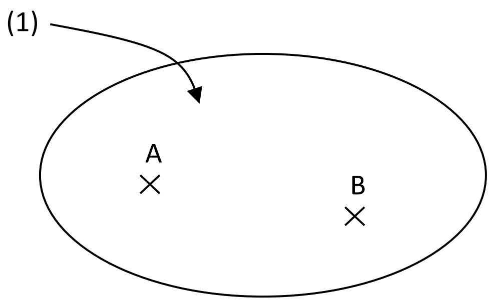
3.1 - Paramètres géométriques linéaires et angulaires

1) Solide indéformable :



Définition 3.2.1. : Le solide (1) est dit "indéformable" si quels que soient les points A et B de (1), la distance AB reste constante au cours du temps t :

$$\forall t, \forall\ A\ et\ B \in (1) : \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = Cte$$

Dans ce cours, on fera l'hypothèse que tous les solides sont des solides indéformables. Le qualificatif « indéformable » étant toujours sous-entendu (sauf hypothèse contraire).

2) Référentiel , repère :

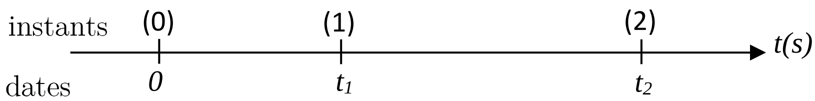
Le mouvement d'un solide doit être défini par rapport à un autre solide pris comme référence. C'est pourquoi, pour suivre l'évolution d'un mécanisme l'observateur a besoin d'un système de référence constitué par :

- Un espace physique, représenté par un espace affine (ε) à trois dimensions.

  Soit $R(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère de l'espace affine (ε) :

  - O est un point de (ε) appelé origine du repère,
  - $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est une base orthonormée de (E) espace vectoriel associé à (ε)

- Du temps, représenté par un espace affine à une dimension, dont les points sont appelés instants



L'espace vectoriel associé est orienté dans le sens de la succession des événements dans le temps. Chaque instant est repéré par sa date, notée t.

La durée entre deux instants (1) et (2), (1) précédent (2) dans l'ordre chronologique, de dates t1 et t2, est la différence t2-t1, l'unité de durée est la seconde.

Définition 3.2.2 : Le système S(R, t) constitue un référentiel (appelé encore système de référence, ou même abusivement repère).

3) Changement de référentiel, repère d'espace :

Définition 3.3.3 : En mécanique classique on formule l'hypothèse fondamentale suivante :

"Le temps est le même dans tous les systèmes de référence"

En conséquence, le changement de référentiel de S_1 (R_1,t) vers S_2 (R_2,t) se limite donc au changement de repère de référence de R_1 vers R_2.

Remarque :

On ne parlera plus guère de t, mais il sera toujours sous-jacent. On sera ramené, alors, au problème simple d'un changement de repère dans un espace affine. Pour passer d'un repère à un autre, dans un espace affine (ε), il faut savoir situer dans le premier l'origine du second.

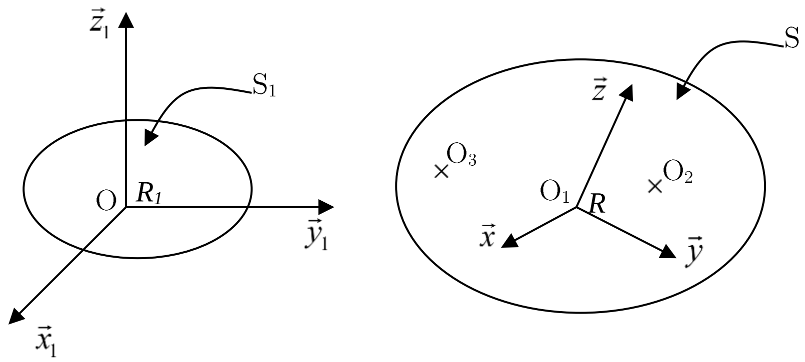
4) Equivalence repère - solide :

Dans un repère la position relative des axes est invariante au cours du temps, c'est pourquoi un repère est considéré comme équivalent à un solide. Par suite l'étude du mouvement du solide (2) par rapport au solide (1) peut être ramenée à l'étude du mouvement du repère R2 lié au solide (2), par rapport au repère R1 lié au solide (1).

Notations des solides : les solides sont notés (S_0), (S_1), (S_2),... ou plus simplement (0), (1), (2), ... Le solide (0) est traditionnellement le bâti, ou un carter fixe par rapport au repère galiléen.

5) Mouvement relatif entre deux solides :

5.1) Paramétrage :



Soient O_1, O_2, O_3 trois points non alignés du solide (S). Si on se donne la position de ces trois points par rapport à R_1, la position de (S) par rapport à R_1 est parfaitement définie. Mais les **neuf paramètres ainsi introduits** ne sont pas **indépendants**. En effet, puisque le solide (S) est considéré comme indéformable on peut écrire les trois équations indépendantes suivantes :

- $\left\|\overrightarrow{O_1O_2}\right\| = Cte$
- $\left\|\overrightarrow{O_1O_3}\right\| = Cte$
- $\left\|\overrightarrow{O_2O_3}\right\| = Cte$

En conséquence, pour définir complètement la position relative de deux solides, il est nécessaire de connaître 6 paramètres indépendants :

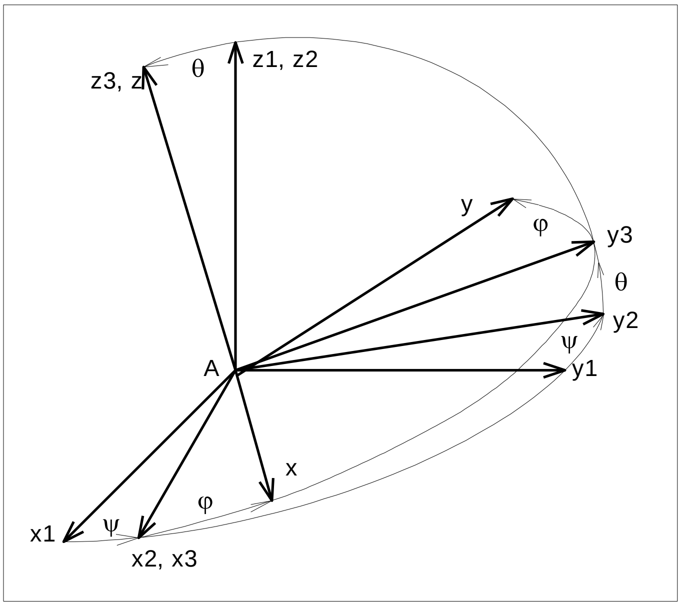
9 (3 x 3 paramètres par point) - **3** (équations indépendantes) = **6** (paramètres indépendants).

Par suite, il suffit de trois paramètres indépendants de position et de trois paramètres indépendants d'orientation.

Remarque : 6 paramètres indépendants est un maximum pour deux solides qui ne sont pas en contact. Dès qu'une liaison est établie, le nombre de paramètres nécessaires peut très vite diminuer.

5.2) Paramètres d'orientation :

5.2.1) Les angles d'Euler :



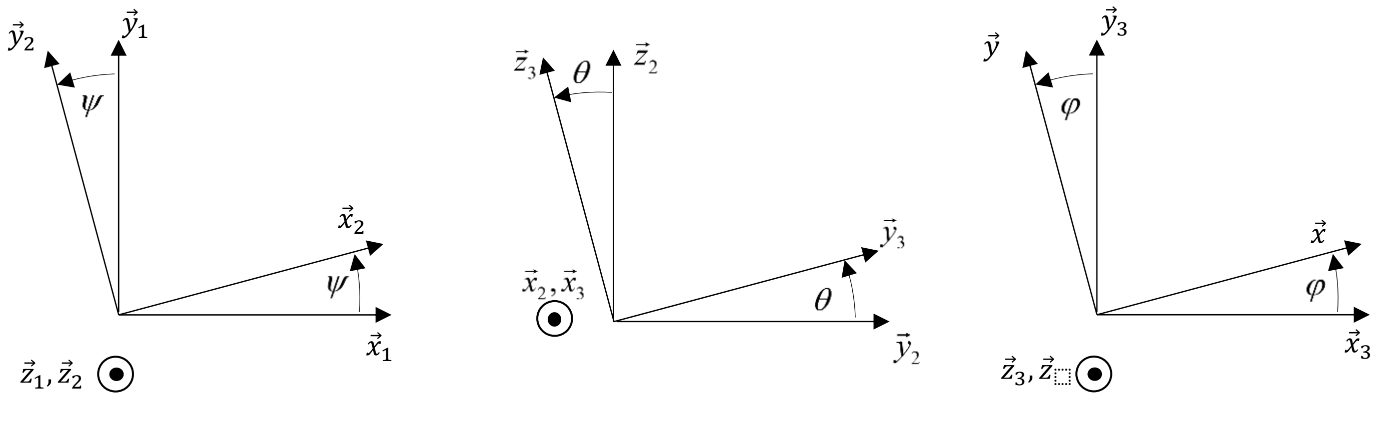
Les trois angles d'Euler sont :

$\psi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$: angle de précession,

$\theta = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$: angle de nutation,

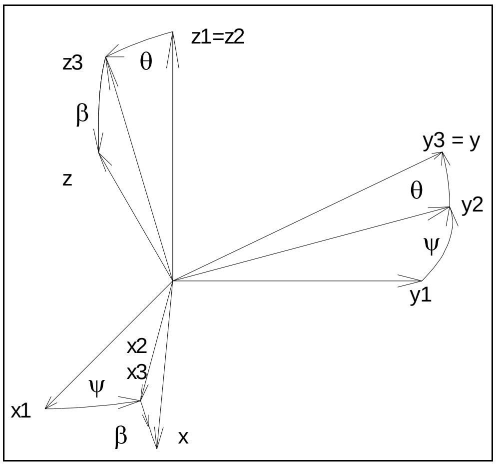
$\varphi = (\vec{y}_3, \vec{y})$: angle de rotation propre.

Figures de calculs associées :



$$(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \xrightarrow{rot(\vec{z}_1, \psi)} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_{1,2}) \xrightarrow{rot(\vec{x}_2, \theta)} (\vec{x}_{2,3}, \vec{y}_3, \vec{z}_3) \xrightarrow{rot(\vec{z}_3, \varphi)} (\vec{x}\ \ , \vec{y}\ \ , \vec{z}_{,3})$$

5.2.2) Les angles nautiques :



Les trois angles nautiques sont les suivants :

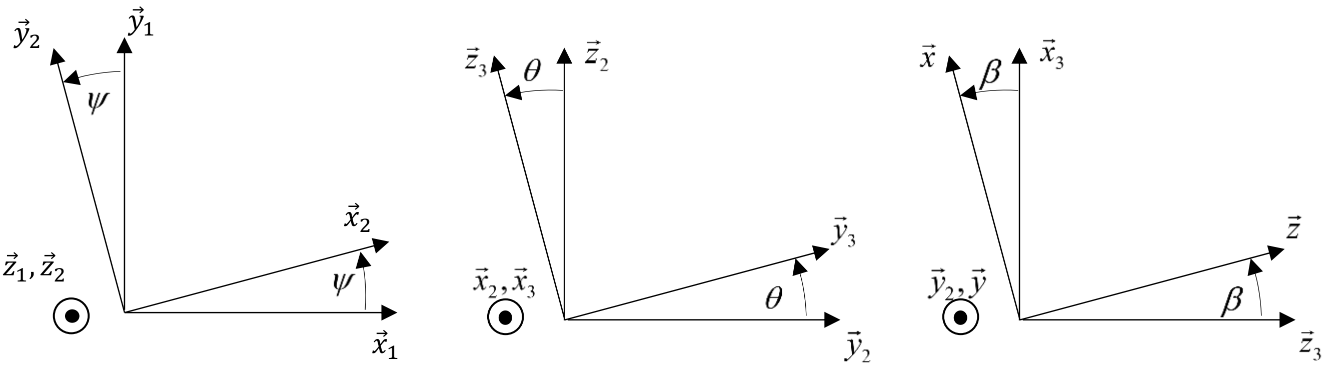
$\psi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$: angle de lacet

$\theta = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$: angle de roulis

$\beta = (\vec{z}_3, \vec{z})$: angle de tangage

Ceci dans le cas d'un mobile se déplaçant suivant la direction $\vec{x}$

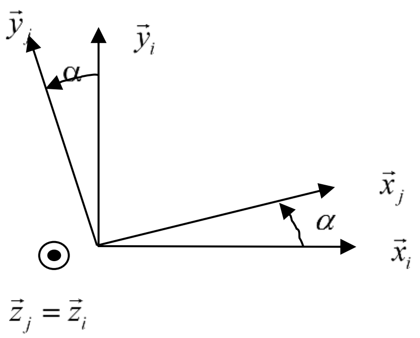
Figures de calcul associées :



$$(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \xrightarrow{Rot(\psi, \vec{z}_1)} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_{1,2}) \xrightarrow{Rot(\theta, \vec{x}_2)} (\vec{x}_{2,3}, \vec{y}_3, \vec{z}_3) \xrightarrow{Rot(\beta, \vec{y}_3)} (\vec{x}, \vec{y}_{,3}, \vec{z})$$

5.2.3) Vecteur vitesse angulaire :

On associe de façon presque systématique à un paramètre angulaire, une figure plane de changement de base, cela permet de décrire la rotation (ici d'un angle α) d'un repère $R_j(O; \vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j)$ par rapport à un repère $R_i(O; \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ ayant un axe commun par exemple ici $\vec{z}_j = \vec{z}_i$, on utilise une figure de calcul. Cette figure est telle que :



$\alpha = (\vec{x}_i, \vec{x}_j)$

$$R_i \xrightarrow{\text{Rotation } (\alpha; \vec{z}_{i,j})} R_j$$

Ici le repère de référence est R_i et on pose :

$$\vec{\Omega}_{Rj/Ri} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \vec{z}_{i,j} = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_{i,j}$$

$\vec{\Omega}_{Rj/Ri}$ est appelé vecteur rotation du repère Rj par rapport au repère Ri, il représente la vitesse angulaire du repère Rj par rapport au repère Ri. Son unité est le rad.s-1.

Nota : On constate ici que α va croître au cours du temps, que α est positif (sens trigo), donc :

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} > 0$$

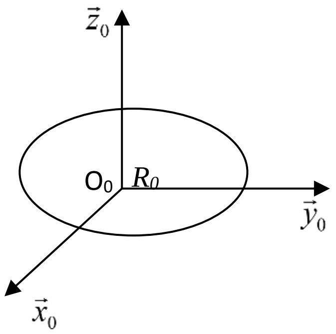
Conclusion : Les figures représentant les rotations planes sont systématiquement faites dans le cas particulier où les angles de rotation sont compris entre *0* et $\frac{\pi}{2}$

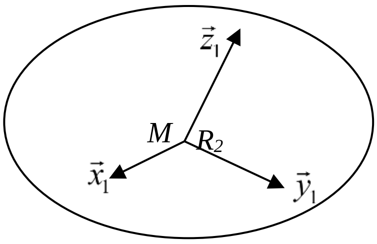
Convention :

La base prise comme référence (base de départ) utilise, dans sa représentation graphique les directions verticale et horizontale, la base en « mouvement » est représentée inclinée.

5.3) Paramètres de position :

5.3.1) Remarques sur les paramètres de position :

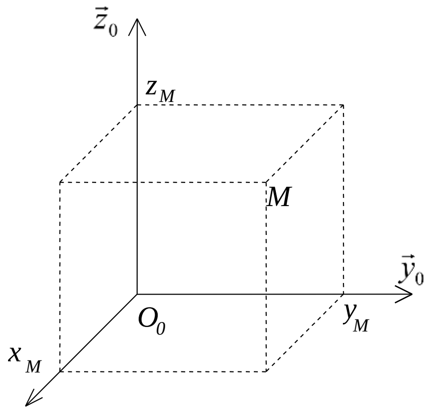




La position du repère $R_1(M;\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ par rapport au repère $R_0(O_0;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est parfaitement déterminée si on se fixe les coordonnées de l'origine *M* dans le repère R_0.

Pour cela on peut utiliser les trois principaux paramétrages suivants :

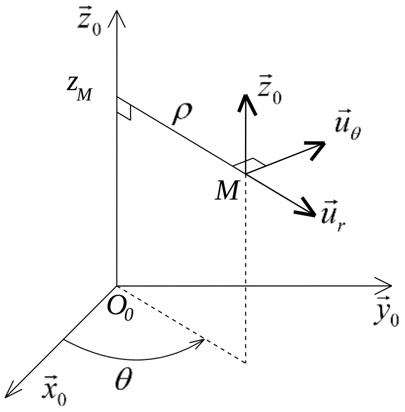
5.3.2) Coordonnées cartésiennes :



- $\overrightarrow{O_0M} = x_M.\vec{x}_0 + y_M.\vec{y}_0 + z_M.\vec{z}_0$
- $\left\|\overrightarrow{O_0M}\right\| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2}$

Coordonnées du point M : (x_M, y_M, z_M)

5.3.3) Coordonnées cylindriques :



$\overrightarrow{O_0M} = z_M.\vec{z}_0 + \rho.\vec{u}_r$

avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0,2.\pi[$

$\left\|\overrightarrow{O_0M}\right\| = \sqrt{z_M^2 + \rho^2}$

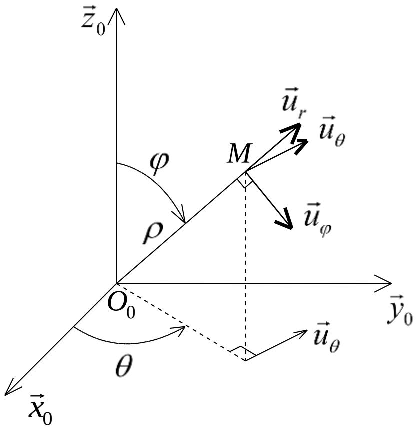
coordonnées cylindriques du point M : (ρ,θ,z_M)

relation entre coordonnées cylindriques et cartésiennes :

$x_M = \rho \cdot \cos\theta$;

$y_M = \rho \cdot \sin\theta$.

5.3.4) Coordonnées sphériques :



$\overrightarrow{O_0M} = \rho.\vec{u}_r$

avec $\rho \geq 0$, $\theta \in [0,2.\pi[$ et $\varphi \in [0,\pi]$

$\left\|\overrightarrow{O_0M}\right\| = \rho$

Coordonnées sphériques du point *M :* (ρ,θ,φ)

Relations entre coordonnées sphériques et cartésiennes :

$x_M = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta$;

$y_M = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta$;

$z_M = \rho \cdot \cos\varphi$

6) Correspondance degrés de liberté - paramètres d'orientation et de position :

Pour comptabiliser le nombre de paramètres indépendants nécessaire au paramétrage d'un solide indéformable par rapport à un autre solide pris comme référence, il suffit de comptabiliser le nombre de degrés de liberté, on procédera aux associations suivantes :

- à une translation correspondra un paramètre de position (notés souvent : λ, ρ, μ ,η...)
- à une rotation correspondra un paramètre d'orientation (notés souvent : θ, α, β, φ, ψ...)

Remarque : pour un paramètre angulaire, il convient d'établir la figure plane de changement de base (figure de calcul), nécessaire pour les calculs vectoriels.