34 Cinématique Plane

1) Conditions et limites de la modélisation plane :

1.1) Notion de mécanisme plan (conditions) :

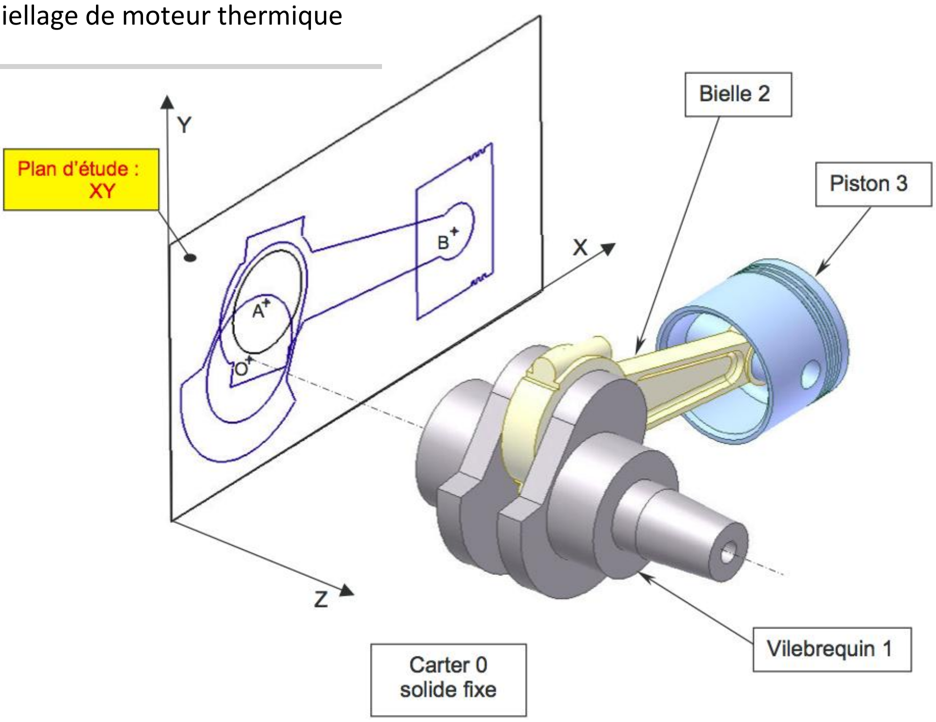
Un mécanisme est supposé plan, d'un point de vue cinématique, à partir du moment où on peut étudier ces mouvements en projection sur un seul plan.

Cela revient à dire que les solides sont en mouvement de telle sorte qu'un plan lié fictivement à un solide glisse sur un plan de n'importe quel autre solide.

Les mouvements possibles sont alors :

- des translations (rectiligne, circulaire ou quelconques) dans le plan de l'étude,
- des rotations autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan de l'étude,
- des autres mouvements dans ce plan : on parle alors de mouvements plans

Exemple : embiellage de moteur thermique



Mouvements par rapport au carter 0 (non représenté) :

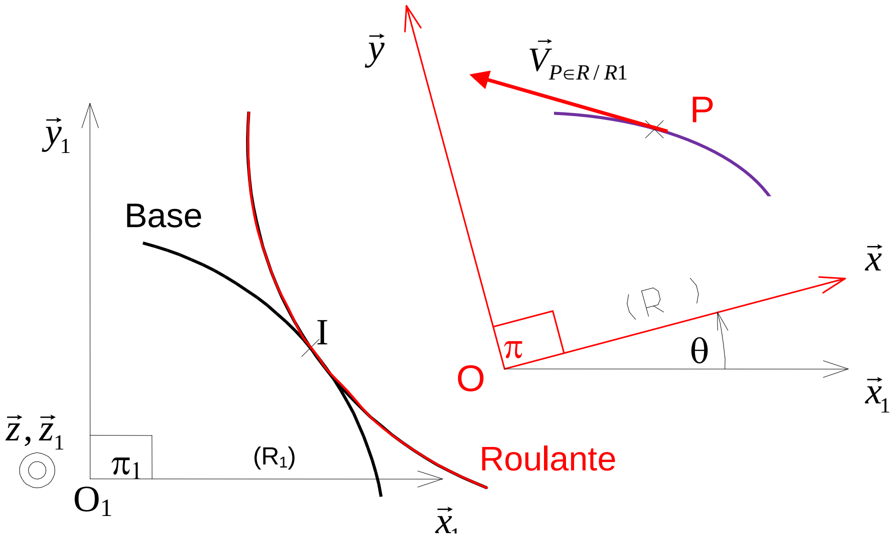
- 1/0 : rotation autour de $(O;\vec{z})$
- 3/0 : translation rectiligne de direction $\vec{x}$
- 2/0 : mouvement plan dans $(\vec{x},\vec{y})$

Autres mouvements relatifs :

- 2/1 : Rotation autour de l'axe $(A;\vec{z})$
- 3/2 : rotation autour de l'axe $(B;\vec{z})$

2) Le mouvement plan :

2.1) Définition :



Dans le mouvement du repère $R(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ lié au solide (S) *(non représenté)* par rapport au repère $R_1(O_1;\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$, supposons que le plan $\pi\,(O;\vec{x},\vec{y})$ du repère R glisse sur le plan $\pi_1\,(O_1;\vec{x}_1,\vec{y}_1)$ et lui reste tangent en permanence. Dans ces conditions le mouvement de R par rapport à R_1 est appelé mouvement plan sur plan.

- Le plan π est appelé plan mobile et le plan π_1 plan fixe.
- Dans ce mouvement plan sur plan, un seul paramètre angulaire suffit à orienter la base de R par rapport à la base de R_1, on pose : $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x})$.
- Le vecteur rotation : $\vec{\Omega}_{R/R1} = \dot{\theta}\cdot\vec{z}$ est perpendiculaire aux plans π et π_1.
- Le vecteur vitesse : $\vec{V}_{P\in R/R_1}$ est situé dans les plans π et π_1.

2.2) Centre instantané de rotation (CIR) :

Tout déplacement plan est équivalent, à l'instant t, à une rotation (plus exceptionnellement à une translation), il existe donc un point I centre de la rotation instantanée à la date t, tel que:

$$\boxed{\vec{V}_{I\in R/R_1} = \vec{0}}$$

Le point I est donc appelé ***CIR*** du mouvement plan sur plan de R_1 par rapport à R.

<u>Définitions :</u>

- La trajectoire du point I dans le repère R (plus généralement dans le plan **mobile**) est appelée **roulante** du mouvement plan sur plan de R par rapport à R_1.
- La trajectoire du point I dans le repère R_1 (plus généralement dans le plan **fixe**) est appelée **base** du mouvement plan sur plan de R par rapport à R_1.
- La base est la roulante sont deux courbes tangentes au point I qui roulent sans glisser l'une sur l'autre.

Propriétés :

- Le CIR est toujours défini sauf lorsque $\dot{\theta} = 0$.
- Le CIR est unique.
- Dans le cas de mouvements plans de trois plans (1, 2, 3) les CIR I_{12},I_{23}, I_{13} sont alignés.

Remarque : Le CIR est une notion instantanée :

- Pour les translations, $I_{S/R1}$ est rejeté à l'infini ;
- Pour les rotations, $I_{S/R1}$ occupe une position fixe ;
- Pour les autres mouvements plans $I_{S/R1}$ évolue dans le plan fixe R_1 (base) et dans le plan mobile lié à S (roulante)

2.2.1) Recherche géométrique du CIR :

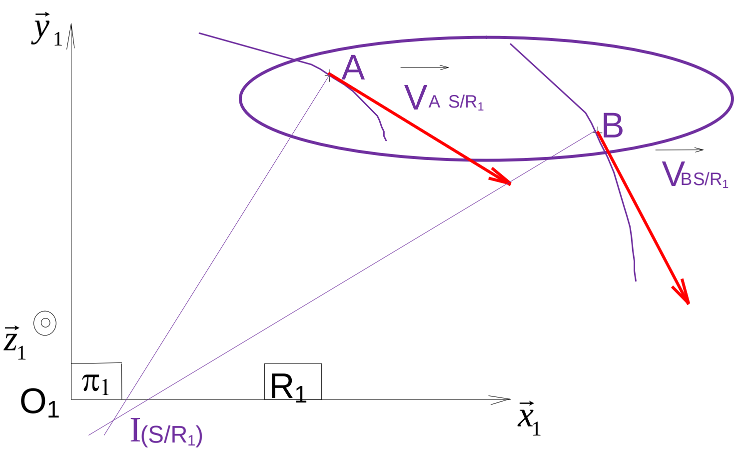
Considérons le point P lié au plan mobile π (donc au solide S), Soit $T_{P\in S/R_1}$ la trajectoire du point P élément du solide (S) par rapport au plan fixe $\pi 1$ lié à R_1.

- Le vecteur $\vec{V}_{P\in S/R_1}$ est tangent en P à la trajectoire $T_{P\in S/R_1}$
- La relation entre les vecteurs vitesse des points P et I de (S) par rapport à R_1 s'écrit :

$$\vec{V}_{P\in S/R_1} = \vec{V}_{I\in S/R_1} + \vec{\Omega}_{S/R_1} \wedge \overrightarrow{IP}$$
$$\vec{V}_{P\in S/R_1} = \vec{\Omega}_{S/R_1} \wedge \overrightarrow{IP} = \dot{\theta} \cdot \vec{z} \wedge \overrightarrow{IP}$$

Le vecteur vitesse $\vec{V}_{P\in S/R_1}$ est donc perpendiculaire à $\overrightarrow{IP}$. En conséquence le CIR se trouve sur la normale en P au vecteur vitesse $\vec{V}_{P\in S/R_1}$.

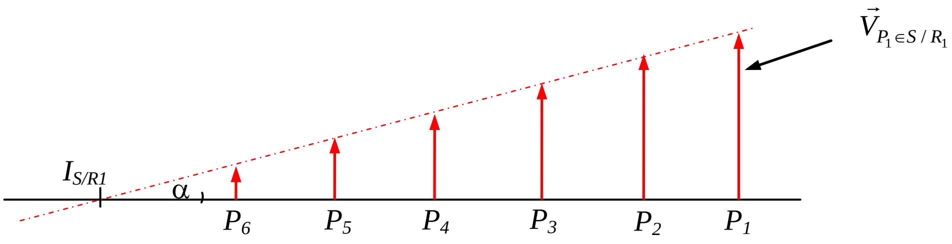
Conséquence : Si on connaît les trajectoires de deux points du solide (S) lié au plan mobile π dans le plan fixe π_1, le CIR se trouve à l'intersection des normales aux vecteurs vitesse de ces points :



2.2.2) Répartition des vitesses autour du CIR :

Le module de la vitesse est proportionnel à la distance qui sépare le point du centre instantané de rotation :

$$\forall P \in S\,;\vec{V}_{P\in S/R_1} = \vec{\Omega}_{S/R_1} \wedge \overrightarrow{IP} \Leftrightarrow \left\|\vec{V}_{P\in S/R_1}\right\| = \omega_{S/R_1} \cdot IP$$

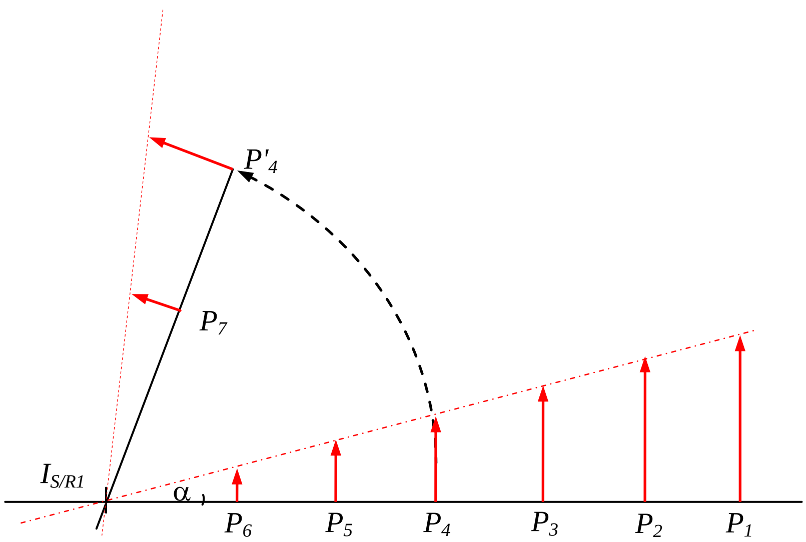


La quantité $\omega_{S/R1}$ étant la même pour tous les points du solide S, on a :

$$\omega_{S/R_1} = \frac{\left\|\vec{V}_{P_1\in S/R_1}\right\|}{IP_1} = \frac{\left\|\vec{V}_{P_2\in S/R_1}\right\|}{IP_2} = \frac{\left\|\vec{V}_{P_3\in S/R_1}\right\|}{IP_3} = \frac{\left\|\vec{V}_{P_4\in S/R_1}\right\|}{IP_4} = \frac{\left\|\vec{V}_{P_5\in S/R_1}\right\|}{IP_5} = \frac{\left\|\vec{V}_{P_6\in S/R_1}\right\|}{IP_6} = \tan\alpha$$

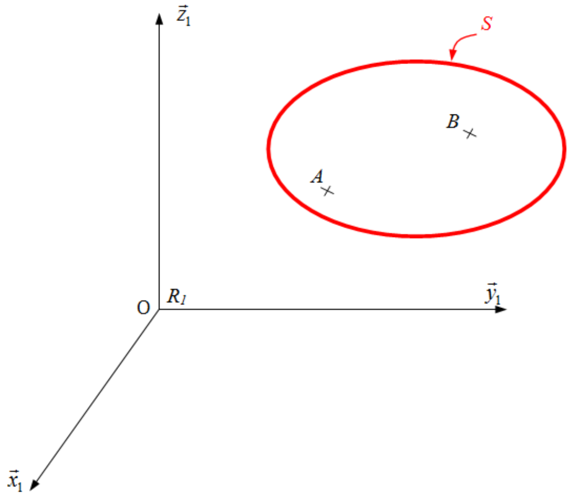
On appelle triangle des vitesses la figure formée en joignant le *CIR*, un point P_i et l'extrémité du vecteur vitesse $\vec{V}_{P_i\in S/R_1}$ (théorème de Thalès).

Ce triangle, tracé pour n'importe quel point *Pi* permet de connaitre le champ des vecteurs vitesse dans sa totalité.



Le triangle des vitesses fournit une méthode pour dessiner les vitesses de points alignés avec le CIR

2.3) Torseur cinématique (ou torseur distributeur des vitesses) :



Soient deux points A et B d'un solide S en mouvement par rapport à un repère R_1. Appliquons la relation de changement de base de dérivation au vecteur $\overrightarrow{AB}$, entre le repère R_1 lié au solide 1et le repère lié R au solide S :

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{R_1} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{R} + \vec{\Omega}_{R/R_1} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Or $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{R} = \vec{0}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant constant dans S et

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{R_1} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OB}\right]_{R_1} - \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_{R_1} = \vec{V}_{B/R_1} - \vec{V}_{A/R_1}$$

Comme A et B sont des points naturels de S, on peut écrire que :

$$\vec{V}_{B/R_1} = \vec{V}_{B\in S/R_1} \quad et \quad \vec{V}_{A/R_1} = \vec{V}_{A\in S/R_1}$$

Par suite, la relation entre les vecteurs vitesse des points A et B du solide S s'écrira :

$$\vec{V}_{B\in S/R_1} - \vec{V}_{A\in S/R_1} = \vec{\Omega}_{R/R_1} \wedge \overrightarrow{AB}$$

soit :

$$\boxed{\vec{V}_{B\in S/R_1} = \vec{V}_{A\in S/R_1} + \vec{\Omega}_{S/R_1} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

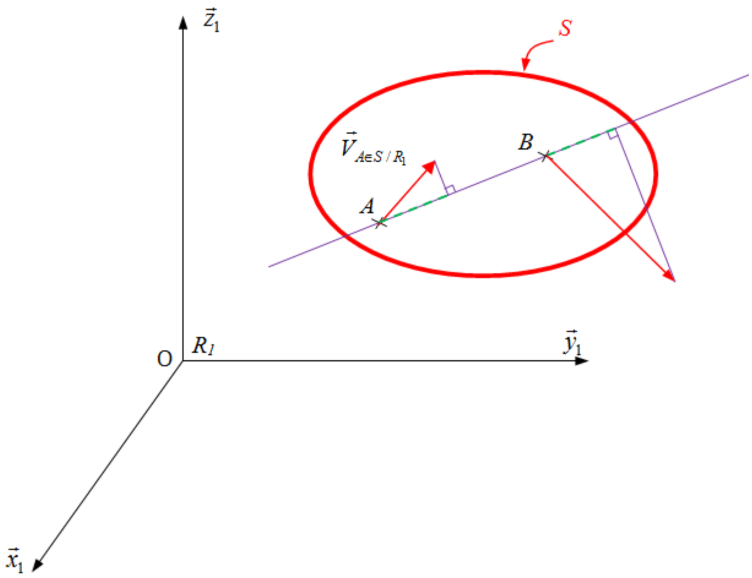
Les vecteurs vitesse des deux points A et B du solide S vérifient la relation de changement de point du moment d'un torseur. Par conséquent, il est possible de représenter au point A le mouvement du solide S par rapport au repère R_1, par le torseur suivant :

$$_A\left\{\mathcal{V}_{S/R_1}\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{S/R_1} \\ \vec{V}_{A\in S/R_1} \end{Bmatrix}$$

Le torseur $_A\left\{\mathcal{V}_{S/R1}\right\}$ est appelé <u>torseur cinématique</u> (ou torseur distributeur des vitesses) du mouvement du solide S par rapport au solide lié au repère R_1.

<u>Axe central</u> : A chaque instant, le torseur cinématique possède un axe central. Pour tous les points du solide appartenant à cet axe, la vitesse est identique et colinéaire au vecteur rotation. Cet axe appelé Axe Instantané de Rotation et de Glissement est noté $\Delta_{S/R1}$.

2.4) Equiprojectivité du champ des vecteurs vitesse d'un solide indéformable :



Le champ des moments d'un torseur étant équiprojectif, le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide l'est également.

Cette propriété se traduit par la relation scalaire suivante :

$$\forall A \, et \, B \in S \qquad \vec{V}_{A\in S/R_1} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{V}_{B\in S/R_1} \cdot \overrightarrow{AB}$$

<u>Démonstration :</u>

$$\vec{V}_{A\in S/R_1} = \vec{V}_{B\in S/R_1} + \vec{\Omega}_{S/R_1} \wedge \overrightarrow{AB}$$

En multipliant scalairement par $\overrightarrow{AB}$ chaque coté de l'égalité :

$$\vec{V}_{A\in S/R_1} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\vec{V}_{B\in S/R_1} + \vec{\Omega}_{S/R_1} \wedge \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}_{A\in S/R_1} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{V}_{B\in S/R_1} \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\vec{\Omega}_{S/R_1} \wedge \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AB}$$

produit mixte $\Rightarrow \left(\vec{\Omega}_{S/R_1} \wedge \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB}\right) \cdot \vec{\Omega}_{S/R_1}$

ici le produit vectoriel s'annule *(les deux vecteurs sont confondus)*, donc on retrouve bien la relation :

$$\boxed{\forall A \, et \, B \in S \qquad \vec{V}_{A\in S/R_1} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{V}_{B\in S/R_1} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

Cette relation a une interprétation géométrique simple :

À une date t donnée, les projections orthogonales des vecteurs vitesse $\vec{V}_{A\in S/R_1}$ *et* $\vec{V}_{B\in S/R_1}$ sur la droite *(AB)* sont égales.

<u>Remarque</u> : Les projections orthogonales de vecteurs sur une droite sont des nombres algébriques, donc il faire attention à construire ces projections du même coté par rapport respectivement aux points A et B.