

4₁ Modélisation cinématique des liaisons

Sommaire

1) Contacts entre solides :	2
1.1) Géométrie générale des contacts entre deux solides :	2
1.1.1) Préliminaires :	2
1.1.2) Géométries possibles du contact :	2
1.2) Cinématique du contact ponctuel entre solides :	3
1.2.1) Présentation :	3
1.2.2) Vecteur vitesse de glissement :	3
1.2.3) Vecteurs rotation de roulement et de pivotement :	3
1.2.4) Possibilités de mouvement relatif :	3
2) Liaisons normalisées entre solides :	4
2.1)Présentation :	4
2.2) Classification :	4
2.3) Hypothèses fondamentales :	4
2.4) Tableau récapitulatif des liaisons usuelles :	4
3) Mécanismes :	8
3.1) Structure d'une chaîne de solides : graphe des liaisons :	8
3.1.1) Classes d'équivalence :	8
3.1.2) Graphe des liaisons :	9
3.2) Associations de liaisons en série et en parallèle ; liaisons cinématiquement équivalentes.	9
3.2.1) Liaisons en parallèle :	9
3.2.2) Liaisons en série :	11
3.3) Analyse cinématique : relations entre les vitesses issues de la fermeture de la chaîne cinématique.....	12
3.3.1) Définition :	12
3.3.2) Etude cinématique :	12
4) Schéma cinématique minimal :	12

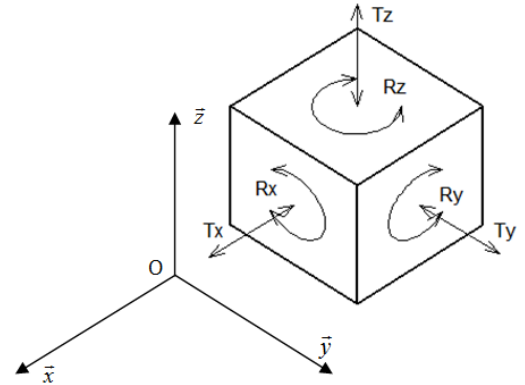
1) Contacts entre solides :

Deux solides sont dits en liaison lorsqu'il y a **contact** physique direct entre eux, et que ce contact dure dans le temps.

1.1) Géométrie générale des contacts entre deux solides :

1.1.1) Préliminaires :

Nous avons vu précédemment que la position et l'orientation d'un solide (1) par rapport à un autre solide (0) pris comme référence, peuvent être complètement définies si on connaît six paramètres indépendants (3 paramètres de position et 3 d'orientation). Ces paramètres sont aussi appelés degrés de liberté (*d.d.l.*) ou degrés de mobilité.



Soit n_c le nombre de degrés de liberté laissés libres par la liaison établie entre deux solides :

- Si $n_c = 0$ la liaison est dite encastrement, ce qui revient à dire que (0) et (1) n'ont aucun mouvement relatif possible.
- Si $n_c = 6$ la liaison est dite libre ; c'est en fait l'absence de liaison entre (1) et (0),

Par conséquent un solide (1), libre par rapport au solide de référence (0), peut se déplacer :

- en translation **suivant** l'un des trois axes de référence (T_x, T_y, T_z)
- en rotation **autour** de l'un des trois axes de référence (R_x, R_y, R_z).

1.1.2) Géométries possibles du contact :

Les contacts sont établis entre des surfaces considérées géométriquement parfaites. En prenant en compte les surfaces les plus courantes (plan, cylindre, sphère) les différents contacts possibles sont répertoriés dans le tableau ci-dessous.

	Plan	Cylindre	Sphère
Sphère	Point	Cercle / <i>Point</i>	Sphère / <i>Point</i>
Cylindre	Droite	Droite / <i>Point</i> / Cylindre	
Plan	Plan		

Les contacts apparaissant en italique sont peu utilisés dans la conception des liaisons entre solides. Globalement le tableau met en évidence : 1 contact ponctuel, 2 contacts linéaires et 3 contacts surfaciques. Les liaisons usuelles entre solides vont être classées en fonction de la nature de ces contacts.

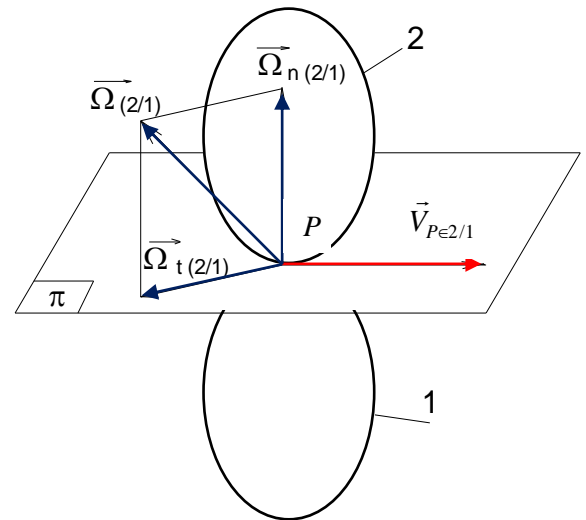
1.2) Cinématique du contact ponctuel entre solides :

1.2.1) Présentation :

Soient deux solides 1 et 2 en contact ponctuel en P et soit (π) le plan tangent commun en P aux deux solides.

Le torseur cinématique du mouvement de 2/1 s'écrit au point P :

$$\left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{P \in 2/1} \end{array} \right\}$$



1.2.2) Vecteur vitesse de glissement :

Le vecteur vitesse $\vec{V}_{P \in 2/1}$ est appelé vecteur vitesse de glissement de 2 par rapport à 1, il est situé dans le plan (π) commun aux deux solides.

La condition de roulement sans glissement s'écrit : $\vec{V}_{P \in 2/1} = \vec{0}$.

1.2.3) Vecteurs rotation de roulement et de pivotement :

Posons $\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{\Omega}_{n_{2/1}} + \vec{\Omega}_{t_{2/1}}$ avec :

- $\vec{\Omega}_{n_{2/1}}$ perpendiculaire au plan (π)
- $\vec{\Omega}_{t_{2/1}}$ dans le plan (π) .

Définition : Dans le mouvement du solide 2 par rapport au solide 1, en contact ponctuel au point P , on appelle :

- $\vec{\Omega}_{t_{2/1}}$ vecteur rotation de roulement
- $\vec{\Omega}_{n_{2/1}}$ vecteur rotation de pivotement

1.2.4) Possibilités de mouvement relatif :

Le mouvement du solide 2 par rapport au solide 1, en contact ponctuel au point P , est une combinaison de glissement, de roulement et de pivotement. Par exemple on dira qu'une pièce 2 roule sans glisser, ni pivoter par rapport à un solide 1 en un point P si :

$$\boxed{\vec{V}_{P \in 2/1} = \vec{0}, \vec{\Omega}_{n_{2/1}} = \vec{0} \text{ et } \vec{\Omega}_{t_{2/1}} \neq \vec{0}}$$

Remarque : Ces notions restent valables dans le cas d'un contact linéaire ou surfacique.

2) Liaisons normalisées entre solides :

2.1)Présentation :

Nous avons vu précédemment que le mouvement relatif entre deux solides 1 et 2 pouvait être décrit au point P quelconque par le torseur cinématique suivant :

$$\left\{ \mathbf{v}_{2/1} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{v}_{P \in 2/1} \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} p_{21} & u_{21} \\ q_{21} & v_{21} \\ r_{21} & w_{21} \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

2.2) Classification :

La classification des liaisons est établie à partir du nombre de degrés de liberté laissé libre par le contact entre les deux solides.

Usuellement on comptabilise dix liaisons différentes et on leur associe un nom et une représentation schématique spécifiques. Cette classification fait l'objet d'une norme référencée NF EN ISO 3952-1.

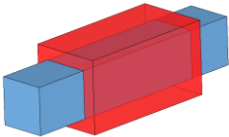
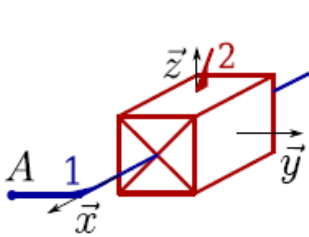
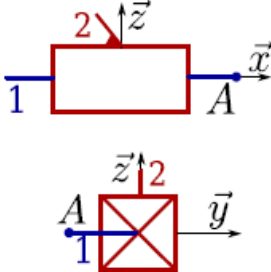
2.3) Hypothèses fondamentales :

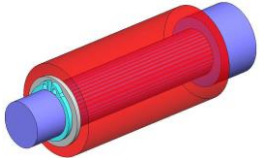
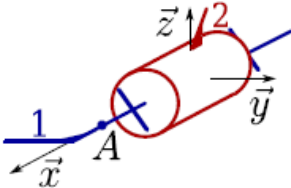
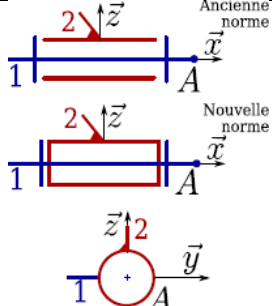
Les liaisons cinématiques sont considérées comme parfaites

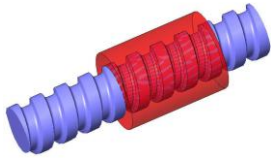
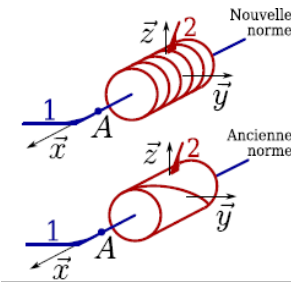
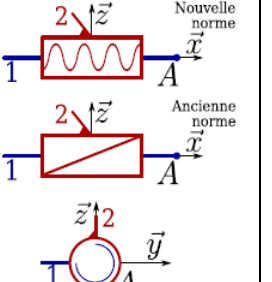
C'est-à-dire :

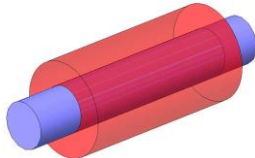
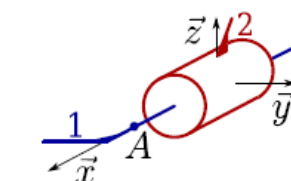
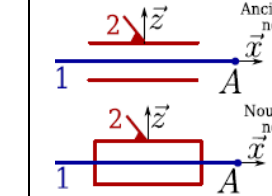
- que la géométrie de contact est parfaite (pas de jeu, pas de déformation)
- que le mouvement relatif est sans frottement.

2.4) Tableau récapitulatif des liaisons usuelles :

Liaison glissière de direction \vec{x} 		$1 \text{ d.d.l} : Tx$
		$\left\{ \mathbf{v}_{2/1} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A (\vec{x}, \dots)$ <p>modèle valable $\forall A \in (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$</p>

Liaison pivot d'axe $(A; \vec{x})$		$1 \text{ d.d.l} : R_x$
		$\left\{ \mathbf{V}_{2/1} \right\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A (\vec{x}, \dots, \dots)$ <p>modèle valable $\forall A \in (A; \vec{x})$</p>

Liaison hélicoïdale d'axe $(A; \vec{x})$		$1 \text{ d.d.l} : T_x = f(R_x)$
		$\left\{ \mathbf{V}_{2/1} \right\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & \frac{P}{2 \cdot \pi} \cdot p_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A (\vec{x}, \dots, \dots)$ <p>modèle valable $\forall A \in (A; \vec{x})$</p>

Liaison pivot glissant d'axe $(A; \vec{x})$		$2 \text{ d.d.l} : T_x ; R_x$
		$\left\{ \mathbf{V}_{2/1} \right\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A (\vec{x}, \dots, \dots)$ <p>modèle valable $\forall A \in (A; \vec{x})$</p>

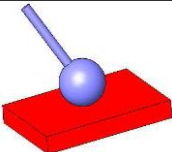
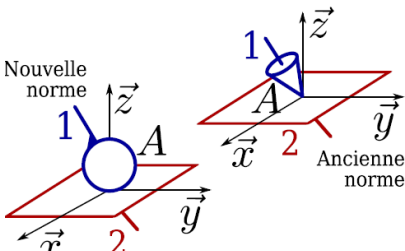
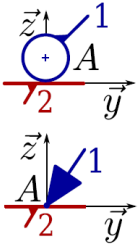
Liaison rotule à doigt de centre A			$2 \text{ d.d.l} : R_x ; R_z$
		$\{\mathbf{v}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ modèle valable uniquement au centre de la sphère	

Liaison rotule de centre A			$3 \text{ d.d.l} : R_x ; R_y ; R_z$
		$\{\mathbf{v}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A (\dots, \dots)$ modèle valable uniquement au centre de la sphère	

Liaison appui plan de normale $(A; \vec{z})$			$3 \text{ d.d.l} : T_x ; T_y ; R_z$
		$\{\mathbf{v}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & u_{21} \\ 0 & v_{21} \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A (\dots, \vec{z})$ modèle valable $\forall A \in (A; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	

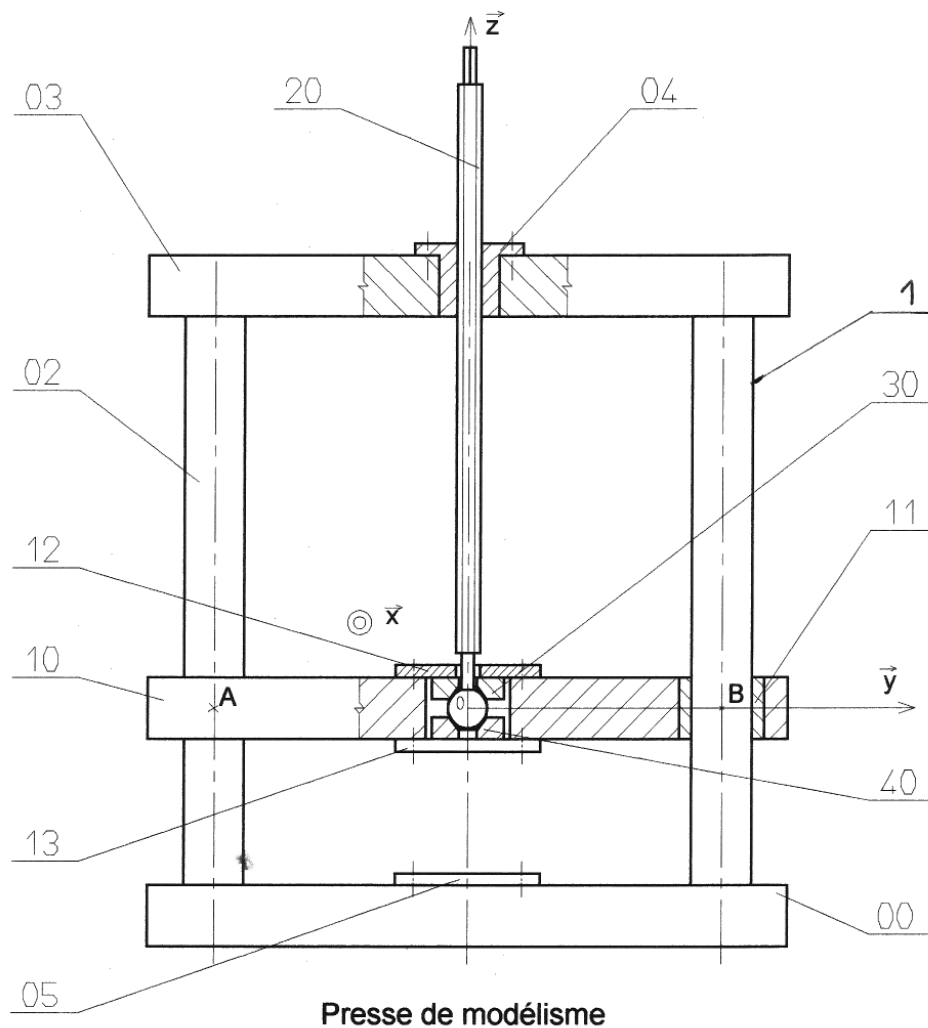
Liaison linéaire annulaire d'axe $(A; \vec{x})$			$4 \text{ d.d.l} : T_x ; R_x ; R_y ; R_z$
		$\{\mathbf{v}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & u_{21} \\ q_{21} & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A (\vec{x}, \dots)$ modèle valable uniquement au centre de la sphère	

Liaison linéaire rectiligne de normale $(A; \vec{z})$ et d'axe $(A; \vec{x})$		$4 d.d.l : Tx ; Ty ; Rx ; Rz$
		$\{ \mathbf{v}_{2/1} \} = \begin{Bmatrix} p_{21} & u_{21} \\ 0 & v_{21} \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ <p>modèle valable modèle valable $\forall A \in (A; \vec{x})$</p>

Liaison ponctuelle de normale $(A; \vec{z})$			$5 d.d.l : Tx ; Ty ; Rx ; Ry ; Rz$
	 <p>Nouvelle norme</p> <p>Ancienne norme</p>	$\left\{ \mathbf{v}_{2/1} \right\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & u_{21} \\ q_{21} & v_{21} \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A (... , \vec{z})$ <p>modèle valable modèle valable</p> <p>$\forall A \in (A; \vec{z})$</p>	

3) Mécanismes :

Pour illustrer la suite du cours, prenons l'exemple d'une presse de modélisme dont le dessin simplifié est représenté ci-dessous.



3.1) Structure d'une chaîne de solides : graphe des liaisons :

3.1.1) Classes d'équivalence :

Dans un mécanisme, les solides reliés par une liaison encastrement constituent un ensemble appelé **Classe d'Equivalence Cinématique (C.E.C.)**.

Dans la pratique chaque classe d'équivalence est repérée par un numéro correspondant au numéro de la pièce la plus représentative de l'ensemble.

Exemple : voir figure ci-dessous :

- Les deux embases et les deux colonnes de la presse de modélisme n'ont aucun mouvement relatif. Elles constituent la classe d'équivalence {0}, dont les éléments représentés sont :

$$\{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

- De la même façon la traverse 10, les deux bagues 11, les deux rondelles 12 et 13 appartiennent à la même classe d'équivalence {10}.

$$\{10\} = \{10, 11, 12, 13\}$$

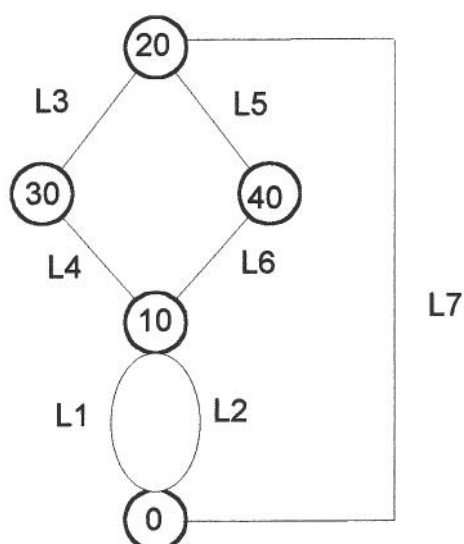
- On trouve d'autre part (pour finir l'inventaire) les classes :

$$\{30\} = \{30\} ; \{40\} = \{40\} ; \{20\} = \{20\}$$

3.1.2) Graphe des liaisons :

Le graphe des liaisons est une représentation plane qui sert à mettre en évidence les liaisons entre les différentes classes d'équivalence d'un mécanisme. Dans ce graphe, les C.E.C. sont schématisées par des cercles numérotés¹ et les liaisons par des arcs (ou des segments) joignant ces cercles.

On trouve ci-dessous le graphe associé à la presse de modélisme qui constitue notre exemple.



L1 : Liaison pivot glissant d'axe ($A; \vec{z}$)

L2 : Liaison pivot glissant d'axe ($B; \vec{z}$)

L3 : Liaison rotule de centre O

L4 : Liaison appui plan de normale ($O; \vec{z}$)

L5 : Liaison rotule de centre O

L6 : Liaison appui plan de normale ($O; \vec{z}$)

L7 : Liaison hélicoïdale d'axe ($O; \vec{z}$)

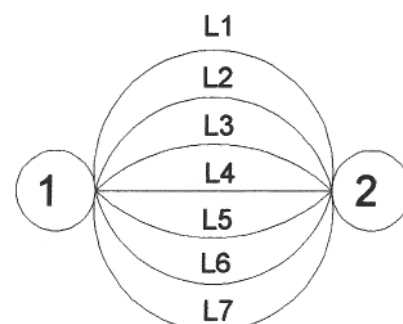
Remarque :

D'une façon générale, pour traduire les mouvements des pièces principales d'un mécanisme, il est préférable de rester à un niveau global en évitant de trop entrer dans les détails, de façon à construire le modèle le plus simple adapté au problème que l'on veut traiter.

3.2) Associations de liaisons en série et en parallèle ; liaisons cinématiquement équivalentes.

3.2.1) Liaisons en parallèle :

Définition : n liaisons $L1, L2, \dots, Ln$ sont disposées en parallèle entre deux solides 1 et 2 si chaque liaison relie directement ces deux solides. Le graphe des liaisons a la forme ci-contre :

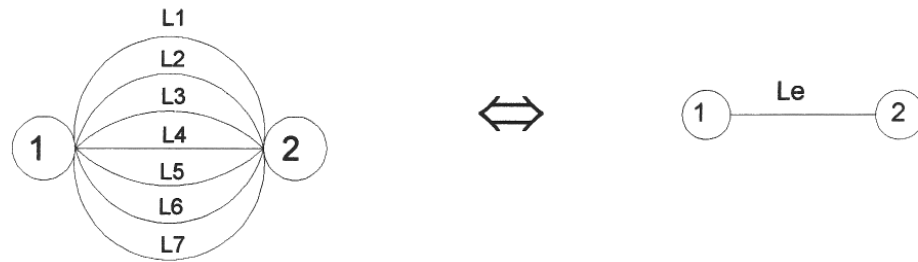


Afin de simplifier ce graphe, on introduit la notion de

¹ Les numéros présents dans les cercles représentant les C.E.C. correspondent au numéro de la classe d'équivalence.

liaison équivalente qui, à elle seule, se comporte de la même manière que cette association de liaisons.

Le graphe se simplifie donc de la manière suivante :



La liaison équivalente doit être compatible avec toutes les liaisons en parallèle, ce qui nous conduit à écrire que :

$${}_Q\{\mathbf{V}_{Le}\} = {}_Q\{\mathbf{V}_{L1}\} = {}_Q\{\mathbf{V}_{L2}\} = \dots = {}_Q\{\mathbf{V}_{Ln}\} \quad \forall Q \quad (1)$$

Exemple : Dans la presse de modélisme, les deux liaisons pivot glissant $L1$ et $L2$ installées en parallèle entre la traverse 10 et le socle 0, par l'intermédiaire des deux colonnes 1 et 2 sont équivalentes à une liaison glissière de direction \vec{z} .

Vérification :

$${}_Q\{\mathbf{V}_{Le}\} = {}_Q\{\mathbf{V}_{L1}\} = {}_Q\{\mathbf{V}_{L2}\}$$

Nota : Les composantes dans la base générale $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ des torseurs cinématiques s'expriment le plus souvent, dans ce type de problème, de la manière suivante :

$${}_Q\{\mathbf{V}_{Le}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{Le} \\ \vec{V}_{QLe} \end{Bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \vec{\Omega}_{Le} = p_e \vec{x} + q_e \vec{y} + r_e \vec{z} \\ \vec{V}_{QLe} = u_e \vec{x} + v_e \vec{y} + w_e \vec{z} \end{cases}$$

Donc pour l'exemple qui nous intéresse les torseurs cinématiques des deux liaisons en parallèles ($L1$ et $L2$) vont s'écrire de la manière suivante :

- Pour $L1$ (pivot glissant d'axe $(A; \vec{z})$) :

$${}_A\{\mathbf{V}_{L1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_1 & w_1 \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

- Pour $L2$ (pivot glissant d'axe $(B; \vec{z})$) :

$${}_B\{\mathbf{V}_{L2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_2 & w_2 \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Constatation avant d'aller plus en avant, on peut comparer les deux torseurs que si ils sont exprimés dans la même base et si ils sont exprimés en un même point (ce qui n'est pas le cas ici). Nous allons donc, par exemple, exprimer le torseur ${}_B\{\mathbf{V}_{L2}\}$ au point A (sachant que $\vec{BA} = -d.\vec{y}$) :

$${}_A\{\mathbf{V}_{L2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & r_2 \cdot d \\ 0 & 0 \\ r_2 & w_2 \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

En appliquant la relation (1) on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} p_e = 0 = 0 \\ q_e = 0 = 0 \\ r_e = r_1 = r_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_e = 0 = r_2 \cdot d \Rightarrow r_2 = 0 \\ v_e = 0 = 0 \\ w_e = w_1 = w_2 \end{cases}$$

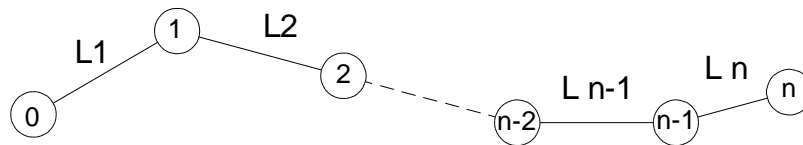
Donc :

$${}_A\{\mathbf{V}_{Le}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & w_e \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Le torseur cinématique de la liaison équivalente a la forme d'un torseur cinématique d'une liaison glissière de direction \vec{z} .

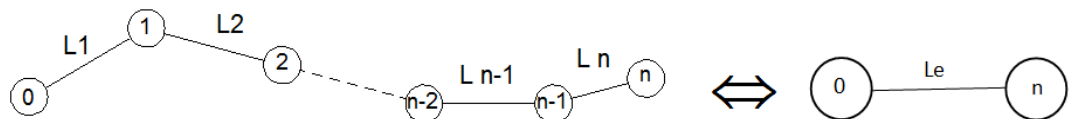
3.2.2) Liaisons en série :

Définition : n liaisons $L1, L2, \dots, Ln$ sont en série, ou réalisent une chaîne ouverte, entre deux solides 0 et n si elles sont reliées l'une à la suite de l'autre par l'intermédiaire de $(n-1)$ solides, le graphe des liaisons a la forme suivante :



Nota : on dit également que $(n+1)$ solides assemblés par n liaisons en série constituent une **chaîne continue ouverte**.

En utilisant la notion de liaison équivalente, le graphe se simplifie de la manière suivante :



Le torseur cinématique $\{\mathbf{V}_{Le}\}$ de la liaison équivalente représente le mouvement du solide n par rapport au solide 0. La relation entre le torseur $\{\mathbf{V}_{Le}\}$ et les torseurs cinématiques représentant les liaisons intermédiaires s'obtient en écrivant la relation des torseurs cinématiques entre les différents solides en présence :

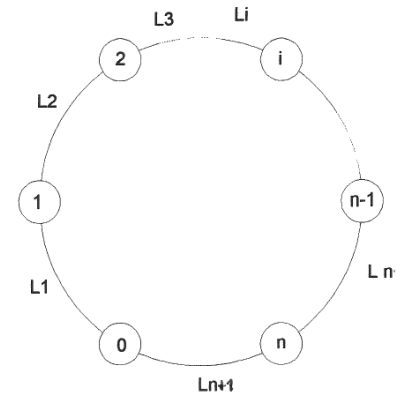
$$\left\{ \mathbf{V}_{n/0} \right\}_Q = \left\{ \mathbf{V}_{n/n-1} \right\}_Q + \dots + \left\{ \mathbf{V}_{1/0} \right\}_Q$$

Exemple : Dans la presse de modélisme les deux liaisons en série $L3$ et $L4$ d'une part et $L5$, $L6$ d'autre part sont équivalentes à une liaison ponctuelle de normale $(O; \vec{z})$ (amusez-vous à retrouver le résultat) .

3.3) Analyse cinématique : relations entre les vitesses issues de la fermeture de la chaîne cinématique.

3.3.1) Définition :

Une chaîne continue ouverte dont les deux solides extrêmes possèdent une liaison commune constitue une chaîne continue fermée. Dans le cas d'une chaîne continue fermée de $(n+1)$ solides assemblés en série par $(n+1)$ liaisons, le graphe des liaisons se trace ainsi :



3.3.2) Etude cinématique :

En écrivant la relation de composition des torseurs cinématiques entre les différents solides en présence on obtient :

$$\left\{ \mathbf{V}_{0/0} \right\}_Q = \left\{ \mathbf{V}_{0/n} \right\}_Q + \left\{ \mathbf{V}_{n/n-1} \right\}_Q + \dots + \left\{ \mathbf{V}_{1/0} \right\}_Q = \left\{ \vec{0} \right\}$$

Notation : Le torseur cinématique $\left\{ \mathbf{V}_{Li} \right\}$ de la liaison Li représente dans cette étude le mouvement du solide (i) par rapport au solide $(i-1)$. La relation précédente devient alors :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left\{ \mathbf{V}_{Li} \right\}_Q = \left\{ \vec{0} \right\} \quad \forall Q$$

4) Schéma cinématique minimal :

Le schéma cinématique minimal d'un mécanisme est une représentation géométrique plane ou spatiale du graphe des liaisons.

Pour construire ce schéma :

- **On positionne** les liaisons les unes par rapport aux autres,
- **On représente** les liaisons suivant leur apparence normalisée en prenant soin de **les dessiner suivant l'orientation imposée par le système**.

Exemple : le schéma minimal de la presse de modélisme :

