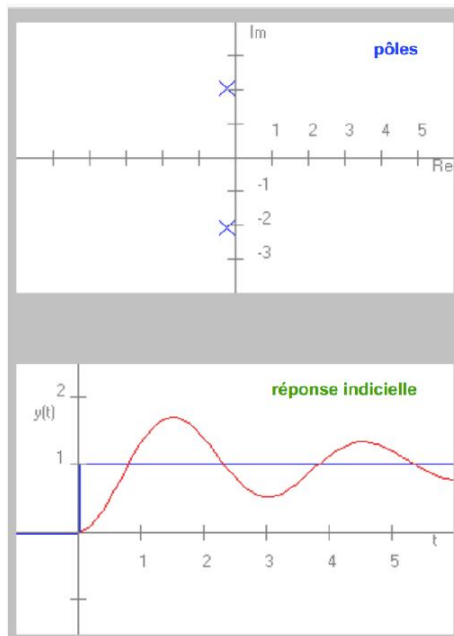
On appelle ces pôles les pôles dominants et ce sont eux qui fixent la forme de la réponse. Les pôles plus éloignés ne jouent que sur la forme du début du régime transitoire :

#### Conséquences pratiques :

Un système d'ordre élevé a, sauf exception, un ou deux pôles dominants et se comporte donc comme un 1<sup>er</sup> ou un 2<sup>nd</sup> ordre ; on peut donc simplifier la fonction transfert d'un système d'ordre élevé en ne conservant que le ou les pôles dominants.

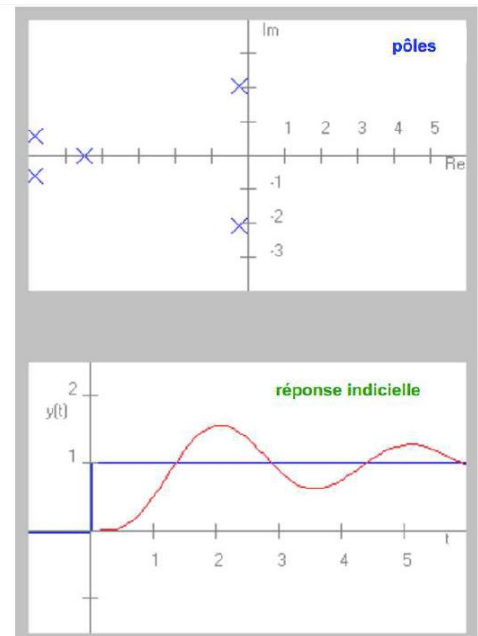
**Un pôle peut être négligé dès qu'il est 3 ou 4 fois supérieur au précédent ;** Négliger les pôles éloignés de l'origine revient, sur le diagramme de Bode, à négliger les fréquences de coupure élevées.

#### Exemple :



Le système A est caractérisé par :

- système du second ordre,
- 2 pôles complexes conjugués,
- dépassement 68%,
- pic à 1,5 seconde.



Le système B est caractérisé par :

- système du cinquième ordre,
- 2 pôles dominants identiques aux pôles de A,
- dépassement 56%,
- pic à 2,1 seconde.

## 2.5 Critères de stabilité :

La connaissance des racines permet de déduire si le système est stable, mais il n'est pas envisageable de déterminer les racines d'un polynôme de degré élevé. Les critères ci-dessous nous permettent de déterminer le signe des racines sans avoir besoin de déterminer les racines. On distingue les critères algébriques et les critères graphiques. Seul un critère graphique est étudié.

### 2.5.1 Critère algébrique

Il permet de déterminer à partir du polynôme du dénominateur de la fonction de transfert le signe des racines de ce polynôme sans avoir à résoudre l'équation  $D(p) = 0$ .

Pour une fonction de transfert en boucle fermée s'écrivant :

$$FTBF(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0}{b_d \cdot p^d + b_{d-1} \cdot p^{d-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0}$$

On déduit l'équation caractéristique :

$$b_d \cdot p^d + b_{d-1} \cdot p^{d-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0 = 0 \text{ avec } b_d > 0$$

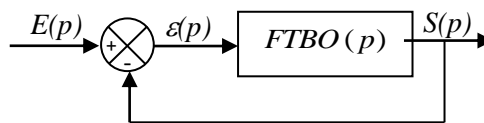
Enoncé (Condition nécessaire de stabilité) :

- Si certains coefficients  $b_i$  sont négatifs ou nuls alors  $D(p)$  a des racines à partie réelle positive : **le système est instable**.
- Si tous les coefficients  $b_i$  sont positifs, on ne peut pas affirmer que les racines de  $D(p)$  sont à partie réelle négative. Cependant cette condition est une condition suffisante pour les systèmes du premier et du second ordre.

### 2.5.2 Critère graphique : critère du revers

Les critères graphiques permettent d'étudier la stabilité d'un système à partir de la représentation graphique de la fonction de transfert en boucle ouverte. Cette étude peut être conduite par exemple à partir des diagrammes de Bode.

Soit le système décrit par le schéma bloc suivant :



On note,  $FTBO(p)$ , la fonction de transfert en boucle ouverte et

$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

La fonction de transfert en boucle fermée.

Nous savons que l'étude de la stabilité se résume à la recherche du signe des racines du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée.

$$D(p) = 0$$

$$1 + FTBO(p) = 0$$

Cette condition peut aussi s'écrire sous la forme :

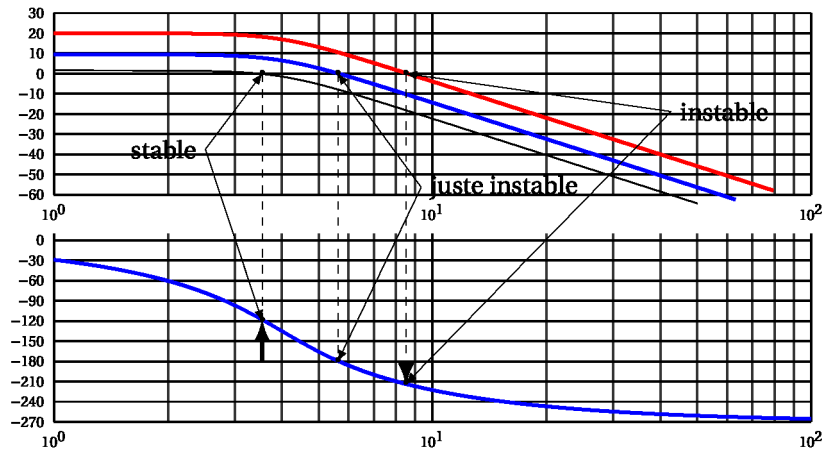
$$FTBO(p) = -1$$

Etudier  $FTBO(p) = -1$  revient à étudier le lieu (le tracé de la fonction de transfert) de la fonction  $FTBO(p)$  par rapport au point  $(-1,0)$  du plan complexe. Le point  $(-1,0)$  est appelé point critique.

La position de ce tracé par rapport au point critique nous renseigne sur la stabilité du système.

L'étude est réalisée sur les diagrammes de Bode.

Un système asservi est stable si, pour la pulsation  $\omega_{0dB}$  définie par  $|H(\omega_{0dB})| = 1$  (soit  $0dB$ ), le déphasage est supérieur à  $-180^\circ$  (voir figures ci-dessous).



Critère du revers à partir des diagrammes de Bode

Remarque : L'utilisation du critère de revers dans le plan de Bode est à manipuler avec précaution, en effet, le tracé est décomposé sur deux graphes et il est obligatoire de s'intéresser aux deux pour évaluer la stabilité.

#### Limites du critère du revers :

Le critère du revers ne peut s'appliquer avec certitude que sur des fonctions de transfert régulières en boucle ouverte, c'est à dire ne possédant pas de pôle ou de zéro à partie réelle positive.

Dans les autres cas il est nécessaire de mettre en œuvre un critère graphique plus complet, le critère de Nyquist (voir la présentation en annexe).

## 2.6 Marges de stabilité :

Les critères ci-dessus sont des critères de stabilité absolue, ils permettent de répondre à la question binaire : le système est-il stable ou instable ?

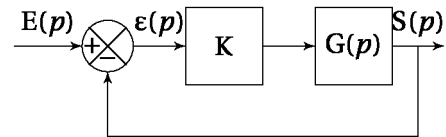
La réponse à cette question ne permet pas de régler et d'optimiser le fonctionnement d'un système. Il est nécessaire, pour cela, d'identifier un ou plusieurs paramètres qui permettent de régler le système asservi afin d'avoir le comportement souhaité en terme d'oscillations de la réponse temporelle.

### 2.6.1 Influence de la position de la FTBO par rapport au point critique :

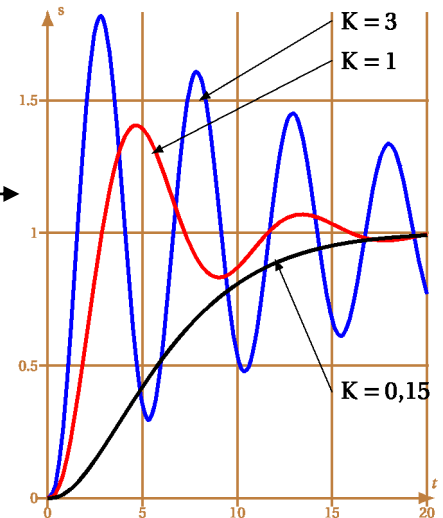
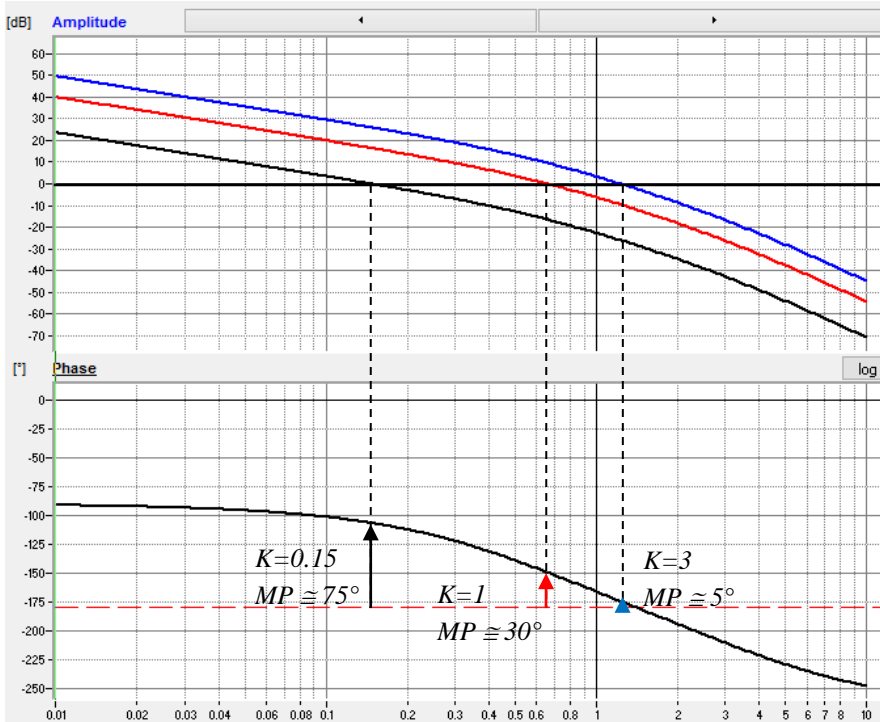
On se propose d'évaluer l'influence de la distance entre le lieu de transfert de la  $FTBO$  et le point critique sur le comportement temporel du système asservi. Soit le système décrit par le schéma bloc ci-contre avec :



$$G(p) = \frac{1}{p \cdot (1 + 2 \cdot p + 0.5 \cdot p^2)}$$



Les figures ci-dessous représentent les diagrammes de Bode de  $FTBO(p) = K \cdot G(p)$  et la réponse temporelle de la sortie pour une entrée en Echelon unitaire pour différentes valeurs du gain  $K$ .



Distances par rapport au point critique et comportement temporel

- courbe n°1 :  $K = 3$ , le lieu de Bode montre une marge de phase nettement insuffisante, la réponse temporelle est très oscillante;
- courbe n°2 :  $K = 1$ ;
- courbe n°3 :  $K = 0,15$ , le lieu de Bode montre une marge de phase de  $75^\circ$ , la réponse temporelle n'est pas oscillante.

Les réponses temporelles sont caractéristiques d'un système stable mais on constate que le comportement temporel est d'autant plus oscillant que le tracé du lieu de Bode montre une marge de phase réduite.

Il est donc possible, à partir de la représentation fréquentielle, de prévoir l'allure de la réponse temporelle et d'ajuster le système pour avoir un comportement correct, il suffit pour cela de régler une « distance » minimale entre le point critique et le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Cette distance est appréciée par les deux marges de stabilité : la marge de gain  $MG$  et la marge de phase  $MP$ .

Les valeurs usuelles de réglage des marges de gain et de phase sont :

- **Marge de Gain** :  $MG$  de 10 dB à 15 dB;
- **Marge de Phase** :  $MP$  de 40° à 50° ( parfois 45° à 65 °).

### 2.6.2 Marges de stabilité sur les diagrammes de Bode :

On note :

- $\omega_{180}$ , la pulsation telle que  $\arg(FTBO(j \cdot \omega_{180})) = -180^\circ$  ;
- $\omega_{0dB}$ , la pulsation telle que :  $20 \cdot \log|FTBO(j \cdot \omega_{0dB})| = 0 \text{ dB}$

#### Marge de Gain :

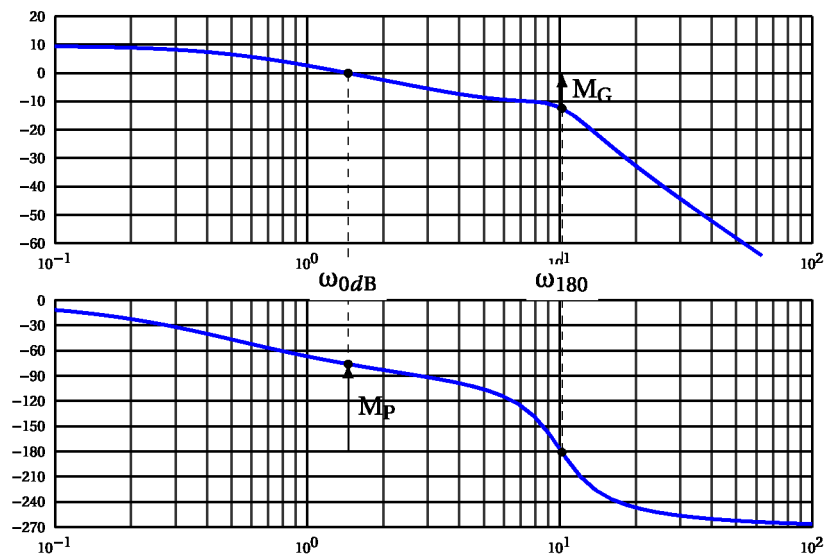
La marge de gain est mesurée sur le diagramme d'amplitude (figure ci-dessous), entre la courbe de gain de la  $FTBO$  et l'axe des abscisses pour la pulsation  $\omega_{180}$ . Le sens positif est compté de la courbe vers l'axe des abscisses.

$$MG = -20 \cdot \log|FTBO(j \cdot \omega_{180})|$$

#### Marge de Phase :

La marge de phase est mesurée sur le diagramme de Phase entre l'ordonnée  $-180^\circ$  et la courbe de phase de la  $FTBO$  pour la pulsation  $\omega_{0dB}$ . Le sens positif est compté de l'ordonnée  $-180^\circ$  à la courbe.

$$MP = \arg(FTBO(j \cdot \omega_{0dB})) - (-180^\circ)$$



Marges de stabilité sur les diagrammes de Bode

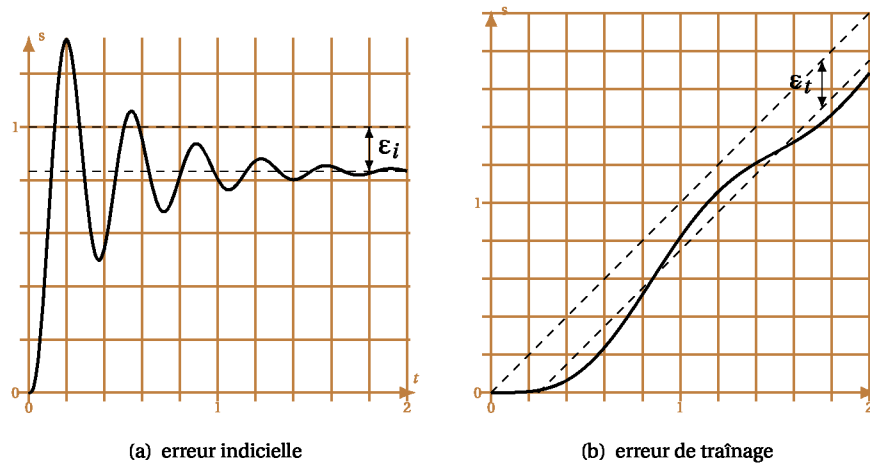
## 3 Précision :

### 3.1 Position du problème :

La précision est une caractéristique prépondérante d'un système asservi ou d'une régulation. La précision est évaluée aussi bien vis à vis de l'entrée de consigne que vis à vis des

perturbations. Un système doit être précis vis à vis de l'entrée et insensible aux perturbations, elles ne doivent pas dégrader la réponse finale. On distingue :

- L'erreur statique : c'est l'erreur en régime permanent entre la sortie et la loi d'entrée. Pour déterminer cette erreur on soumet le système à des entrées canoniques :
  - Echelon, on parle alors d'erreur indicielle (figure (a) ci-dessous),
  - Rampe, erreur de traînage ou erreur de poursuite (figure (b) ci-dessous),



### Erreurs statiques

- L'erreur dynamique : c'est l'écart instantané entre la sortie et l'entrée lors de la phase transitoire suivant l'application de l'entrée ou après une perturbation (hors programme).

## 3.2 Données :

La précision est évaluée par l'écart  $\varepsilon(t)$  mesuré pour un système à retour unitaire entre  $e(t)$  et  $s(t)$ . Dans le cas d'un système à retour non unitaire il se mesure entre  $e(t)$  et  $m(t)$ , avec  $m(t)$  la mesure de  $s(t)$ .

Déterminons dans les deux cas l'écart  $\varepsilon(t)$  (pour une perturbation nulle).

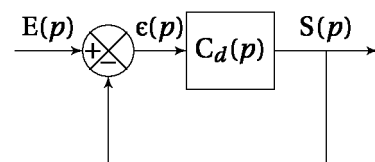
### 3.2.1 Cas du retour unitaire :

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - C_d(p) \cdot \varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = \left( \frac{1}{1 + C_d(p)} \right) \cdot E(p)$$

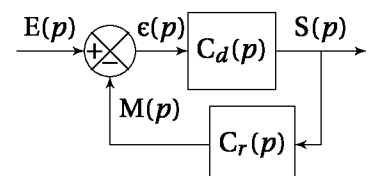
avec ici :  $FTBO(p) = C_d(p)$



### 3.2.2 Cas du retour non unitaire :

$$\varepsilon(p) = E(p) - M(p)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - C_d(p) \cdot C_r(p) \cdot \varepsilon(p)$$



$$\varepsilon(p) = \left( \frac{1}{1 + C_d(p) \cdot C_r(p)} \right) \cdot E(p)$$

avec ici :  $FTBO(p) = C_d(p) \cdot C_r(p)$

soit finalement dans les deux cas :

$$\varepsilon(p) = \left( \frac{1}{1 + FTBO(p)} \right) \cdot E(p)$$

L'écart dépend de la  $FTBO$  et de la nature de l'entrée.

Pour la suite, nous ne traiterons que le cas de système à retour unitaire, l'étude étant identique pour les systèmes à retour non unitaire.

Nous nous placerons dans le cas général pour lequel la  $FTBO$  peut être mise sous la forme :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec

- $K > 0$  : le gain,
- $N(p)$  : un polynôme de degré  $n$  tel que  $N(0) = 1$ ,
- $D(p)$  : un polynôme de degré  $d$  tel que  $D(0) = 1$ ,
- $\alpha \geq 0$  : la classe du système.

Remarque : Pour un système physique le degré du dénominateur  $d + \alpha$  est supérieur au degré du numérateur  $n$ .

### 3.3 Erreur en régime permanent, erreur statique :

#### 3.3.1 Définition :

L'erreur en régime permanent est la limite quand  $t$  tend vers l'infini de la différence entre  $e(t)$  et  $s(t)$  :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\varepsilon(t))$$

Un système sera précis si cette différence tend vers 0.

#### 3.3.2 Calculs préalables :

Le théorème de la valeur finale permet d'écrire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\varepsilon(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

Remarque importante : ce théorème ne peut être utilisé que si la sortie converge, c'est à dire si le système est stable. Nous supposons donc pour la suite que le système est stable.

Ici on peut donc écrire pour l'écart :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} \cdot E(p) = \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}} \cdot E(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \cdot E(p)$$

d'où pour l'erreur statique :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( p \cdot \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \cdot E(p) \right)$$

finalement en se rappelant que :  $N(0) = 1$  et  $D(0) = 1$

En conclusion, l'erreur statique dépend de la nature de l'entrée  $E(p)$ , de la classe  $\alpha$  de la fonction de transfert en boucle ouverte et du gain  $K$  de la *FTBO*.

### 3.3.3 Erreur indicielle - réponse à un échelon :

On nomme erreur indicielle  $\varepsilon_i$ , l'erreur statique relative à une entrée en échelon  $e(t) = E_0 \cdot u(t)$  avec  $u(t)$  la fonction de Heaviside.

Le système étant stable (par hypothèse) on peut écrire :

$$\varepsilon_i = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K} \cdot E(p) \right)$$

avec  $L(e(t)) = E(p) = \frac{E_0}{p}$

$$\varepsilon_i = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K} \cdot \frac{E_0}{p} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^\alpha \cdot E_0}{p^\alpha + K} \right)$$

On peut considérer deux cas en fonction de la classe du système.

- **Système de classe 0** ( $\alpha = 0$ ) : la *FTBO* ne comporte pas d'intégration

$$\varepsilon_i = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^0 \cdot E_0}{p^0 + K} \right) = \frac{1}{1 + K} \cdot E_0$$

L'erreur est non nulle et dépend du gain  $K$  de la *FTBO*, elle est d'autant plus petite que le gain est important.

- **Système de classe > 0** ( $\alpha > 0$ ) : la *FTBO* comporte au moins une intégration dans la boucle

$$\varepsilon_i = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^\alpha \cdot E_0}{p^\alpha + K} \right) = 0$$

L'erreur est donc nulle à l'infini quelque soit le gain  $K$  de la *FTBO*.

Remarque : par abus de langage, on appelle souvent erreur statique, l'erreur indicielle.

### 3.3.4 Erreur de trainage - réponse à une rampe :

L'erreur de trainage (aussi nommée erreur de poursuite, de suivi)  $\varepsilon_r$ , est l'erreur mesurée entre une entrée de type rampe  $e(t) = A_0 \cdot t \cdot u(t)$  et la sortie.

Comme précédemment:

$$\varepsilon_r = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K} \cdot E(p) \right)$$

avec  $L(e(t)) = E(p) = \frac{A_0}{p^2}$

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K} \cdot \frac{A_0}{p^2} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^{\alpha-1} \cdot A_0}{p^\alpha + K} \right)$$

l'erreur de trainage dépend comme l'erreur indicielle du gain  $K$  et de la classe du système. Nous pouvons distinguer trois cas :

- **Système de classe 0** ( $\alpha = 0$ ) : la FTBO ne comporte pas d'intégration.

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^{-1} \cdot A_0}{p^0 + K} \right) = +\infty$$

L'écart tend vers  $+\infty$ , la réponse temporelle de la sortie s'écarte de la consigne en rampe.

- **Système de classe 1** ( $\alpha = 1$ ) : la FTBO comporte une intégration

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^0 \cdot A_0}{p^1 + K} \right) = \frac{A_0}{K}$$

L'erreur est constante, la sortie est parallèle à l'entrée, décalée de  $\varepsilon_t$ .

- **Système de classe > 1** ( $\alpha > 1$ ) : la FTBO comporte au moins deux intégrations.

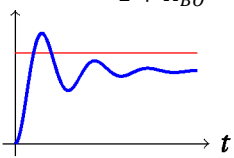
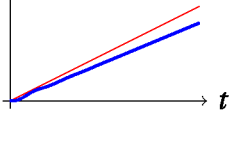
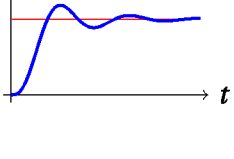
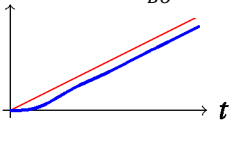
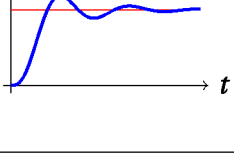
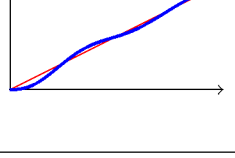
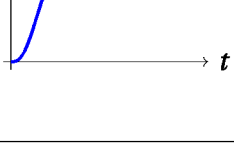
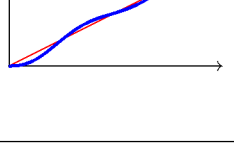
$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^{\alpha-1} \cdot A_0}{p^\alpha + K} \right) = 0$$

L'erreur de trainage est nulle, la sortie rattrape l'entrée lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

### 3.3.5 Tableau récapitulatif :

Le tableau page suivante récapitule les différentes erreurs et l'allure des réponses temporelles correspondantes.

Il ne faut pas déduire rapidement du tableau ci-dessous qu'il suffit de corriger le système en rajoutant une intégration pour que le système soit précis, en effet chaque intégration ajoute aussi un déphasage de  $-90^\circ$ , le système risque donc de devenir instable. Ce tableau n'a de sens que si le système est stable !

Classe	Échelon $e(t) = E_0 \cdot u(t)$	Rampe $e(t) = A \cdot t \cdot u(t)$
$\alpha = 0$	$\varepsilon_i = \frac{E_0}{1 + K_{BO}}$ 	$\varepsilon_t = +\infty$ 
$\alpha = 1$	$\varepsilon_i = 0$ 	$\varepsilon_t = \frac{A}{K_{BO}}$ 
$\alpha = 2$	$\varepsilon_i = 0$ 	$\varepsilon_t = 0$ 
$\alpha > 2$	$\varepsilon_i = 0$ 	$\varepsilon_t = 0$ 

Influence de la classe sur l'erreur

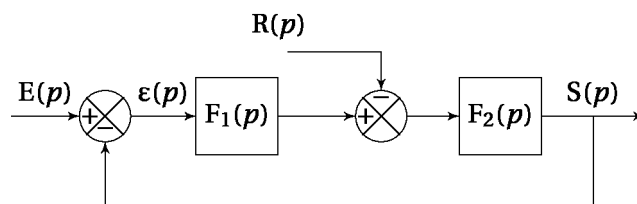
### 3.4 Effet d'une perturbation sur la précision :

#### 3.4.1 Présentation du problème :

On se propose d'étudier l'effet d'une perturbation sur la précision d'un système et l'influence de la forme de la fonction de transfert sur l'impact de cette perturbation. A partir du modèle d'étude décrit par le schéma blocs et les fonctions de transfert suivants :

$$F_1(p) = \frac{K_1 \cdot N_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)} \quad \text{et} \quad F_2(p) = \frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)}$$

avec  $N_1(0) = D_1(0) = 1$ ,  $N_2(0) = D_2(0) = 1$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ ,  $K_1 > 0$  et  $K_2 > 0$ .



Déterminons l'écart  $\varepsilon(t)$ :

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) = E(p) - F_2(p) \cdot (F_1(p) \cdot \varepsilon(p) - R(p))$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot E(p) + \frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot R(p)$$

L'erreur due à la perturbation s'ajoute à celle relative à l'entrée (résultat général que l'on retrouve par le théorème de superposition appliqué aux systèmes linéaires). Nous limiterons notre étude au cas d'une perturbation constante, les autres types de perturbations se traitant de la même manière.

### 3.4.2 Perturbation constante :

A partir du théorème de superposition, on sait que la réponse obtenue pour un système linéaire à deux entrées est la somme des sorties de chaque entrée prise séparément.

Pour étudier l'effet de la perturbation seule, il suffit de poser  $e(t) = 0$ . On en déduit l'écart relatif à la perturbation :

$$\varepsilon(p) = \frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot R(p)$$

On choisit d'étudier le comportement pour une perturbation constante :

$$r(t) = R_0 \cdot u(t)$$

soit dans le domaine de Laplace :

$$R(p) = \frac{R_0}{p}$$

l'erreur relative à la perturbation s'écrit donc :

$$\varepsilon(p) = \frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot \frac{R_0}{p}$$

en remplaçant  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  :

$$\varepsilon_p(p) = \frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_1 \cdot N_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)} \cdot \frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)}} \cdot \frac{R_0}{p}$$

$$\varepsilon_p(p) = \frac{K_2 \cdot N_2(p) \cdot p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p) \cdot p^{\alpha_2} \cdot D_2(p) + K_1 \cdot N_1(p) \cdot K_2 \cdot N_2(p)} \cdot \frac{R_0}{p}$$

Nous supposons comme dans l'étude précédente que le système est stable, il est donc possible d'utiliser le théorème de la valeur finale pour déterminer l'écart statique dépendant de la perturbation.

$$\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\varepsilon(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

avec  $N_i(0) = D_i(0) = 1$

$$\varepsilon_p(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( p \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1} \cdot p^{\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \cdot \frac{R_0}{p} \right)$$

$$\varepsilon_p(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right)$$



On constate que l'erreur relative à la perturbation dépend principalement de la classe de la fonction de transfert en amont de la perturbation  $\alpha_1$ .

On distingue deux cas :

- $\alpha_1 = 0$  : La fonction de transfert  $F_1(p)$  en amont de la perturbation ne possède pas d'intégration.

$$\varepsilon_p(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^{\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right)$$

- si  $\alpha_2 = 0$

$$\varepsilon_p(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^0 + K_1 \cdot K_2} \right) = R_0 \cdot \frac{K_2}{1 + K_1 \cdot K_2}$$

- si  $\alpha_2 > 0$

$$\varepsilon_p(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^{\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right) = \frac{R_0}{K_1}$$

L'erreur statique relative à la perturbation est non nulle dans les deux cas.

- $\alpha_1 > 0$  : La fonction de transfert  $F_1(p)$  en amont de la perturbation possède au moins une intégration.

$$\varepsilon_p(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right) = 0$$

l'erreur statique relative à la perturbation est nulle à l'infini.

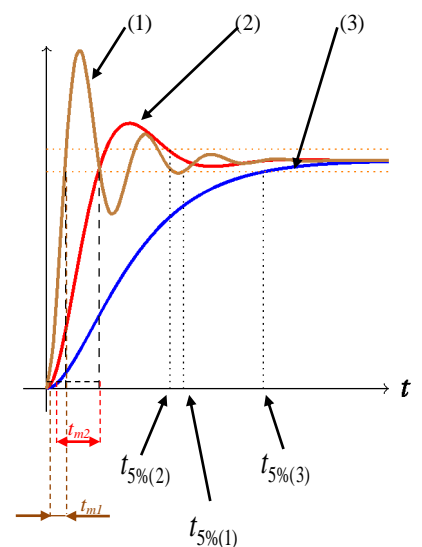
**En conclusion :** pour que l'erreur permanente ne dépende pas de la perturbation, il faut au moins une intégration en amont de la perturbation.

## 4 Rapidité :

### 4.1 Temps de réponse-temps de montée :

- Temps de réponse : c'est le temps mis pour que la sortie atteigne la valeur finale à 5 % près ;
- Temps de montée : c'est le temps mis par la sortie pour passer de 5 % à 95 % de la valeur finale.

Evaluer la rapidité d'un système revient en général à déterminer le temps de réponse à 5 % ( $t_{5\%}$ ) pour une entrée de type échelon. Si on sait évaluer cette quantité pour les systèmes du premier ordre ( $t_{5\%} \approx 3 \cdot \tau$ ) et du second ordre (avec l'abaque du temps de réponse), pour des systèmes d'un ordre supérieur, il n'existe pas



de relation directement applicable.

Le temps de montée peut lui aussi permettre d'évaluer la rapidité du système mais cette mesure ne prend pas en compte les oscillations de la réponse (voir figure ci-contre). On remarque que des systèmes ayant un temps de réponse analogue peuvent avoir des temps de montée notablement différents.

#### 4.2 Temps de montée et bande passante :

Un système asservi se comporte comme un filtre passe-bas, c'est à dire un système linéaire qui ne «laisse passer» que les basses fréquences, les hautes fréquences sont fortement atténuées.

On caractérise les filtres par la bande passante à  $-3dB$ .

On se propose de montrer que la bande passante et le temps de montée sont corrélés, plus la bande passante de la *FTBF* est importante, plus le temps de montée est faible. Cette relation est déjà connue pour les systèmes du premier ordre, en effet, pour un système en boucle fermée dont la fonction de transfert s'écrit :

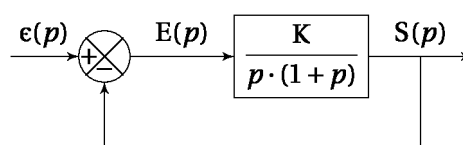
$$H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

Alors on sait que:

- le temps de réponse à 5 % est :  $t_{5\%} \approx 3 \cdot \tau$
- la bande passante à  $-3 dB$  est :  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

On constate bien, que plus la bande passante augmente, plus le temps de réponse diminue. Dans les autres cas, les calculs sont plus complexes, nous nous limiterons donc à montrer sans démonstration que pour un système du second ordre, la relation entre la bande passante et le temps de montée est de même nature.

Pour l'évaluer, nous allons étudier le cas du système du second ordre à retour unitaire ci-dessous.

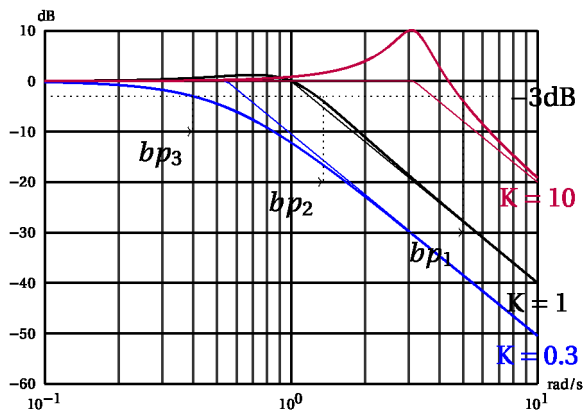


$$FTBF(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K} + \frac{p^2}{K}}$$

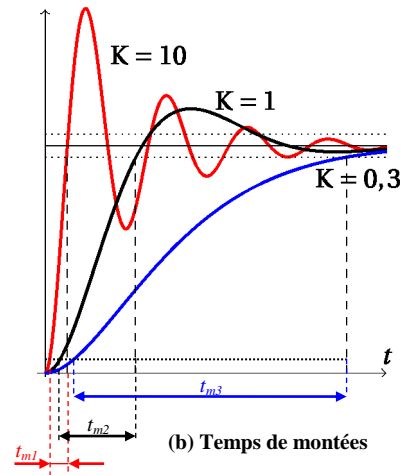
Par identification avec la forme canonique, on obtient :

- $\omega_n = \sqrt{K}$  : la pulsation propre;
- $a = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{K}}$  : le coefficient d'amortissement.

On constate que la réponse temporelle (figure (b) ci-dessous) et la réponse fréquentielle (figure (a)) dépendent principalement de  $K$ , plus  $K$  est grand, plus la réponse est rapide (le temps de montée diminue mais les oscillations augmentent) et plus la bande passante est grande.



(a) Diagramme d'amplitude - bande passante



(b) Temps de montées

### Bande passante et temps de montée

On peut tenter de généraliser en disant que si l'on souhaite diminuer le temps de montée du système, il faut augmenter la bande passante mais il ne faut pas oublier que temps de montée et temps de réponse ne sont pas directement corrélés.