

5.1 Analyse fréquentielle des systèmes linéaires

Sommaire

1 Réponse fréquentielle :	2
1.1 Fonction de transfert complexe :	3
1.2 Lieux de transfert :	3
1.2.1 Diagrammes de Bode :	4
2 Etude des SLCI à partir des diagrammes de Bode :	5
2.1 Système du premier ordre :	5
2.1.1 Représentation fréquentielle :	5
2.1.2 Premier ordre au numérateur :	6
2.2 Système du second ordre :	7
2.2.1 Rappels :	7
2.2.2 Rappel - réponse temporelle :	7
2.2.3 Représentation fréquentielle :	8
2.3 Intégrateur :	14
2.4 Dérivateur :	15
2.5 Retard pur :	15
2.5.1 Influence d'un retard sur le tracé d'un lieu de Bode :	16
2.6 Généralisation du tracé des diagrammes de Bode :	17

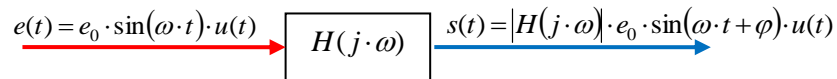
1 Réponse fréquentielle :

L'objectif de l'analyse fréquentielle est d'étudier le comportement d'un système à partir de sa réponse à une sollicitation sinusoïdale de la forme :

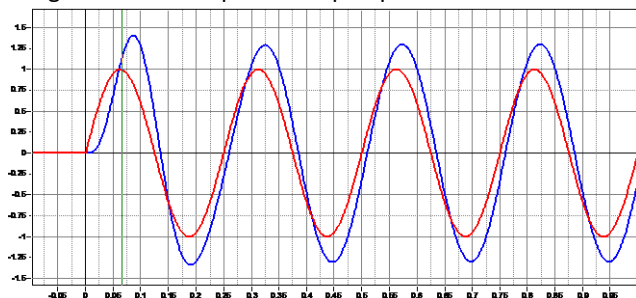
$$e(t) = e_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)$$

Avec $u(t)$ fonction de Heaviside

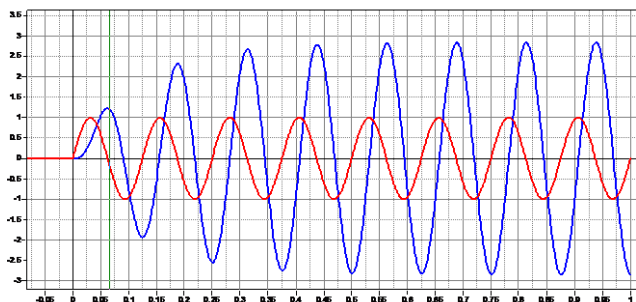
On sollicite donc, le système inconnu avec une entrée sinusoïdale et on relève la réponse temporelle de la sortie pour chacune des fréquences.



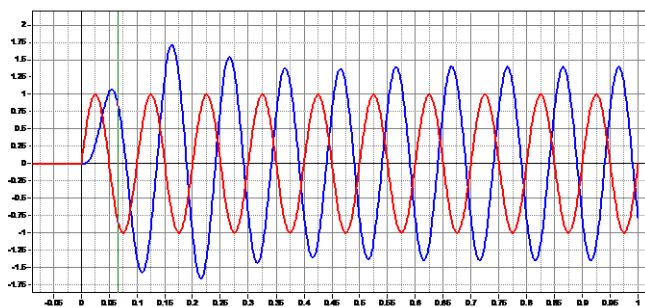
La figure ci-dessous présente quelques mesures réalisées avec une même fonction transfert $H(p)$.



$$\omega \approx 25 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad f = 4 \text{ Hz}$$



$$\omega \approx 50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad f = 8 \text{ Hz}$$



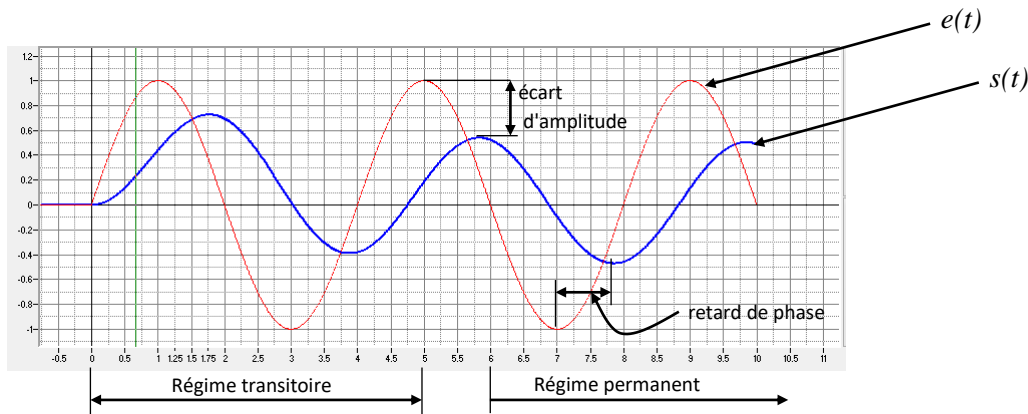
$$\omega \approx 62 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad f = 10 \text{ Hz}$$

On constate que la réponse (pour le régime permanent) à l'allure d'une sinusoïde de même pulsation mais en retard par rapport au signal d'entrée.

On remarque sur ces tracés :

- La présence de deux zones :
 - Le régime transitoire (la phase de démarrage) ;
 - Le régime permanent ou régime établi ;
- Que le déphasage du régime permanent avec le signal d'entrée augmente avec la pulsation ;
- Que l'amplitude de la sortie varie avec la pulsation.

Pour caractériser la réponse fréquentielle du système il suffit alors d'étudier l'évolution pour le régime permanent de la variation d'amplitude et du déphasage entre le signal d'entrée et la sortie.

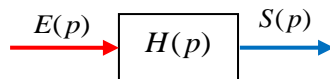


Pour un système linéaire, nous savons que la sortie en régime permanent est de même nature que l'entrée, l'équation temporelle du régime permanent de la sortie se met donc sous la forme :

$$s(t) = |H(j \cdot \omega)| \cdot e_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi(\omega)) \cdot u(t)$$

On remarque ici que le déphasage est aussi une fonction de ω .

1.1 Fonction de transfert complexe :



Soit un système linéaire continu invariant (SLCI) connu par sa fonction de transfert dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert du système est par définition :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

On note $E(p)$ et $S(p)$ les transformées dans le domaine de Laplace des fonctions temporelles $e(t)$ et $s(t)$ et $H(p)$ la fonction de transfert.

On appelle fonction de transfert complexe (ou transmittance isochrone) la fonction obtenue en remplaçant la variable de Laplace p par le terme imaginaire pur $j \cdot \omega$:

$$H(j \cdot \omega) = \frac{S(j \cdot \omega)}{E(j \cdot \omega)}$$

Cette fonction est une fonction complexe de la variable ω , comme toute fonction complexe, pour en réaliser l'étude, on peut soit s'intéresser :

- À la partie réelle et à la partie imaginaire,
- Au module et à l'argument.

1.2 Lieux de transfert :

On appelle lieux de transfert, le tracé des différentes représentations graphiques de la fonction de transfert $H(j \cdot \omega)$. On distingue principalement trois représentations graphiques :

- Les diagrammes de BODE;
- Le diagramme de BLACK;
- Le diagramme de NYQUIST.

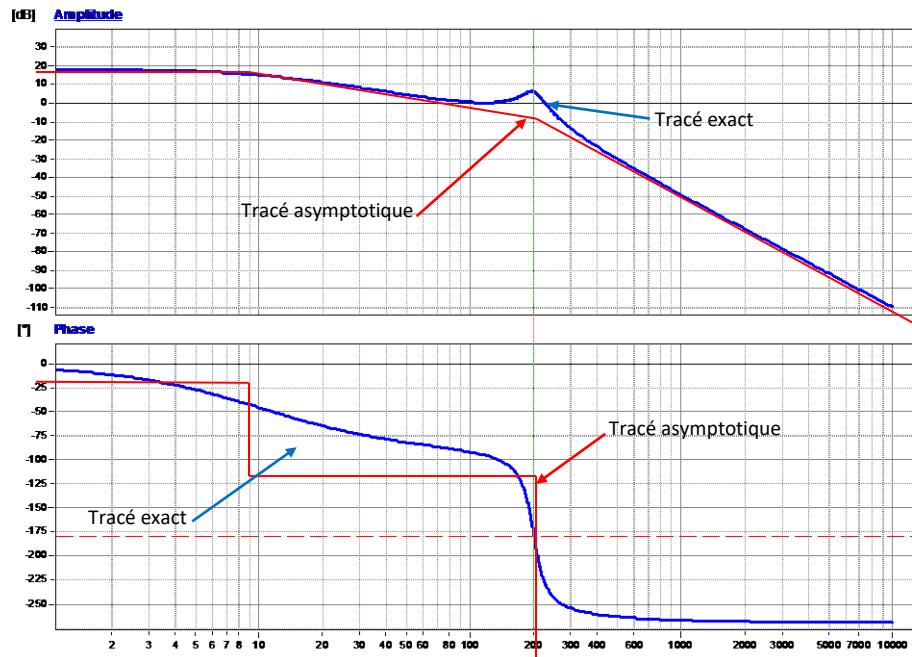
Seuls les diagrammes de Bode seront étudiés par la suite.

À partir de ces représentations graphiques, nous pourrions caractériser le comportement global du système linéaire (passe bas, passe bande, résonance, ...).

1.2.1 Diagrammes de Bode :

Les diagrammes de Bode représentent séparément le module et la phase de la fonction $H(j\omega)$. On note :

- $A(\omega) = |H(j\omega)|$, le module,
- $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$, l'argument



Pour ces diagrammes :

L'abscisse est une échelle logarithmique de la pulsation : $\log_{10}(\omega)$;

- L'ordonnée du diagramme de gain est graduée en décibels (dB) :

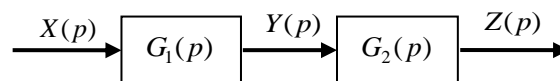
$$G(dB) = 20 \cdot \log_{10}|H(j\omega)|$$

- L'ordonnée du diagramme de phase, en degré ou radian.

On superpose en général au tracé exact le tracé asymptotique, celui-ci est souvent suffisant pour analyser la fonction.

Propriétés des diagrammes de Bode :

Soit un système linéaire décrit par le schéma bloc ci-dessous :



$$G(p) = G_1(p) \cdot G_2(p) \text{ soit en complexe : } G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$$

D'où le module réel :

$$G(j\omega) = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)|$$

et le gain en dB :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log|G_1(j\omega)| + 20 \cdot \log|G_2(j\omega)|$$

puis l'argument :

$$\phi(\omega) = \arg(G_1(j\omega)) + \arg(G_2(j\omega))$$

Graphiquement, il suffit donc d'ajouter les diagrammes de Bode des fonctions $G1(p)$ et $G2(p)$ aussi bien pour le diagramme de gain que pour le diagramme de phase pour obtenir les diagrammes de $G(p)$

2 Etude des SLCI à partir des diagrammes de Bode :

2.1 Système du premier ordre :

Un système du premier ordre est régi par une équation différentielle du premier ordre du type :

$$s(t) + \tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} = K \cdot e(t)$$

Où :

- K est appelé le gain statique du système,
- τ est appelée constante de temps du système,

On pose : $L(e(t)) = E(p)$ et $L(s(t)) = S(p)$.

On se place dans les conditions de Heaviside.

Fonction de transfert et schéma bloc d'un système du premier ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$


2.1.1 Représentation fréquentielle :

On obtient la fonction de transfert complexe en posant $p = j \cdot \omega$:

$$H(j \cdot \omega) = \frac{S(j \cdot \omega)}{E(j \cdot \omega)} = \frac{K}{1 + j \cdot \tau \cdot \omega}$$

et on en déduit :

- La partie réelle :

$$\operatorname{Re}(H(j \cdot \omega)) = \frac{K}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}$$

- Le module :

$$|H(j \cdot \omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}$$

- Le gain en dB :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log \left| \frac{K}{1 + j \cdot \tau \cdot \omega} \right| = 20 \cdot \log(K) - 20 \cdot \log \sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}$$

- la partie imaginaire :

$$\operatorname{Im}(H(j \cdot \omega)) = -\frac{K \cdot \tau \cdot \omega}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}$$

- l'argument :

$$\arg(H(j \cdot \omega)) = -\arctan(\tau \cdot \omega)$$

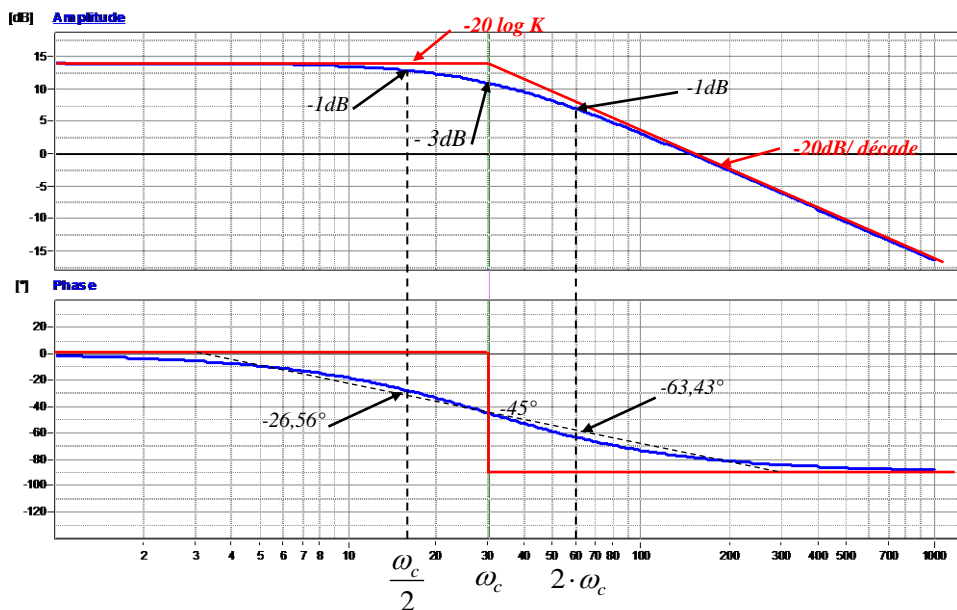
Diagramme de gain : le diagramme de gain présente deux asymptotes :

- Une horizontale lorsque $\omega \rightarrow 0$: $\lim(G_{dB}(\omega)) \rightarrow 20 \cdot \log K$;
- Une asymptote de pente -20 dB/décade lorsque $\omega \rightarrow \infty$;
- Les asymptotes se croisent pour la pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$
- Le diagramme asymptotique de gain est assez proche de la courbe réelle et suffit en général pour étudier la fonction ;

- Pour la pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$, l'écart par rapport au point d'intersection des asymptotes est de $-3dB$;
- Pour les pulsations double $2 \cdot \omega_c$ et moitié $\frac{\omega_c}{2}$ l'écart est de $-1dB$ par rapport aux asymptotes.

Diagramme de phase : le diagramme de phase présente lui aussi deux asymptotes :

- Lorsque $\omega \rightarrow 0$: $\lim(\phi(\omega) \rightarrow 0)$;
- Lorsque $\omega \rightarrow \infty$: $\lim(\phi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2} rad = -90^\circ)$.
- Le diagramme asymptotique à la forme d'une marche d'escalier, il n'est pas suffisamment précis pour représenter correctement l'évolution de la phase. Pour mieux approcher le tracé, il est possible de tracer le segment passant par les points $\left(\log\left(\frac{1}{10 \cdot \tau}\right), 0\right)$ et $\left(\log\left(\frac{10}{\tau}\right), -90\right)$ (en pointillés sur le graphe, attention ce n'est pas une tangente).
- Quelques valeurs particulières de l'argument :
 - Pulsation de cassure : $\phi(\omega_c) = -45^\circ$
 - Pulsation moitié : $\phi\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = -\arctan\left(\tau \cdot \frac{\omega_c}{2}\right) = -26,56^\circ$
 - Pulsation double : $\phi(2 \cdot \omega_c) = -\arctan(2 \cdot \tau \cdot \omega_c) = -63,43^\circ$



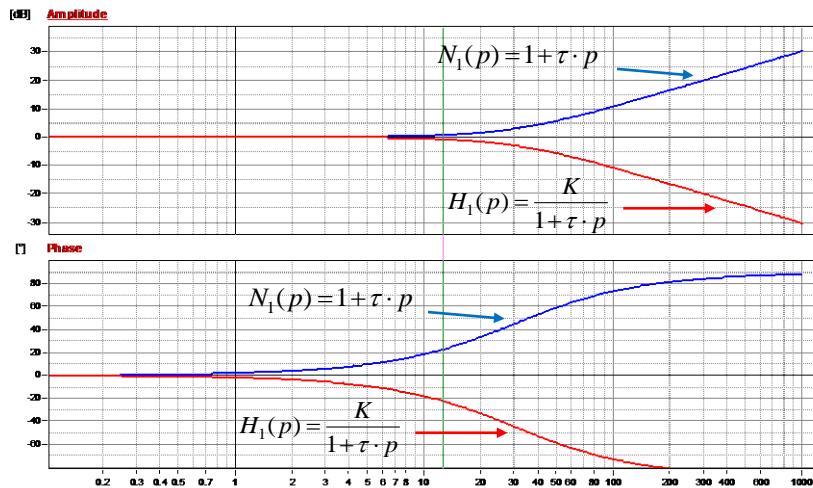
2.1.2 Premier ordre au numérateur :

Soit la fonction définie par le polynôme du premier degré :

$$N_1(p) = 1 + \tau \cdot p$$

On se propose de comparer ce polynôme à la fonction de transfert du premier ordre :

$$H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$



- Le module se déduit directement de : $|N_1(j \cdot \omega)| = \left| \frac{1}{H_1(j \cdot \omega)} \right|$, soit en décibel

$$20 \cdot \log(|N_1(j \cdot \omega)|) = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{|H_1(j \cdot \omega)|}\right) = -20 \cdot \log(|H_1(j \cdot \omega)|)$$

- L'argument se déduit de la même manière

$$\arg(N_1(j \cdot \omega)) = \arg\left(\frac{1}{H_1(j \cdot \omega)}\right) = -\arg(H_1(j \cdot \omega))$$

On constate donc que le tracé des diagrammes de Bode d'un polynôme du premier ordre est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du diagramme de Bode d'une fonction de transfert du premier ordre (pour un gain unitaire $K=1$). Cela est généralisable quel que soit l'ordre de la fonction de transfert.

2.2 Système du second ordre :

2.2.1 Rappels :

Un système du second ordre est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre :

$$s(t) + \frac{2 \cdot a}{\omega_n} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2} = K \cdot e(t)$$

Avec

- K : gain
- ω_n : pulsation propre $rad.s^{-1}$
- a : coefficient (facteur) d'amortissement

La fonction de transfert s'écrit :

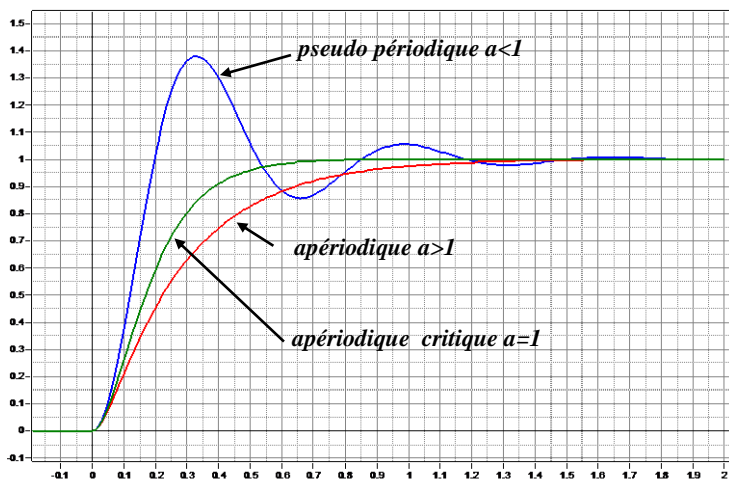
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot a}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}$$

2.2.2 Rappel - réponse temporelle :

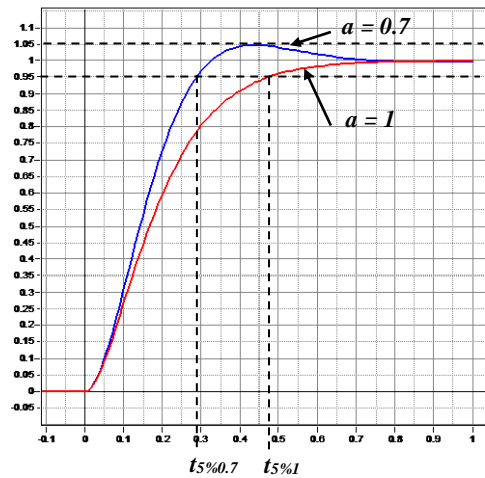
L'allure temporelle de la sortie dépend du facteur d'amortissement a :

- $0 < a < 1$: réponse temporelle oscillatoire amortie (pseudo périodique) ;
- $a = 1$: réponse temporelle apériodique critique ;

- $a > 1$: réponse apériodique.



Influence du coefficient d'amortissement



Temps de réponse minimal

Pour la réponse temporelle pseudo périodique ($0 < a < 1$), on peut noter :

- Le $k^{ième}$ dépassement relatif : $D_{k\%} = \frac{s_{max} - s_{\infty}}{s_{\infty}} = e^{\frac{-a \cdot k \cdot \pi}{\sqrt{1-a^2}}}$;
- La pseudo période : $T_p = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-a^2}}$;
- L'instant du premier maximum : $T_{D1} = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-a^2}}$.

Le temps de réponse minimum sans dépassement est obtenu pour $a = 1$.

Le temps de réponse minimum est obtenu lorsque la réponse temporelle est tangente à la limite supérieure de l'encadrement ($1.05 \cdot s_{\infty}$), pour le premier dépassement, alors :

$$D_{1\%} = e^{\frac{-a \cdot \pi}{\sqrt{1-a^2}}} = 0.05 \text{ soit } a = 0.6901067 \approx 0.7 \text{ ce n'est pas } \frac{\sqrt{2}}{2} !$$

2.2.3 Représentation fréquentielle :

À partir de la fonction de transfert d'un second ordre on détermine la fonction de transfert complexe :

$$H(j \cdot \omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \cdot 2 \cdot a \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}$$

On déduit :

- La partie réelle :

$$\text{Re}(\omega) = \frac{K \cdot \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2 \cdot a \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

- La partie imaginaire :

$$\text{Im}(\omega) = \frac{K \cdot \left(2 \cdot a \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2 \cdot a \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

- Module :

$$|H(j \cdot \omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot a \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

- Gain :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log K - 20 \cdot \log \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot a \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right)$$

- Argument :

$$\arg(H(j \cdot \omega)) = -\arctan \left(\frac{2 \cdot a \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) = -\arctan \left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega \cdot \omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \right)$$

Nous avons vu, lors de l'étude de la réponse temporelle, que l'allure de cette réponse dépend du coefficient d'amortissement a . Étudions donc dans un premier temps le module et l'influence de a sur celui-ci :

Soit $|H(j \cdot \omega_u)|$, le module réduit déduit du module de la fonction de transfert $H(j \cdot \omega)$

$$\text{en posant } \omega_u = \frac{\omega}{\omega_n} : \quad |H(j \cdot \omega_u)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - \omega_u^2)^2 + 4 \cdot a^2 \cdot \omega_u^2}}$$

Calculons la dérivée par rapport à ω_u :

$$\frac{d|H(j \cdot \omega_u)|}{d\omega_u} = K \cdot \frac{d}{d\omega_u} \left(\frac{1}{\sqrt{(1 - \omega_u^2)^2 + (2 \cdot a \cdot \omega_u)^2}} \right) = K \cdot \frac{4 \cdot \omega_u \cdot (2 \cdot a^2 + \omega_u^2 - 1)}{2 \cdot \sqrt{(1 - \omega_u^2)^2 + (2 \cdot a \cdot \omega_u)^2}}$$

Le numérateur s'annule pour :

- $\omega_u = 0$ soit $\omega = 0$ cette racine correspond à une asymptote horizontale dans le diagramme de Bode de gain,
- $\omega_u^2 + 2 \cdot a^2 - 1 = 0$, cette équation n'admet de racines réelles que pour $a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\text{la racine est alors : } \omega_{ur} = \frac{\omega_r}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2 \cdot a^2} \text{ soit } \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2 \cdot a^2} .$$

On appelle **pulsation de résonance** la pulsation :

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2 \cdot a^2}$$

Pour cette pulsation, le module présente un maximum :

$$|H(j \cdot \omega_r)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{K}{2 \cdot a \cdot \sqrt{1 - a^2}}$$

On définit Q , le **coefficient de résonance** (ou facteur de surtension) tel que :

$$Q = \frac{|H(j \cdot \omega_r)|}{|H(j \cdot \omega_n)|} = \frac{1}{2 \cdot a \cdot \sqrt{1-a^2}}$$

Le tracé du diagramme de gain d'un système du second ordre dépend donc de la valeur du coefficient d'amortissement.

- $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ présence d'un maximum pour la pulsation de résonance ω_r ;
- $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$ pas de maximum.

L'argument lui ne présente pas de maximum :

$$\phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega \cdot \omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

Il est possible d'affiner encore cette étude, en étudiant la forme de la fonction de transfert en fonction de a .

On distingue trois cas en fonction des racines du polynôme du dénominateur de la fonction de transfert du second ordre :

$$D(p) = 1 + \frac{2 \cdot a}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2 = 0$$

$0 < a < 1$: les deux racines du dénominateur sont complexes conjuguées, la fonction de transfert ne peut être simplifiée, l'étude a été réalisée précédemment :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot a}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}$$

$a > 1$: les deux racines sont réelles, la fonction de transfert alors peut se mettre sous la forme d'un produit de deux fonctions du premier ordre :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$$

- Module :

$$|H(j \cdot \omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau_1 \cdot \omega)^2} \cdot \sqrt{1 + (\tau_2 \cdot \omega)^2}}$$

- Gain en dB :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log K - 20 \cdot \log\left(\sqrt{1 + (\tau_1 \cdot \omega)^2}\right) - 20 \cdot \log\left(\sqrt{1 + (\tau_2 \cdot \omega)^2}\right)$$

- Argument :

$$\phi(\omega) = -\arctan(\tau_1 \cdot \omega) - \arctan(\tau_2 \cdot \omega)$$

$a = 1$: le dénominateur possède une racine réelle double, la fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p)^2}$$

- Module :

$$|H(j \cdot \omega)| = \frac{K}{1 + (\tau \cdot \omega)^2}$$

- Gain en dB :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log K - 20 \cdot \log(1 + (\tau \cdot \omega)^2)$$

- Argument :

$$\phi(\omega) = -2 \cdot \arctan(\tau \cdot \omega)$$

Nous allons donc considérer pour l'étude fréquentielle du second ordre, les trois cas suivants :

Cas $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ La fonction de transfert s'écrit :
$$H(j \cdot \omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \cdot 2 \cdot a \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}$$

À partir du gain en dB et de l'argument, on peut tracer les diagrammes de Bode, on retrouve sur ceux-ci :

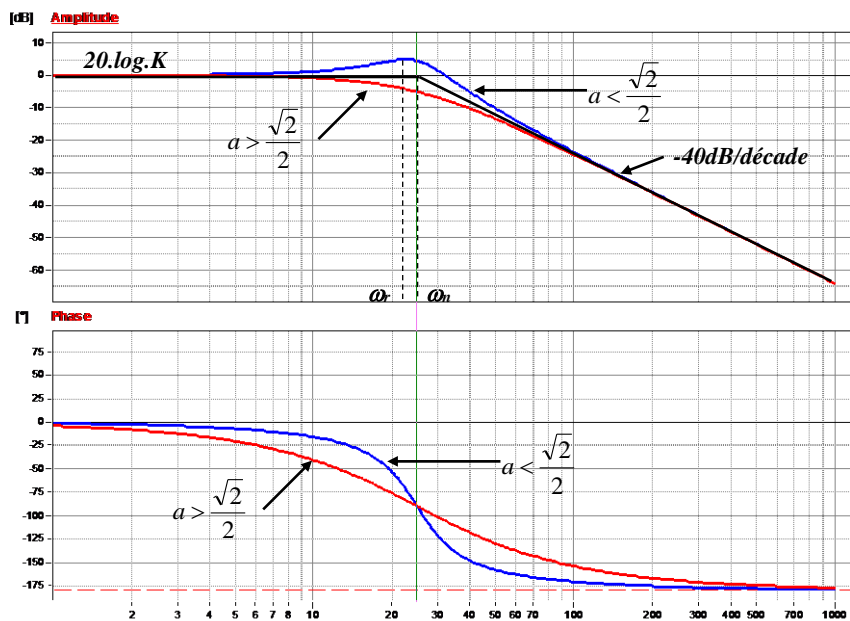


Diagramme de gain :

- Une asymptote horizontale d'ordonnée $20 \cdot \log K$ lorsque $\omega \rightarrow 0$,
- Une asymptote de pente -40 dB/décade lorsque $\omega \rightarrow \infty$,
- Les deux asymptotes se croisent pour $\omega \rightarrow \omega_n$ la pulsation propre,
- Le diagramme de gain présente un maximum pour la pulsation dite pulsation de

résonance $\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot a^2}$, avec
$$Q = \frac{|H(j \cdot \omega_r)|}{|H(j \cdot \omega_n)|} = \frac{1}{2 \cdot a \cdot \sqrt{1 - a^2}}$$

- Le module pour la pulsation propre est égal à : $|H(j \cdot \omega_n)| = \frac{K}{2 \cdot a}$

Diagramme de phase :

Une asymptote horizontale d'ordonnée 0° lorsque $\omega \rightarrow 0$,

Une d'ordonnée -180° lorsque $\omega \rightarrow \infty$,

$$\phi(\omega_n) = \arg(H(j \cdot \omega_n)) = -90^\circ .$$

Cas $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 1$. On retrouve les mêmes asymptotes que dans le cas précédent, mais le diagramme de gain ne présente pas de maximum, le tracé est toujours sous les asymptotes et très proche de celle-ci (l'écart est au maximum de $-6dB$ si $a=1$ pour la pulsation ω_n) et

$$|H(j \cdot \omega_n)| = \frac{K}{2 \cdot a}.$$

Cas $a > 1$. La fonction de transfert peut alors se décomposer en un produit de deux premiers ordres, $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$, le tracé des diagrammes de Bode est donc la somme graphique des deux tracés du premier ordre.

Les deux pulsations de cassure sont $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$ (pour la suite que on considérera que $\omega_1 < \omega_2$).

Le diagramme de gain présente donc 3 asymptotes :

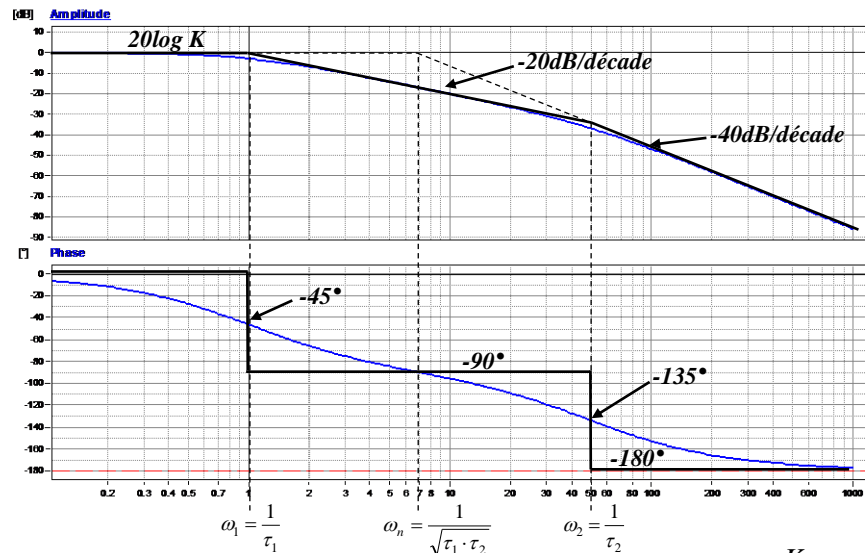
- Une asymptote horizontale d'ordonnée $20 \cdot \log K$ lorsque $\omega \rightarrow 0$, jusqu'à la pulsation ω_1 ;
- Une asymptote de pente $-20dB/décade$ entre ω_1 et ω_2 ;
- Une asymptote de pente $-40dB/décade$ au-delà de ω_2 .

Le diagramme de phase présente lui aussi 3 asymptotes :

- Une asymptote horizontale d'ordonnée 0° lorsque $\omega \rightarrow 0$, jusqu'à ω_1 ;
- Une asymptote horizontale d'ordonnée -90° entre ω_1 et ω_2 ;
- Une asymptote horizontale d'ordonnée -180° au-delà de ω_2 .

Quelques valeurs et points particuliers :

- Pulsation propre : $\omega = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$;
- Sur le diagramme de gain, l'asymptote horizontale et l'asymptote à $-40dB/décade$ se croisent pour $\omega = \omega_n$;
- L'argument pour la pulsation propre est : $\arg(H(j \cdot \omega_n)) = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$;
- Le module pour la pulsation propre est : $|H(j \cdot \omega_n)| = \frac{K}{2 \cdot a}$



Cas $a = 1$ La fonction de transfert est un premier ordre au carré : $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p)^2}$

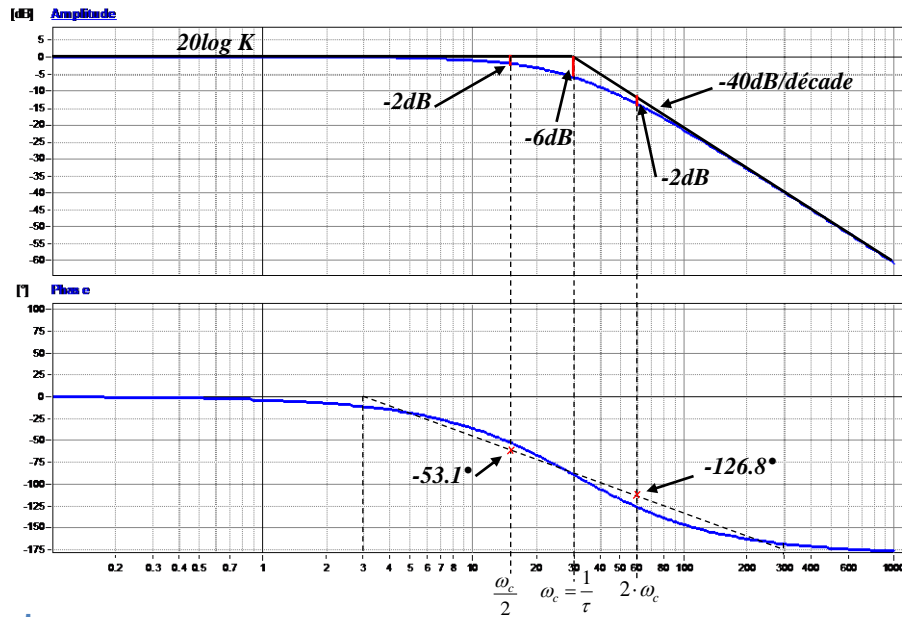
Le tracé des diagrammes de Bode se déduit donc directement du tracé d'un système du premier ordre, ils possèdent donc les particularités suivantes que l'on retrouve sur la figure ci-après.

Diagramme de gain :

- Une asymptote horizontale ($20 \log K$) lorsque $\omega \rightarrow 0$ et une asymptote de pente : -40 dB/décade ($2 \cdot (-20 \text{ dB/décade})$) lorsque $\omega \rightarrow \infty$;
- Pour la pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$, l'écart par rapport à l'asymptote est de -6 dB ($2 \cdot (-3 \text{ dB})$), l'écart par rapport aux asymptotes est de -2 dB pour les pulsations double et moitié ;

Diagramme de phase :

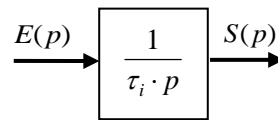
- Une asymptote d'ordonnée 0° lorsque $\omega \rightarrow 0$;
- Une d'ordonnée -180° lorsque $\omega \rightarrow \infty$;
- Pour ω_c l'argument de la fonction de transfert est de -90° ;
- Comme pour un système du premier ordre il est utile de tracer le segment entre $\left(\log\left(\frac{1}{10 \cdot \tau}\right), 0^\circ \right)$ et $\left(\log\left(\frac{10}{\tau}\right), -180^\circ \right)$ pour mieux approcher le tracé réel.



2.3 Intégrateur :

Fonction de transfert et schéma bloc d'un système intégrateur :

$$H_i(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{\tau_i \cdot p}$$



Fonction de transfert complexe :

$$H_i(j \cdot \omega) = \frac{1}{j \cdot \tau_i \cdot \omega}$$

- Module :

$$|H_i(j \cdot \omega)| = \frac{1}{\tau_i \cdot \omega}$$

- Gain en dB :

$$G_{dB}(\omega) = -20 \cdot \log \tau_i \cdot \omega = -20 \cdot \log \tau_i - 20 \cdot \log \omega$$

- Argument :

$$\arg(H_i(j \cdot \omega)) = \arg\left(\frac{1}{j \cdot \tau_i \cdot \omega}\right) = -90^\circ$$

Le diagramme de gain d'un intégrateur est une droite de pente -20dB/décade passant par 0

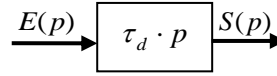
pour $\omega = \frac{1}{\tau_i}$.

Le diagramme de phase est une droite horizontale d'ordonnée -90° .

2.4 Dérivateur :

Fonction de transfert et schéma bloc d'un système intégrateur :

$$H_d(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \tau_d \cdot p$$



Fonction de transfert complexe :

$$H_d(j \cdot \omega) = j \cdot \tau_d \cdot \omega$$

- Module :

$$|H_d(j \cdot \omega)| = \tau_d \cdot \omega$$

- Gain en dB :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log \tau_d \cdot \omega = 20 \cdot \log \tau_d + 20 \cdot \log \omega$$

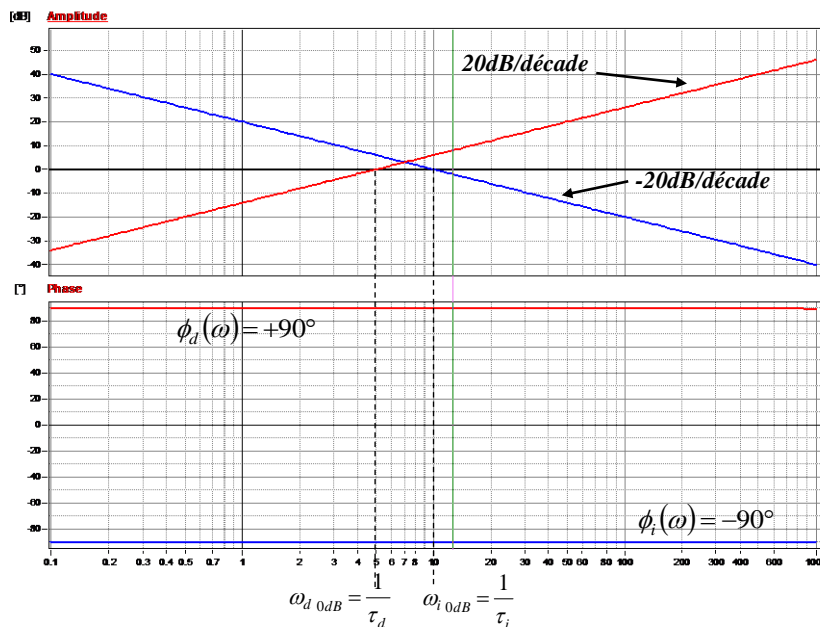
- Argument :

$$\arg(H_d(j \cdot \omega)) = \arg(j \cdot \tau_d \cdot \omega) = 90^\circ$$

Le diagramme de gain d'un intégrateur est une droite de pente 20dB/décade passant par 0

pour $\omega = \frac{1}{\tau_d}$.

Le diagramme de phase est une droite horizontale d'ordonnée $+90^\circ$.

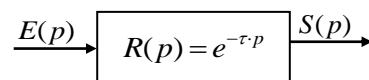


2.5 Retard pur :

Soit un système tel que la sortie est en retard sur l'entrée d'un temps τ :

$$s(t) = u(t - \tau)$$

Le théorème du retard nous permet d'écrire en passant dans le domaine de Laplace :



La transformée de Laplace d'un retard pur est donc :

$$R(p) = e^{-\tau \cdot p}$$

On en déduit la fonction de transfert complexe :

$$R(j \cdot \omega) = e^{-j\tau \cdot \omega} = \cos(\tau \cdot \omega) - j \cdot \sin(\tau \cdot \omega)$$

- Le module est constant, $|R(j \cdot \omega)| = 1$
- L'argument est constamment décroissant, $\arg(R(j \cdot \omega)) = -\tau \cdot \omega$

2.5.1 Influence d'un retard sur le tracé d'un lieu de Bode :

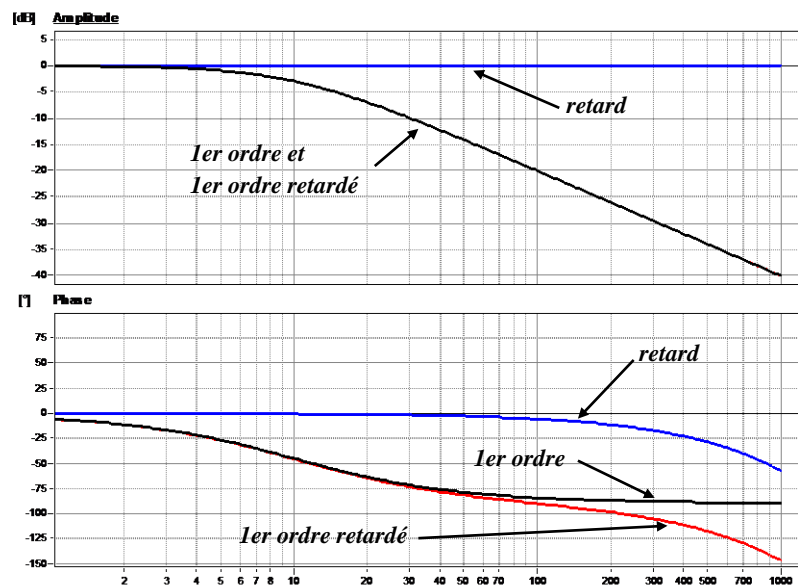
Pour évaluer l'effet d'un retard sur le lieu de Bode, nous allons étudier la fonction de transfert d'un retard pur associé à un premier ordre,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = e^{-\tau_1 \cdot p} \cdot \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

Fonction de transfert complexe,

$$H(j \cdot \omega) = e^{-j\tau_1 \cdot \omega} \cdot \frac{K}{1 + j \cdot \tau \cdot \omega}$$

- Module : $|H(j \cdot \omega)| = \frac{K}{|1 + j \cdot \tau \cdot \omega|} = \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \cdot \omega)^2}}$
- Gain : $G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + (\tau \cdot \omega)^2}$
- Argument : $\arg(H(j \cdot \omega)) = -\arctan(\tau \cdot \omega) - \tau_1 \cdot \omega$



On remarque sur la figure ci-dessus que le gain n'est pas influencé par le retard (les deux tracés sont superposés), par contre l'argument est diminué de $\tau_1 \cdot \omega$.

Un retard augmente le déphasage entre l'entrée et la sortie du système. Nous verrons plus loin, lors de l'étude de la stabilité des systèmes asservis, que cet effet est fortement préjudiciable à la stabilité des systèmes.

2.6 Généralisation du tracé des diagrammes de Bode :

Toute fonction de transfert sans retard peut s'écrire sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n \cdot p^n}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_d \cdot p^d}$$

Avec :

- n : degré du polynôme du numérateur ;
- d : degré du polynôme dénominateur ;
- K : le gain statique ;
- α : la classe de la fonction de transfert.

Le numérateur et le dénominateur sont deux polynômes, pour les systèmes physiques, le degré global du dénominateur est supérieur au degré du numérateur : $d + \alpha - n \geq 0$.

On peut, en recherchant les racines de chaque polynôme, mettre la fonction de transfert sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{\prod(1 + \tau_i \cdot p) \cdot \prod\left(1 + \frac{2 \cdot a_{nj}}{\omega_{nj}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{nj}^2} \cdot p^2\right)}{\prod(1 + \tau_k \cdot p) \cdot \prod\left(1 + \frac{2 \cdot a_{nl}}{\omega_{nl}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{nl}^2} \cdot p^2\right)}$$

La fonction de transfert s'écrit donc comme le produit de plusieurs fonctions élémentaires (premier, deuxième ordre et intégration/dérivation).

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot \dots \cdot H_I(p) \cdot \dots \cdot H_N(p)$$

Ce qui nous permet d'écrire le gain et l'argument :

- Gain :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log|H_1(j \cdot \omega)| + \dots + 20 \cdot \log|H_I(j \cdot \omega)| + \dots + 20 \cdot \log|H_N(j \cdot \omega)|$$

- Argument :

$$\arg(H(j \cdot \omega)) = \arg(H_1(j \cdot \omega)) + \dots + \arg(H_I(j \cdot \omega)) + \dots + \arg(H_N(j \cdot \omega))$$

On obtient ainsi les diagrammes de Bode de la FT en sommant graphiquement les diagrammes de Bode de chaque fonction élémentaire.

Comportement lorsque $\omega \rightarrow \infty$:

- Argument :

- Une fonction du premier ordre apporte un déphasage maximal (à l'infini) de -90° si elle est au dénominateur et de $+90^\circ$ si elle est au numérateur,
- Une fonction du second ordre apporte un déphasage maximal de -180° si elle est au dénominateur et de $+180^\circ$ si elle est au numérateur,
- Un intégrateur apporte lui un déphasage constant de -90° et le dérivateur de $+90^\circ$.

Ces déphasages s'ajoutant, on peut déduire que le déphasage total de la fonction de transfert lorsque la pulsation augmente tend vers :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg(H(j \cdot \omega)) = (n - d - \alpha) \cdot 90^\circ$$

- **Module :**
 - Le tracé du lieu de Bode d'un premier ordre tend vers une asymptote de pente $-20dB/décade$ s'il est dénominateur et de $+20dB/décade$ s'il est au numérateur,
 - Un second ordre tend vers une asymptote de pente $-40dB/décade$ s'il est dénominateur et de $+40dB/décade$ s'il est au numérateur,
 - Le lieu de Bode d'un intégrateur est une droite de pente $-20dB/décade$ et de $+20dB/décade$ pour un dérivateur.

Ces pentes s'ajoutent, on peut donc déduire que l'asymptote finale a une pente de :

$$(n - d - \alpha) \cdot 20dB / década$$

Comportement lorsque $\omega \rightarrow 0$:

À partir de la forme factorisée de $H(p)$ décrite plus haut, on déduit que l'allure des lieux de Bode lorsque $\omega \rightarrow 0$ ne dépend que de la classe α de la fonction de transfert et K . En effet, le module en dB et l'argument de chaque fonction du premier et du second ordre sont nuls lorsque $\omega \rightarrow 0$. L'allure des diagrammes de Bode en 0 se déduit donc de :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j \cdot \omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left| K \cdot \frac{1}{(j \cdot \omega)^\alpha} \right|$$

$\alpha = 0$

L'argument tend vers 0 ,

Le module tend lui vers : $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{dB}(\omega) = 20 \log K$

$\alpha > 0$

L'argument tend vers une asymptote horizontale d'ordonnée : $-\alpha \cdot 90^\circ$

Le module tend vers une asymptote d'équation : $20 \log K - \alpha \cdot 20 \cdot \log \omega$