3.3 Exercices de cinématique du point

C2 Procéder à la mise en œuvre d'une démarche de résolution analytique	
Connaissances :	**Savoir-faire :**
• Dérivée temporelle d'un vecteur par rapport à un référentiel • Relation entre les dérivées temporelles d'un vecteur par rapport à deux référentiels distincts • Composition des vitesses angulaires • Composition des vitesses	Déterminer la loi entrée - sortie géométrique d'une chaine cinématique

Table des matières

3_3.1 Dérivation de vecteurs de bases : 2

I Présentation : 2

II Travail demandé : 2

3_3.2 Robot deux axes : 2

I présentation : 2

II Travail demandé : 2

3_3.3 Hélicoptère : 3

I Présentation : 3

II Travail demandé : 3

3_3.4 Robot ABB : 4

I Présentation : 4

II Travail demandé : 4

3_3.5 Robot ramasseur de fruits : 5

I Présentation : 5

II Travail demandé : 5

3_3.6 Eolienne : 6

I Présentation : 6

II Travail demandé : 6

3_3.7 Centrifugeuse d'entraînement des pilotes d'avions de chasse. 7

I Présentation : 7

II Travail demandé : 7

3_3.8 Echelle E.P.A.S. 8

I Présentation : 8

II Travail demandé : 9

3₃.1 Dérivation de vecteurs de bases :

I Présentation :

On considère trois repères R_0, R_1 et R_2 telles que :

- R_1 est en rotation d'angle α autour de $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$,
- R_2 est en rotation d'angle θ autour de $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$,

II Travail demandé :

Q1. Dessiner les deux figures de changement de bases.(figures de calcul)

Q2. Ecrire les vecteurs de rotation : $\vec{\Omega}_{1/0}$, $\vec{\Omega}_{2/1}$, $\vec{\Omega}_{2/0}$.

Q3. Exprimer $\vec{z}_2$ dans la base B_0.

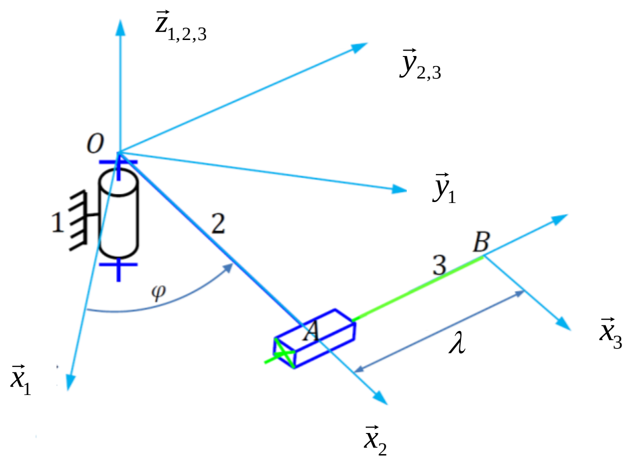
Q4. Calculer $\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_1\right]_{R_0}$, $\left[\frac{d}{dt}\vec{y}_2\right]_{R_0}$, $\left[\frac{d}{dt}\vec{z}_2\right]_{R_1}$, $\left[\frac{d}{dt}\vec{z}_2\right]_{R_0}$ et $\vec{x}_0 \cdot \left[\frac{d}{dt}\vec{x}_2\right]_{R_0}$

3₃.2 Robot deux axes :

I présentation :

Le robot manipulateur représenté ci-dessous est constitué de trois solides :

- Le socle 1 considéré comme étant le bâti du robot. Soit $R_1(O;\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ le repère lié à ce solide.
- Le corps 2 dont l'assemblage avec le corps 1 permet une rotation autour de l'axe $(O\ ;\vec{z}_1)$ (liaison pivot).Le paramétrage du mouvement est confié à l'angle $\varphi = (\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (\vec{y}_1,\vec{y}_2)$. Soit $R_2(O;\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ le repère associé.
- Le bras 3 dont l'assemblage avec le solide 2 permet une translation suivant la direction $\vec{y}_3$ (liaison glissière). Le paramétrage du mouvement est confié au paramètre de position λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \vec{y}_3$. Soit $R_3(A;\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$. On donne $\overrightarrow{OA} = a \cdot \vec{x}_2$.



II Travail demandé :

Q1. Tracer la figure de changement de base et déterminer le vecteur rotation associé.

Q2. Déterminer le vecteur position du point B dans R_3, R_2 et R_1.

Q3.Déterminer les vecteurs vitesses $\vec{V}_{A/R_3}$, $\vec{V}_{A/R_2}$ et $\vec{V}_{A/R_1}$

Q4. Déterminer la vitesse $\vec{V}_{B/R_1}$ et l'accélération $\vec{a}_{B/R_1}$.

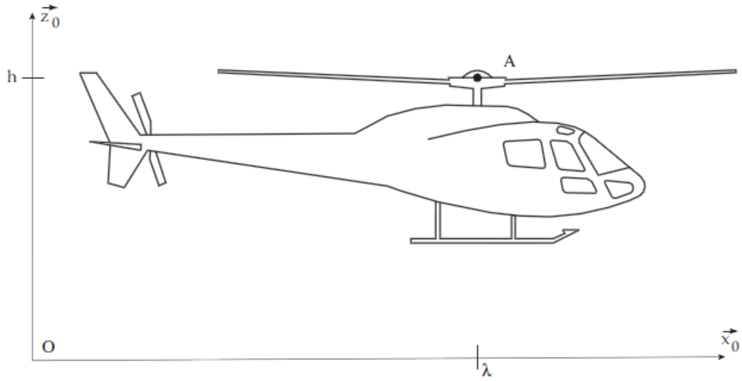
33.3 Hélicoptère :

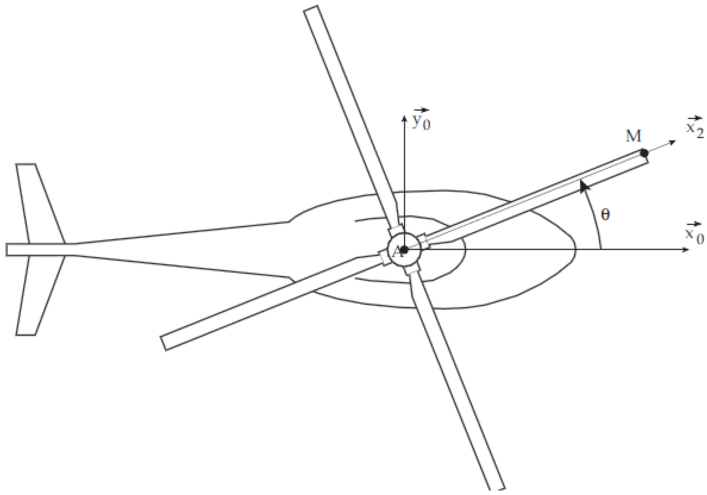
I Présentation :

La vitesse des hélicoptères est bien inférieure à celle des avions car elle est limitée par un critère simple : la vitesse en bout de pale ne doit pas dépasser la vitesse du son.

On considère un hélicoptère 1 se déplaçant à la vitesse horizontale $\vec{V}_{A/R_0} = V \cdot \vec{x}_0$ constante par rapport au sol 0. Soit $R_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère fixe par rapport au sol et $R_1(A;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère fixe par rapport à l'hélicoptère, où A est le point au centre du rotor. On note : $\overrightarrow{OA} = h \cdot \vec{z}_0 + \lambda(t) \cdot \vec{x}_0$ où h est une constante.

Le rotor principal 2 de l'hélicoptère comporte 4 pales. Soit $R_2(A;\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ un repère en rotation par rapport à R_1 d'un angle θ autour de l'axe $(A;\vec{z}_0)$. On note la vitesse constante du rotor par rapport à l'hélicoptère $\dot{\theta} = \omega$. Soit M le point situé à l'extrémité d'une pale. $\vec{x}_2$ est choisi tel que $\overrightarrow{AM} = R \cdot \vec{x}_2$





II Travail demandé :

<u>Objectif</u> : On souhaite déterminer la vitesse maximale théorique d'un hélicoptère

Q1. Déterminer le vecteur position du point A dans le repère R_0

Q2. Déterminer le vecteur vitesse du point A du rotor 2 par rapport au sol 0. En déduire la relation entre V et $\dot{\lambda}$

Q3. Déterminer le vecteur position du point M dans le repère R_0.

Q4. Déterminer le vecteur vitesse du point M du rotor 2 par rapport au sol 0.

Q5. Déterminer l'expression de la vitesse maximale V_{max} en M par rapport à R_0 au cours du mouvement en fonction de V , ω et R, en précisant pour quelle position ce maximum est atteint.

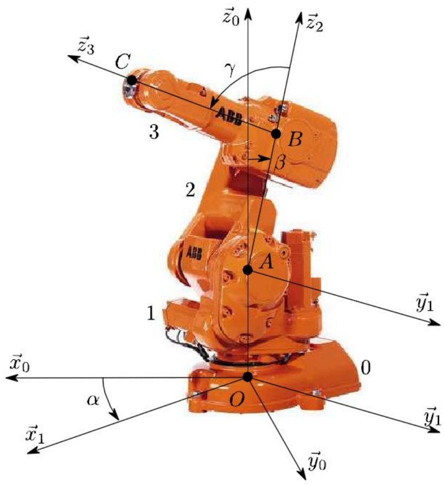
Q6. Sachant que la vitesse du rotor vaut $\omega = 384\ tr.min^{-1}$, le rayon du rotor (longueur d'une pale) vaut $R = 4.5\ m$ et que la vitesse de la pale ne doit jamais dépasser la vitesse du son, déterminer la vitesse maximale V de l'hélicoptère par rapport au sol (le résultat sera donné en *km/h* ; on suppose qu'il n'y a pas de vent).

33.4 Robot ABB :

I Présentation :

La société ABB conçoit et réalise des robots de manutention (figure ci-contre). Ce robot admet différents types d'outils à son extrémité. Pour manipuler des objets légers et fragiles, on utilise une ventouse reliée à une pompe à vide. Pour des raisons de cadence, les mouvements du robot sont rapides. Mais des mouvements trop brusques peuvent entraîner un glissement de l'objet sur la ventouse, voire sa chute. Le cas le plus défavorables est généralement sur l'axe vertical, lorsque les effets d'inertie se cumulent au poids de l'objet. On admet qu'un calcul d'efforts au niveau de la ventouse a permis de fixer l'accélération verticale maximale à $3.g$.

Le robot repose sur un socle *0* et comporte quatre bras : *1*, *2*, *3* et *4* en rotation les uns par rapport aux autres.



Le paramétrage tridimensionnel est donné ci-contre. Un schéma cinématique dans le plan $(O;\vec{x}_1,\vec{z}_0)$ est donné ci-dessous. Attention, les angles ne sont pas tous positifs sur le dessin ; Veillez à l'orientation des axes.

On supposera dans cette partie que *4* est immobile par rapport à *3*.

- *1* est en rotation par rapport à *0* autour de l'axe $(O;\vec{z}_0)$, paramétrée par α.
- *2* est en rotation par rapport à *1* autour de l'axe $(A;\vec{y}_1)$, paramétrée par β.
- *3* est en rotation par rapport à *2* autour de l'axe $(B;\vec{y}_2)$, paramétrée par γ.

On donne : $OA = h = 0.4\ m$, $AB = H = 1\ m$ et $BC = L = 1\ m$.

II Travail demandé :

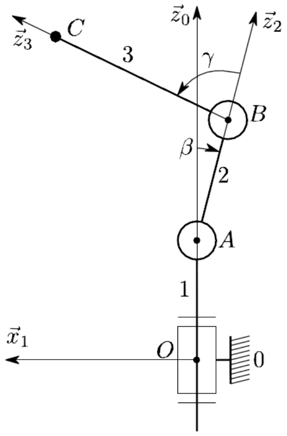


Schéma cinématique

<u>Objectif</u> : Vérifier que l'accélération verticale maximale du point *C* par rapport à R_0 est inférieure à $3.g$

Q1. Construire les figures planes de repérage/paramétrage (figures de calcul), puis indiquer sous chacune de ces figures l'expression des vecteurs rotation correspondant.

Q2. Exprimer le vecteur position du point *C* par rapport à R_0

Q3. Calculer la vitesse $\vec{V}_{C/R_0}$ en fonction des vitesses de rotation de chacun des bras et des paramètres de la géométrie.

Q4. Calculer la composante verticale de l'accélération $\vec{z}_0 \cdot \vec{a}_{C/R_0}$ en fonction des vitesses et accélérations de chacun des bras et des paramètres de la géométrie.

Q5. Faites l'application numérique en utilisant les données suivantes et conclure sur le risque de glissement de l'objet.

<u>Données</u> : $\alpha = 0°$, $\dot{\alpha} = 0\,rad \cdot s^{-1}$, $\ddot{\alpha} = 0\,rad \cdot s^{-2}$, $\beta = 45°$, $\dot{\beta} = 2\,rad \cdot s^{-1}$, $\ddot{\beta} = -10\,rad \cdot s^{-2}$,

$\gamma = 60°$, $\dot{\gamma} = 1\,rad \cdot s^{-1}$, $\ddot{\gamma} = -5\,rad \cdot s^{-2}$

33.5 Robot ramasseur de fruits :

I Présentation :

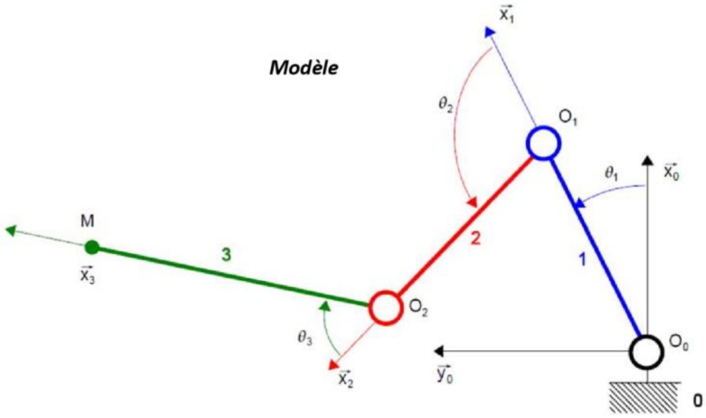
On étudie un robot ramasseur de fruits. Il permet à un agriculteur de cueillir, de manière automatique, les fruits mûrs dans les arbres, et de les mettre dans un conteneur spécifique.

Extrait du cahier des charges :

Exigences techniques	Critère	Niveau
Exigence 1.4	Vitesse d'approche du fruit	< 3 cm/s

Ce système est constitué de quatre solides :

- Un bâti 0 de repère associé $R_0(O_0;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$, tel que l'axe $(O;\vec{z}_0)$ soit orienté suivant l'horizontale perpendiculaire au plan du modèle ci-contre.
- Le bras principal 1 tourne autour de l'axe $(O_0;\vec{z}_0)$ par rapport au bâti 0. Soit $R_1(O_0;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ le repère associé, on pose : $\theta_1=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)$, $\overrightarrow{O_0O_1}=R\cdot\vec{x}_1$.



- Le bras intermédiaire 2 tourne autour de l'axe $(O_1;\vec{z}_0)$ par rapport à 1. Soit $R_2(O_1;\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ le repère associé, on pose : $\theta_2=(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$, $\overrightarrow{O_1O_2}=R\cdot\vec{x}_2$.
- Le bras effecteur 3 tourne autour de l'axe $(O_2;\vec{z}_0)$ par rapport à 2. Soit $R_3(O_2;\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$ le repère associé, on pose : $\theta_3=(\vec{x}_2,\vec{x}_3)$, $\overrightarrow{O_2M}=L\cdot\vec{x}_3$.

II Travail demandé :

Objectif : Déterminer la valeur numérique de la vitesse maximale de l'extrémité du bras effecteur et conclure quant à la capacité du robot à satisfaire le critère de vitesse d'approche du fruit du cahier des charges.

Q1. Construire les figures planes de repérage/paramétrage (figures de calcul), puis indiquer sous chacune de ces figures l'expression des vecteurs rotation correspondant.

Q2. Déterminer $\vec{V}_{O_1/R_0}$, $\vec{V}_{O_2/R_0}$, $\vec{V}_{M/R_0}$.

Q3. Dans la configuration de rapprochement horizontal, ($\theta_2=\pi-2\cdot\theta_1$ et $\theta_3=\theta_1-\frac{\pi}{2}$) montrer que $\vec{V}_{M/R_0}\cdot\vec{x}_0=0$ et déterminer $\left\|\vec{V}_{M/R_0}\right\|$

Q4. Déterminer la valeur numérique de la vitesse maximale $\left\|\vec{V}_{M/R_0}\right\|_{Max}$ (*R = 48 cm*, *L = 72 cm* et $N_{1/0}=0.08\,tr\cdot\min^{-1}$) et conclure quant à la capacité du robot à satisfaire le critère de vitesse d'approche du fruit du cahier des charges.

33.6 Eolienne :

I Présentation :

On s'intéresse à une éolienne de petite puissance (*18 kW*) représentée sous forme de schéma cinématique ci-contre :

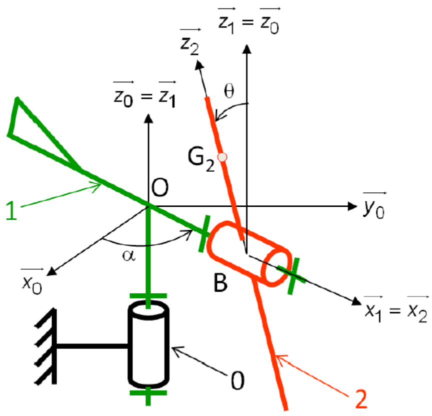


Schéma cinématique de l'éolienne

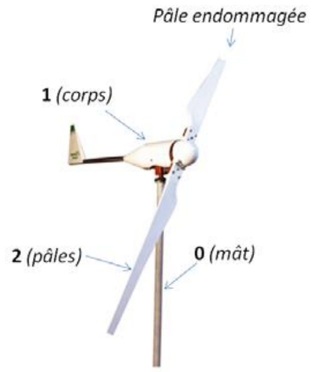
Ce système est constitué de trois solides :

- Le mat *0* de repère associé $R_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, fixe par rapport au sol tel que l'axe $(O;\vec{z}_0)$ soit orienté suivant la verticale ascendante
- La girouette *1* a la faculté de pouvoir tourner par rapport au mat *0* autour de l'axe $(O;\vec{z}_0)$. Soit $R_1(O;\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ le repère associé à la girouette *1*, on pose : $\alpha=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)$.
- Les pales *2* possèdent la faculté de pouvoir tourner par rapport à la girouette *1* autour de l'axe $(B;\vec{x}_1)$. Soit $R_2(O;\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ le repère associé aux pales *2*, de telle façon que l'axe $(B;\vec{z}_2)$ soit confondu avec l'axe BG_2 des pales.

  On pose $\theta=(\vec{z}_1,\vec{z}_2)$, $\overrightarrow{OB}=a\cdot\vec{x}_1$, (*a* est une constante positive).

Si un corps étranger percute une pale au point de l'endommager et de créer un « balourd » (centre de gravité G_2 des pâles qui n'est plus sur l'axe de rotation des pâles), des effets dynamiques (vibrations) peuvent apparaitre et être à l'origine d'efforts qui vont user anormalement certaine pièces du système.

Dans ce cas, la position du centre de gravité G_2 des pâles *2* est défini par : $\overrightarrow{BG_2}=b\cdot\vec{z}_2$ (*b* est une constante positive)



Eolienne avec une pâle endommagée

II Travail demandé :

Objectif : déterminer, dans le but quantifier les efforts dus aux effets dynamiques, le vecteur accélération du centre de gravité G_2 des pâles dans leur mouvement par rapport au sol.

Q1. Donner la nature des mouvements *Mvt 1/0 et Mvt 2/1*.

Q2. En déduire les trajectoires $T_{B\in 1/0}$ et $T_{G2\in 2/1}$.

Q3. Dessiner les deux figures de changement de bases (figures de calcul).

Q4. Indiquer sous chacune de ces figures l'expression des vecteurs rotation correspondant.

Q5. En déduire l'expression de $\vec{\Omega}_{2/0}$.

Q6. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}_{G_2/R_0}$.

Q7. Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}_{G_2/R_0}$.

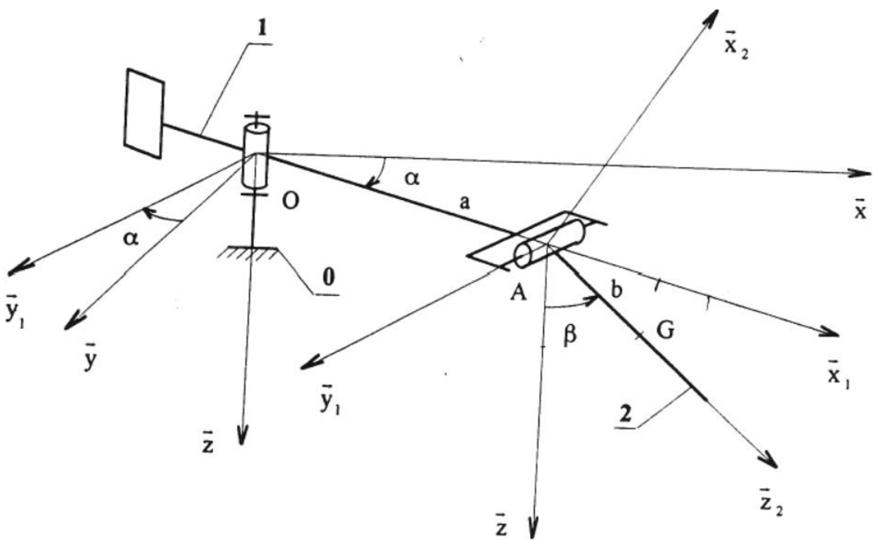
Pour les questions Q6 et Q7 :

- Déterminer séparément les dérivés des vecteurs unitaires nécessaires à la détermination des vecteurs vitesse et accélération ;
- Laisser le résultat exprimé dans des bases différentes ;
- Vérifier l'homogénéité des résultats ($m\cdot s^{-1}$ ou $m\cdot s^{-2}$).

3₃.7 Centrifugeuse d'entraînement des pilotes d'avions de chasse.

I Présentation :

Soit $R(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié au bâti 0 de la centrifugeuse. L'axe $(O;\vec{z})$ est dirigé suivant la verticale descendante voir figure ci-dessous :



- Le bras 1 a une liaison pivot d'axe $(O;\vec{z})$, (1 ddl Rz), avec le bâti 0. Soit $R_1(O;\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ un repère lié au bras 1. On pose : $\alpha = (\vec{x},\vec{x}_1)$, avec : $\alpha = \omega \cdot t$, où ω est une constante positive.
- La cabine 2 a une liaison pivot d'axe $(A;\vec{y}_1)$, (1 ddl Ry_1), avec le bras 1, telle que : $\vec{OA} = a\vec{x}_1$ (a est une constante positive). Soit $R_2(A;\vec{x}_2,\vec{y}_1,\vec{z}_2)$ un repère lié à la cabine 2. On pose $\beta = (\vec{z},\vec{z}_2)$. Le centre de gravité de la cabine 2 est tel que $\vec{AG} = b \cdot \vec{z}_2$ (b est une constante positive).

II Travail demandé :

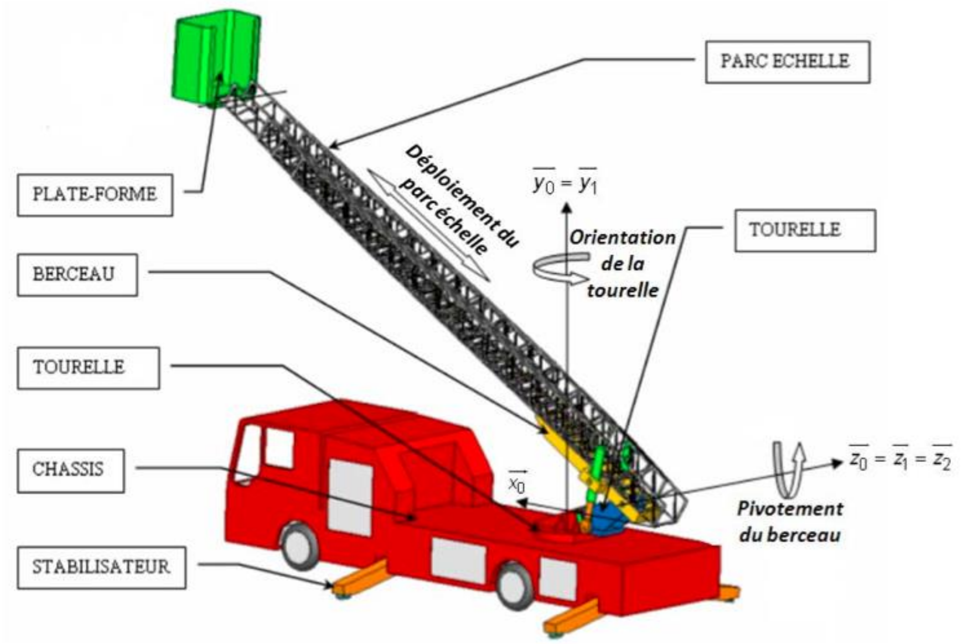
Q1. Déterminer le vecteur vitesse relative $\vec{V}_{G\in 2/1}$, le vecteur vitesse d'entraînement $\vec{V}_{G\in 1/0}$. En déduire le vecteur vitesse absolue $\vec{V}_{G\in 2/0}$.

Q2. Déterminer le vecteur accélération relative $\vec{a}_{G\in 2/1}$, le vecteur accélération d'entraînement $\vec{a}_{G\in 1/0}$, le vecteur accélération de Coriolis $2\vec{\Omega}_{(1/0)} \wedge \vec{V}_{G\in 2/1}$. En déduire le vecteur accélération absolue $\vec{a}_{G\in 2/0}$.

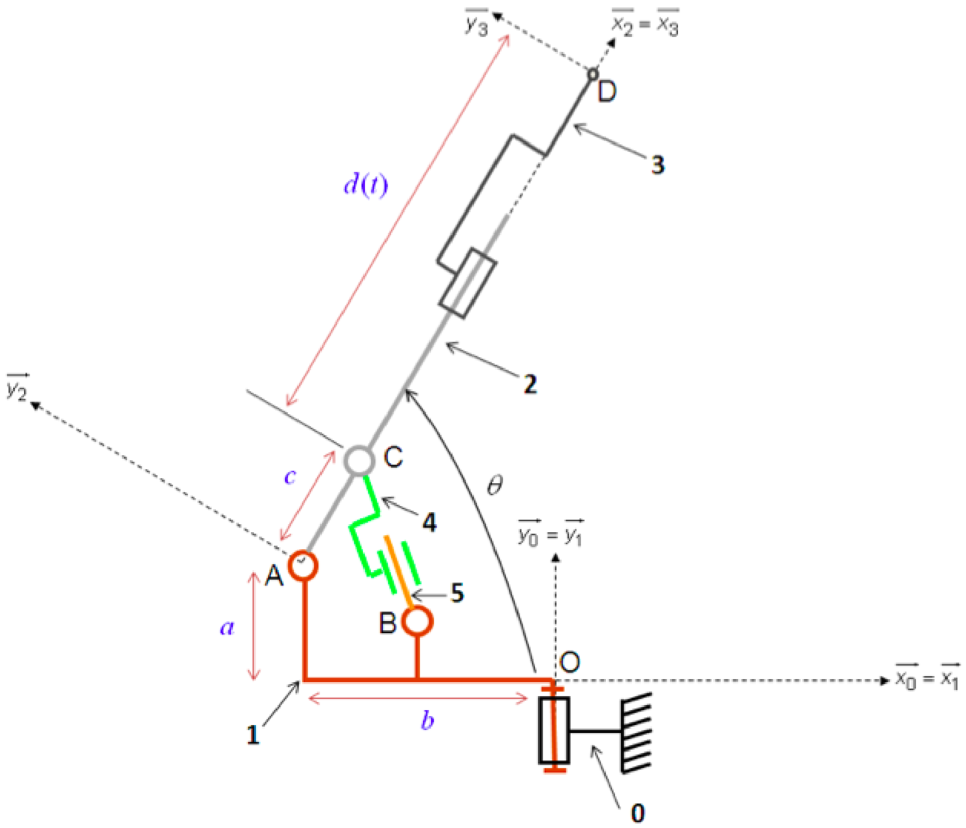
33.8 Echelle E.P.A.S.

I Présentation :

On s'intéresse à une Echelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle. Ce système conçu et commercialisé par la société CAMIVA est monté sur le châssis d'un camion de pompiers et permet de déplacer une plate-forme pouvant recevoir deux personnes et un brancard (charge maxi 270 kg) le plus rapidement possible et en toute sécurité.



Le système est représenté sous forme de schéma cinématique ci-dessous :



Ce système est constitué de cinq solides :

- Le châssis 0, de repère associé $R_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_O,\vec{z}_0)$, fixe par rapport au sol tel que l'axe $(O;\vec{y}_0)$soit dirigé suivant la verticale ascendante.
- La tourelle 1, de repère associé $R_1(O;\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$, en mouvement de rotation (non étudié ici) d'axe $(O;\vec{y}_0)$ par rapport au châssis 0 tel que $\vec{y}_0=\vec{y}_1$.
- Le berceau 2, de repère associé $R_2(A;\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$, en mouvement de rotation d'axe $(A;\vec{z}_1)$ par rapport à la tourelle 1 tel que $\overrightarrow{OA}=-b\cdot\vec{x}_1+a\cdot\vec{y}_1$ (a et b constants), $\overrightarrow{AC}=c\cdot\vec{x}_2$(c constant), $\vec{z}_1=\vec{z}_2$ et $\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2\right)=\theta$.
- L'échelle 3, de repère associé $R_3(D;\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$, en mouvement de translation rectiligne de direction $\vec{x}_2$ par rapport au berceau 2 tel que $\overrightarrow{CD}=d(t)\cdot\vec{x}_2$.
- Le vérin de dressage 4 + 5 (non étudié ici).

Pour des raisons de confort et de sécurité, il est nécessaire que pendant la phase de dressage[1] de l'échelle, la norme de l'accélération subie par une personne située dans la nacelle ne dépassement un niveau défini dans le CdCF.

II Travail demandé :

Objectif : Déterminer, dans le but de valider le critère du Cahier des Charges Fonctionnel, le vecteur accélération du point D appartenant à l'échelle dans son mouvement par rapport au sol.

Q1. Donner la nature des mouvements Mvt 2/0, Mvt 3/2 et Mvt 3/0.

Q2. En déduire les trajectoires $T_{C\in 2/0}$,$T_{D\in 3/2}$ et $T_{D\in 3/0}$.

Q3. Que peut-on dire sur les bases des repères R_2 et R_3 ? En déduire $\vec{\Omega}_{3/2}$

Q4. Dessiner la figure de changement de base correspondant au mouvement Mvt 2/1.

Q5. Indiquer sous cette figure l'expression du vecteur rotation correspondant.

Q6. En déduire l'expression de $\vec{\Omega}_{3/0}$.

Q7. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}_{D\in 3/0}$.

Q8. Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}_{D\in 3/0}$.

[1] Phase de dressage : les vérins de dressage font pivoter le berceau 2 pendant que le parc échelle 3 se déploie. Pendant cette phase, le système d'orientation de la tourelle 1 est inactif : $R_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_O,\vec{z}_0)$= $R_1(O;\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$