

5 – Cinématique du point

1) Dérivée temporelle d'un vecteur par rapport à un référentiel :	2
1.2) Propriétés :	2
2) Position, trajectoire, vitesse et accélération d'un point par rapport à un référentiel :	3
2.1) Position d'un point dans un repère :	3
2.2) Trajectoire d'un point dans un repère :	3
2.3) Vecteur vitesse d'un point par rapport à un repère :	3
2.4) Accélération d'un point par rapport à un repère :	4
3) Relation entre les dérivées temporelles d'un vecteur par rapport à deux référentiels distincts.	4
3.1) Dérivée d'un vecteur exprimé dans la base de dérivation :	4
3.2) Dérivée d'un vecteur exprimé dans une base différente de la base de dérivation :	4
3.2.1) les deux repères ont une direction commune $\mathbf{z1} = \mathbf{z}$:	5
3.2.2) Cas général : application aux angles d'Euler :	6
4) Composition des vecteurs rotation :	7
5) Composition des mouvements :	8
5.1) Préliminaire : notion de point coïncident :	8
5.2) Composition des vecteurs vitesse :	8
5.3) Composition des vecteurs accélération :	9
6) Torseur cinématique (ou torseur distributeur des vitesses) :	10
7) Définition du contact ponctuel entre deux solides :	11
7.1) Présentation :	11
7.2) Vecteur vitesse de glissement :	11
7.3) Vecteurs rotation de roulement et de pivotement :	11
7.4) Possibilités de mouvements relatifs :	11

1) Dérivée temporelle d'un vecteur par rapport à un référentiel :

Soit $(\mathcal{E})$ un espace affine à trois dimensions et (E) l'espace vectoriel associé. Notons $B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ la base d'un repère orthonormé direct $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de $(\mathcal{E})$.

1.1) Définition :

Considérons une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans (E) : $t \xrightarrow{\vec{u}} \vec{u}(t)$ La dérivée du vecteur $\vec{u}(t)$ par rapport à la variable t , dans l'espace vectoriel (E) est égale au vecteur suivant :

$$\left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(t+h) - \vec{u}(t)}{h}$$

Remarques :

La variable t , quelconque, est généralement associée au temps,

La variation d'un vecteur, dépend de l'espace vectoriel de référence, c'est à dire en pratique de la position de l'observateur qui étudie la variation du vecteur. D'où la nécessité de notations précises.

$$\left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_E \text{ ou } \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_B \text{ ou encore, par commodité : } \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_R$$

Qui se lit : "dérivée du vecteur $\vec{u}(t)$ par rapport à t , dans le repère R ".

1.2) Propriétés :

- Dérivée d'une somme de vecteurs :

$$\left[\frac{d}{dt} (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \right]_R = \left[\frac{d\vec{u}_1}{dt} \right]_R + \left[\frac{d\vec{u}_2}{dt} \right]_R$$

- Dérivée du produit d'une fonction scalaire par un vecteur :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} (\lambda \cdot \vec{u}) \right]_R &= \frac{d}{dt} \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_R \\ &= \dot{\lambda} \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_R \text{ avec } \dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt} \end{aligned}$$

- Dérivée d'un produit scalaire :

$$\left[\frac{d}{dt} (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) \right]_R = \left[\frac{d\vec{u}_1}{dt} \right]_R \cdot \vec{u}_2 + \vec{u}_1 \cdot \left[\frac{d\vec{u}_2}{dt} \right]_R$$

- Dérivée d'un produit vectoriel :

$$\left[\frac{d}{dt} (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \right]_R = \left[\frac{d\vec{u}_1}{dt} \right]_R \wedge \vec{u}_2 + \vec{u}_1 \wedge \left[\frac{d\vec{u}_2}{dt} \right]_R$$

- Dérivée d'une fonction de fonction :

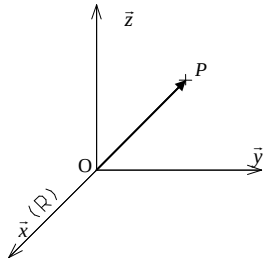
$$\left[\frac{d}{dt} \vec{u}(\theta(t)) \right]_R = \left[\frac{d\vec{u}}{d\theta} \right]_R \cdot \dot{\theta}$$

2) Position, trajectoire, vitesse et accélération d'un point par rapport à un référentiel :

2.1) Position d'un point dans un repère :

Soit un point mobile par rapport au repère $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ d'un espace affine ($\mathcal{E}$).

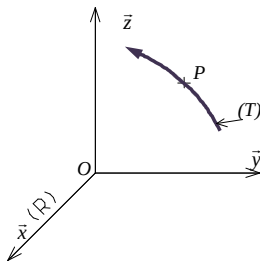
$P(t)$ est la position du point P dans le repère R à la date t



Définition : Le vecteur position du point P dans le repère R , à la date t , est le vecteur $\overrightarrow{OP}(t)$, le point O étant l'origine du repère R .

Nota : on supposera par la suite que l'application $t \xrightarrow{P} P(t)$ de classe C^1 et par intervalles de classe C^2 , c'est à dire que cette application est continûment dérivable et par intervalles deux fois dérivable à dérivée seconde continue.

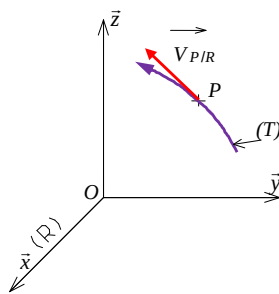
2.2) Trajectoire d'un point dans un repère :



Définition : La trajectoire T_R^P du point P dans le repère R est l'ensemble des points $P(t)$ obtenu lorsque t varie.

Nota : l'équation de la trajectoire est indépendante du temps.

2.3) Vecteur vitesse d'un point par rapport à un repère :

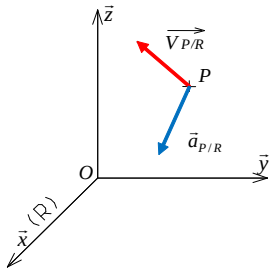


Définition : Le vecteur vitesse du point P par rapport au repère R , à la date t , est la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OP}(t)$ par rapport à t , dans R :

$$\vec{V}_{P/R} = \left[\frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt} \right]_R$$

Nota : Le vecteur vitesse du point P par rapport au repère R , à la date t , est un vecteur tangent au point $P(t)$ à la trajectoire (T) .

2.4) Accélération d'un point par rapport à un repère :



Définition : Le vecteur accélération du point P par rapport au repère R , à la date t , est la dérivée du vecteur vitesse $\vec{V}_{P/R}$ par rapport à t dans R .

$$\vec{a}_{P/R} = \left[\frac{d\vec{V}_{P/R}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d^2 O\vec{P}(t)}{dt^2} \right]_R$$

3) Relation entre les dérivées temporelles d'un vecteur par rapport à deux référentiels distincts.

3.1) Dérivée d'un vecteur exprimé dans la base de dérivation :

Soit un vecteur $\vec{V}$ exprimé dans la base du repère R ($O ; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) :

$\vec{V} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y} + c \cdot \vec{z}$ où a, b, c sont des fonctions de t .

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R &= \left[\frac{d(a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y} + c \cdot \vec{z})}{dt} \right]_R = \left[\frac{d(a \cdot \vec{x})}{dt} \right]_R + \left[\frac{d(b \cdot \vec{y})}{dt} \right]_R + \left[\frac{d(c \cdot \vec{z})}{dt} \right]_R \\ \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R &= \dot{a} \cdot \vec{x} + a \cdot \left[\frac{d\vec{x}}{dt} \right]_R + \dot{b} \cdot \vec{y} + b \cdot \left[\frac{d\vec{y}}{dt} \right]_R + \dot{c} \cdot \vec{z} + c \cdot \left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_R \end{aligned}$$

Comme les vecteurs de base $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sont constants dans leur propre base (qui est la base de R) alors :

$$\left[\frac{d\vec{x}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{y}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_R = \vec{0}$$

Il vient donc finalement :

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R = \dot{a} \cdot \vec{x} + \dot{b} \cdot \vec{y} + \dot{c} \cdot \vec{z}$$

3.2) Dérivée d'un vecteur exprimé dans une base différente de la base de dérivation :

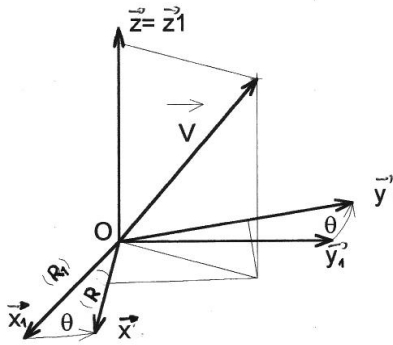
- Soit (ϵ) l'espace affine à trois dimensions et (E) l'espace vectoriel associé, notons $B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ la base d'un repère orthonormé direct $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de (ϵ) .
- Soit (ϵ_1) l'espace affine à trois dimensions et (E_1) l'espace vectoriel associé, notons $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ la base d'un repère orthonormé direct $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ de (ϵ_1) .

Considérons le vecteur $\vec{V}$ exprimé dans la base du repère R :

$$\vec{V} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y} + c \cdot \vec{z} \text{ où } a, b, c \text{ sont des fonctions de } t.$$

Calculons la dérivée du vecteur $\vec{V}$ par rapport à la variable t dans le repère R_1 . Mais avant d'effectuer le calcul dans le cas général, commençons par traiter le cas particulier où $\vec{z}_1 = \vec{z}$.

3.2.1) les deux repères ont une direction commune $\vec{z}_1 = \vec{z}$:



Dans ce cas, un seul paramètre angulaire suffit pour orienter la base de R par rapport à la base de R_1 .

Posons :

$\theta = (\vec{x}_1, \vec{x})$, θ est une fonction de t.

La dérivée du vecteur $\vec{V}$ par rapport à t dans R_1 s'écrit :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} &= \left[\frac{d}{dt} (a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y} + c \cdot \vec{z}) \right]_{R_1} \\ &= \left[\frac{d a \cdot \vec{x}}{dt} \right]_{R_1} + \left[\frac{d b \cdot \vec{y}}{dt} \right]_{R_1} + \left[\frac{d c \cdot \vec{z}}{dt} \right]_{R_1} \end{aligned}$$

Soit en développant :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} &= \dot{a} \cdot \vec{x} + \dot{b} \cdot \vec{y} + \dot{c} \cdot \vec{z} + a \cdot \left[\frac{d\vec{x}}{dt} \right]_{R_1} + b \cdot \left[\frac{d\vec{y}}{dt} \right]_{R_1} + c \cdot \left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_{R_1} \\ &= \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R + a \cdot \left[\frac{d\vec{x}}{dt} \right]_{R_1} + b \cdot \left[\frac{d\vec{y}}{dt} \right]_{R_1} + c \cdot \left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_{R_1} \quad (1) \end{aligned}$$

Comme $\vec{z}_1 = \vec{z}$ alors :

$$\left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_{R_1} = \vec{0}.$$

Pour calculer le terme $\left[\frac{d\vec{x}}{dt} \right]_{R_1}$ considérons que le vecteur unitaire $\vec{x}$ est une fonction de t par l'intermédiaire de l'angle θ : $\vec{x}[\theta(t)]$, alors :

$$\left[\frac{d\vec{x}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{x}}{d\theta} \right]_{R_1} \cdot \dot{\theta} \quad \text{avec} \quad \dot{\theta} = \left[\frac{d\theta}{dt} \right]$$

En exprimant le vecteur unitaire $\vec{x}$ dans la base de R_1 , on obtient :

$$\left[\frac{d\vec{x}}{d\theta} \right]_{R_1} = \left[\frac{d}{d\theta} (\cos \theta \vec{x}_1 + \sin \theta \vec{y}_1) \right]_{R_1} = -\sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1$$

Soit le résultat suivant :

$$\left[\frac{d\vec{x}}{d\theta} \right]_{R_1} = \vec{y}$$

On retrouve un résultat classique, à savoir que la dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à son angle polaire est le vecteur directement perpendiculaire (dédiuit par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$)

De la même façon on a : $\left[\frac{d\vec{y}}{d\theta} \right]_{R_1} = -\vec{x}$.

Par suite l'équation (1) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R + a \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y} - b \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}$$

Où encore :

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R + \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1 \wedge (a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y} + c \cdot \vec{z})$$

Généralement on pose $\vec{\Omega}_{R/R_1} = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1$

Définition : le vecteur $\vec{\Omega}_{R/R_1}$ est appelé vecteur rotation de la base de R par rapport à la base de R_1 , ou plus simplement vecteur rotation de R par rapport à R_1 .

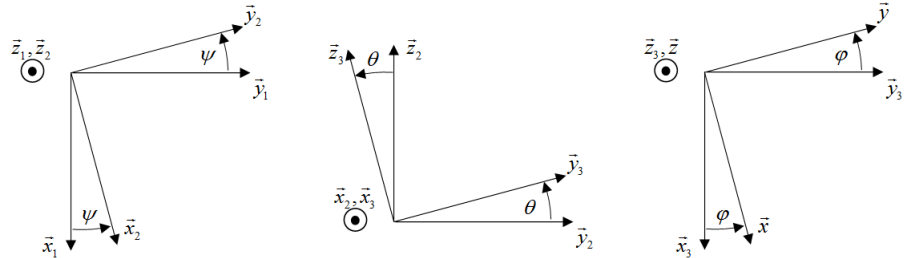
Finalement l'équation (1) prend la forme finale à retenir :

(Formule fondamentale dite de la dérivation composée)

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R + \vec{\Omega}_{R/R_1} \wedge \vec{V}$$

3.2.2) Cas général : application aux angles d'Euler :

Supposons que l'orientation de la base de R par rapport à celle de R_1 soit définie par les trois angles d'Euler (ψ, θ, ϕ) .



$$(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \xrightarrow{\text{rot}(\vec{z}_1, \psi)} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2) \xrightarrow{\text{rot}(\vec{x}_2, \theta)} (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3) \xrightarrow{\text{rot}(\vec{z}_3, \phi)} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

On pose : $\vec{V} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y} + c \cdot \vec{z}$, la dérivée du vecteur $\vec{V}$ par rapport à t , dans le repère R_1 , se met sous la forme :

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R + a \cdot \left[\frac{d\vec{x}}{dt} \right]_{R_1} + b \cdot \left[\frac{d\vec{y}}{dt} \right]_{R_1} + c \cdot \left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_{R_1}$$

D'où la formulation suivante :

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R + \vec{\Omega}_{R/R_1} \wedge \vec{V}$$

Avec $\vec{\Omega}_{R/R_1} = \dot{\psi} \cdot \vec{z}_1 + \dot{\theta} \cdot \vec{x}_2 + \dot{\phi} \cdot \vec{z}$ (2) le vecteur rotation.

Remarque : l'écriture du vecteur rotation telle qu'elle apparaît formule (2) n'est pas écrite dans une base particulière. Il faudra en tenir compte lorsque vous aurez à calculer le produit vectoriel $\vec{\Omega}_{R/R_1} \wedge \vec{V}$. Vous devrez choisir une **base commune de calcul** pour les deux vecteurs.

4) Composition des vecteurs rotation :

Soient n espace affines $(\mathcal{E}_i)$, $i=1$ à n , à trois dimensions et (E_i) , les espaces vectoriels associés. On note $B_i(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ la base d'un repère orthonormé direct $R_i(O; \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ de $(\mathcal{E}_i)$.

Etant donné un vecteur $\vec{V}$, on peut écrire successivement :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} &= \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{V} \\ &\vdots \\ \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_{n-1}} &= \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_n} + \vec{\Omega}_{R_n/R_{n-1}} \wedge \vec{V} \end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre ces égalités. Après simplification, il vient :

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_n} + (\vec{\Omega}_{R_n/R_{n-1}} + \dots + \vec{\Omega}_{R_2/R_1}) \wedge \vec{V} \quad (3)$$

D'autre part, on peut écrire directement :

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_n} + \vec{\Omega}_{R_n/R_1} \wedge \vec{V} \quad (4)$$

On en déduit donc en comparant les équations (3) et (4) que :

$$\vec{\Omega}_{R_n/R_1} = \sum_{i=2}^n \vec{\Omega}_{R_i/R_{i-1}}$$

Remarque : Inversion des bases de dérivation :

Etant donné un vecteur $\vec{V}$ et deux repères R_1 et R_2 , on peut écrire :

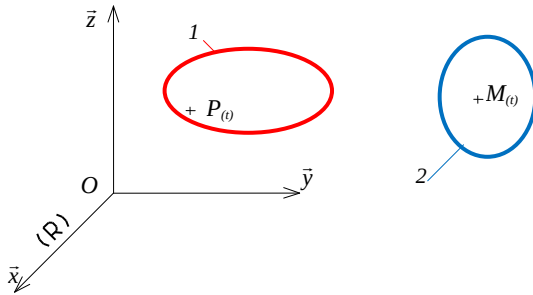
$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} &= \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{V} \\ \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_2} &= \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_2} \wedge \vec{V} \end{aligned}$$

Après avoir ajouté membre à membre ces deux relations et simplifié l'égalité obtenue, on en déduit que :

$$\vec{\Omega}_{R_2/R_1} = -\vec{\Omega}_{R_1/R_2}$$

5) Composition des mouvements :

5.1) Préliminaire : notion de point coïncident :



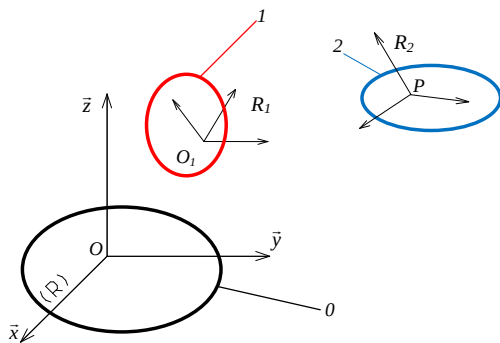
Soit un point P d'un solide 1 en mouvement par rapport à un repère R . Ce point appartient naturellement au solide 1 , c'est à dire qu'à chaque instant il est lié au solide. Les écritures :

$$\vec{V}_{P,1/R} \text{ et } \vec{a}_{P,1/R}$$

sont interprétées de façon évidente.

Soit un point M naturellement lié à un autre solide 2 en mouvement par rapport au repère R et au solide 1 . On peut être amené à calculer, à l'instant t , le vecteur vitesse ou le vecteur accélération du point M par rapport à R , **en le supposant lié à cet instant au solide 1** . Dans ce cas les écritures $\vec{V}_{M,1/R}$ et $\vec{a}_{M,1/R}$ sont possibles et se calculent de façons particulières !

5.2) Composition des vecteurs vitesse :



Soit un point P élément du solide 2 mobile par rapport à deux repères R , lié au solide 0 , et R_1 , lié au solide 1 . Cherchons, à la date t , la relation entre les vecteurs vitesse :

$$\vec{V}_{P,2/0} \text{ et } \vec{V}_{P,2/1}$$

Par définition :

P étant un point naturel de 2 , on peut écrire que $\vec{V}_{P,2/0} = \overrightarrow{V_{P/R}}$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{V_{P,2/0}} = \overrightarrow{V_{P/R}} = \left[\frac{d\vec{OP}}{dt} \right]_R \text{ soit } \overrightarrow{V_{P,2/0}} = \left[\frac{d\vec{OO_1}}{dt} \right]_R + \left[\frac{d\vec{O_1P}}{dt} \right]_R$$

$$\text{or } \left[\frac{d\vec{OO_1}}{dt} \right]_R = \overrightarrow{V_{O_1/R}} = \overrightarrow{V_{O_1,1/0}} \text{ (} O_1 \text{ étant naturel du solide 1)}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \left[\frac{d\vec{O_1P}}{dt} \right]_R &= \left[\frac{d\vec{O_1P}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{O_1P} \\ &= \overrightarrow{V_{P,2/1}} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{O_1P} \end{aligned}$$

Par suite on peut écrire :

$$\overrightarrow{V_{P,2/0}} = \overrightarrow{V_{O_1,1/0}} + \overrightarrow{V_{P,2/1}} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{O_1P} \quad (5)$$

Définitions : Dans le mouvement du point P par rapport aux deux repères R et R_I on appelle :

- Vecteur vitesse absolue : $\overrightarrow{V_{P,2/0}}$
- Vecteur vitesse relative : $\overrightarrow{V_{P,2/1}}$
- Vecteur vitesse d'entraînement : $\overrightarrow{V_{O_1,1/0}} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1P}$

Si on considère, à l'instant t , le point P lié au repère R_I , le champ des vecteurs vitesse précise que :

$$\overrightarrow{V_{P,1/0}} = \overrightarrow{V_{O_1,1/0}} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1P}$$

Alors l'équation (5) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\overrightarrow{V_{P,2/0}} = \overrightarrow{V_{P,2/1}} + \overrightarrow{V_{P,1/0}}$$

Généralisation :

Soit un point P mobile par rapport à n repères R_i ($i= 1 \text{ à } n$), on peut écrire la relation générale de composition des vecteurs vitesse :

$$\overrightarrow{V_{P,n/1}} = \sum_{i=1}^{n-1} \overrightarrow{V_{P,i+1/i}}$$

5.3) Composition des vecteurs accélération :

La relation de composition des vecteurs vitesse établie au paragraphe précédent s'écrit :

$$\overrightarrow{V_{P,2/0}} = \overrightarrow{V_{O_1,1/0}} + \overrightarrow{V_{P,2/1}} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1P}$$

Dérivons chaque terme par rapport à t , dans R :

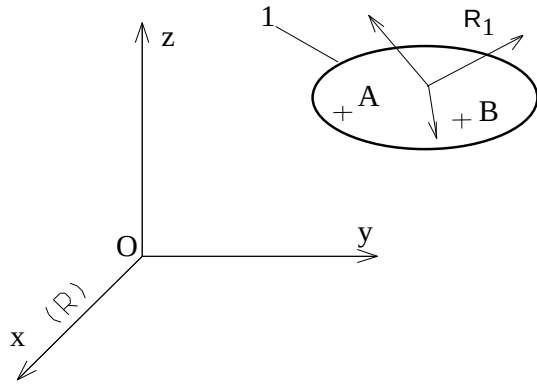
$$\begin{aligned} \left[\frac{d\overrightarrow{V_{P,2/0}}}{dt} \right]_R &= \left[\frac{d\overrightarrow{V_{O_1,1/0}}}{dt} \right]_R + \left[\frac{d\overrightarrow{V_{P,2/1}}}{dt} \right]_R + \left[\frac{d\vec{\Omega}_{1/0}}{dt} \right]_R \wedge \overrightarrow{O_1P} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \left[\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt} \right]_R \\ \vec{a}_{P,2/0} &= \vec{a}_{O_1,1/0} + \left[\frac{d\overrightarrow{V_{P,2/1}}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{V_{P,2/1}} + \left[\frac{d\vec{\Omega}_{1/0}}{dt} \right]_R \wedge \overrightarrow{O_1P} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge (\overrightarrow{V_{P,2/1}} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1P}) \end{aligned}$$

$$\vec{a}_{P,2/0} = \vec{a}_{O_1,1/0} + \vec{a}_{P,2/1} + 2 \cdot \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{V_{P,2/1}} + \left[\frac{d\vec{\Omega}_{1/0}}{dt} \right]_R \wedge \overrightarrow{O_1P} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge (\vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1P})$$

Définitions : Dans le mouvement du point P par rapport aux deux repères R et R_I , on appelle :

- Vecteur accélération absolue : $\vec{a}_{P,2/0}$
- Vecteur accélération relative : $\vec{a}_{P,2/1}$
- Vecteur accélération de Coriolis : $2 \cdot \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{V_{P,2/1}}$
- Vecteur accélération d'entraînement : $\vec{a}_{O_1,1/0} + \left[\frac{d\vec{\Omega}_{1/0}}{dt} \right]_R \wedge \overrightarrow{O_1P} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge (\vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1P})$

6) Torseur cinématique (ou torseur distributeur des vitesses) :



Soient deux points A et B d'un solide 1 en mouvement par rapport à un solide 0 (non représenté).

Appliquons la relation de changement de base de dérivation au vecteur $\overrightarrow{AB}$, entre le repère R lié au solide 0 et le repère R_1 lié au solide 1 :

$$\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Or $\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right]_{R_1} = \vec{0}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant constant dans 1 et

$$\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OB} \right]_R - \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OA} \right]_R = \overrightarrow{V_{B/R}} - \overrightarrow{V_{A/R}}$$

Comme A et B sont des points naturels de 1, on peut écrire que :

$$\overrightarrow{V_{B/R}} = \overrightarrow{V_{B, 1/0}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V_{A/R}} = \overrightarrow{V_{A, 1/0}}$$

Par suite, la relation entre les vecteurs vitesse des points A et B du solide 1 par rapport à 0 s'écrit :

$$\overrightarrow{V_{B, 1/0}} - \overrightarrow{V_{A, 1/0}} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Soit :

$$\overrightarrow{V_{B, 1/0}} = \overrightarrow{V_{A, 1/0}} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Les vecteurs vitesse des deux points A et B du solide 1 vérifient la relation de changement de point du moment d'un torseur. Par conséquent, il est possible de représenter au point A le mouvement du solide 1 par rapport au solide 0, par le torseur suivant :

$${}_A \{V_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{1/0} \\ \overrightarrow{V_{A, 1/0}} \end{array} \right\}$$

Le torseur ${}_A \{V_{1/0}\}$ est appelé torseur cinématique (ou torseur distributeur des vitesses) du mouvement du solide 1 par rapport au solide 0.

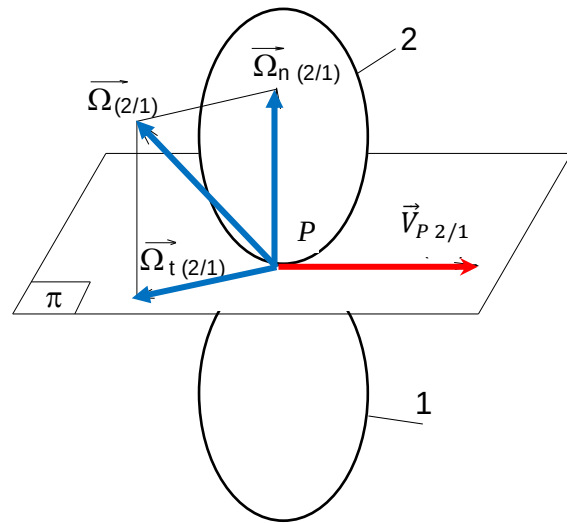
7) Contact ponctuel entre deux solides :

7.1) Présentation :

Soient deux solides 1 et 2 en contact ponctuel en P et soit (π) le plan tangent commun en P aux deux solides.

Le torseur cinématique du mouvement de 2/1 s'écrit au point P :

$$\{V_{2/1}\}_P = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{P,2/1} \end{Bmatrix}$$



7.2) Vecteur vitesse de glissement :

Définition : Le vecteur vitesse $\vec{V}_{P,2/1}$ est appelé vecteur vitesse de glissement de 2 par rapport à 1, il est tangent au plan (π) commun aux deux solides.

La condition de roulement sans glissement s'écrit : $\vec{V}_{P,2/1} = \vec{0}$.

7.3) Vecteurs rotation de roulement et de pivotement :

Posons $\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{\Omega}_{n,2/1} + \vec{\Omega}_{t,2/1}$ avec :

- $\vec{\Omega}_{n,2/1}$ perpendiculaire au plan (π)
- $\vec{\Omega}_{t,2/1}$ tangent au plan (π) .

Définition : Dans le mouvement du solide 2 par rapport au solide 1, en contact ponctuel au point P, on appelle :

$\vec{\Omega}_{t,2/1}$ vecteur rotation de roulement

$\vec{\Omega}_{n,2/1}$ vecteur rotation de pivotement

7.4) Possibilités de mouvements relatifs :

Le mouvement du solide 2 par rapport au solide 1, en contact ponctuel au point P, est une combinaison de glissement, de roulement et de pivotement.

Définition : On dira qu'une pièce 2 roule sans glisser, ni pivoter par rapport à un solide 1 en un point P si :

$\vec{\Omega}_{t,2/1} \neq \vec{0}$ (roule)

$\vec{V}_{P,2/1} = \vec{0}$ (sans glisser)

$\vec{\Omega}_{n,2/1} = \vec{0}$ (ni pivoter)