33 Cinématique du point

Table des matières

1) Dérivée temporelle d'un vecteur par rapport à un référentiel :

Soit (ε) un espace affine à trois dimensions et (E) l'espace vectoriel associé. Notons $B(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ la base d'un repère orthonormé direct $R(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ de (ε).

1.1) Définition :

Considérons une application de classe $C1$ de R dans (E) : $t \xrightarrow{\vec{V}} \vec{V}(t)$ La dérivée du vecteur $\vec{V}(t)$ par rapport à la variable t, dans l'espace vectoriel (E) est égale au vecteur suivant :

$$\boxed{\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_E = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{V}(t+h)-V(t)}{h}}$$

<u>Remarques :</u>

- la variable t, quelconque, est généralement associée au temps,
- La variation d'un vecteur, dépend de l'espace vectoriel de référence, c'est à dire en pratique de la position de l'observateur qui étudie la variation du vecteur. D'où la nécessité de notations précises.

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{V}\right]_E \text{ ou } \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{V}\right]_B \text{ ou encore, par commodité : } \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{V}\right]_R$$

Qui se lit : "dérivée du vecteur $\vec{V}(t)$ par rapport à t, dans le repère R".

1.2) Propriétés :

- Dérivée d'une somme de vecteurs :

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}_1\right]_R + \left[\frac{d}{dt}\vec{V}_2\right]_R$$

- Dérivée du produit d'une fonction scalaire par un vecteur :

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\lambda\cdot\vec{V}\right)\right]_R = \frac{d}{dt}\lambda\cdot\vec{V}+\lambda\cdot\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_R$$

$$= \dot{\lambda}\cdot\vec{V}+\lambda\cdot\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_R \text{ avec } \dot{\lambda}=\frac{d}{dt}\lambda$$

- Dérivée d'un produit scalaire :

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2\right)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}_1\right]_R\cdot\vec{V}_2+\vec{V}_1\cdot\left[\frac{d}{dt}\vec{V}_2\right]_R$$

- Dérivée d'un produit vectoriel :

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2\right)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}_1\right]_R\wedge\vec{V}_2+\vec{V}_1\wedge\left[\frac{d}{dt}\vec{V}_2\right]_R$$

- Dérivée d'une fonction de fonction :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(\theta(t))\right]_R = \left[\frac{d}{d\theta}\vec{V}\right]_R\cdot\dot{\theta}$$

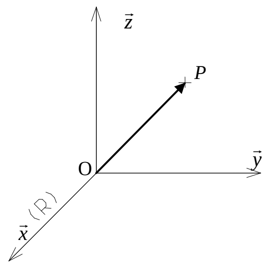
2) Position, trajectoire, vitesse et accélération d'un point par rapport à un référentiel :

2.1) position d'un point dans un repère :

Soit un point mobile par rapport au repère $R(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ d'un espace affine (ε).

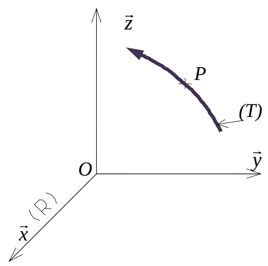
$P(t)$ est la position du point P dans le repère R à la date t

Définition : Le vecteur position du point P dans le repère R, à la date t, est le vecteur $\vec{OP}(t)$, le point O **étant l'origine du repère** R.



Nota : on supposera par la suite que l'application : $t \xrightarrow{P} P(t)$ de classe $C1$ et par intervalles de classe $C2$, c'est à dire que cette application est continûment dérivable et par intervalles deux fois dérivable à dérivée seconde continue.

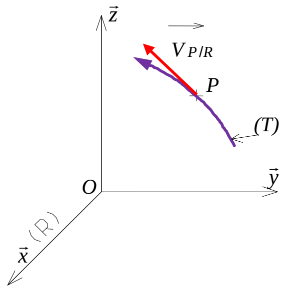
2.2) Trajectoire d'un point dans un repère :



Définition : La trajectoire $T^{P}_{/R}$ du point P dans le repère R est l'ensemble des points $P(t)$ obtenu lorsque t varie.

Nota : l'équation de la trajectoire est indépendante du temps.

2.3) Vecteur vitesse d'un point par rapport à un repère :

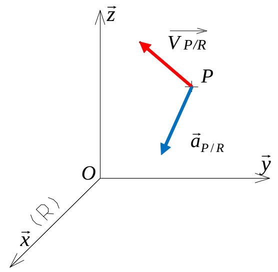


Définition : Le vecteur vitesse du point P par rapport au repère R, à la date t, est la dérivée du vecteur position $\vec{OP}(t)$ par rapport à t, dans R :

$$\boxed{\vec{V}_{P/R} = \left[\frac{d}{dt}\vec{OP}(t)\right]_R}$$

Nota : Le vecteur vitesse du point P par rapport au repère R, à la date t, est un vecteur tangent au point $P(t)$ à la trajectoire (T).

2.4) Accélération d'un point par rapport à un repère :



Définition : Le vecteur accélération du point P par rapport au repère R, à la date t, est la dérivée du vecteur vitesse $\vec{V}_{P/R}$ par rapport à t dans R.

$$\boxed{\vec{a}_{P/R} = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}_{P/R}\right]_R = \left[\frac{d^2}{dt^2}\vec{OP}(t)\right]_R}$$

3) Relation entre les dérivées temporelles d'un vecteur par rapport à deux référentiels distincts.

3.1) Dérivée d'un vecteur exprimé dans la base de dérivation :

Soit un vecteur $\vec{V}$ exprimé dans la base du repère $R(O;\vec{x},\vec{y};\vec{z})$:

$\vec{V}=a\cdot\vec{x}+b\cdot\vec{y}+c\cdot\vec{z}$ où a, b, c sont des fonctions de t.

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_R=\left[\frac{d(a\cdot\vec{x}+b\cdot\vec{y}+c\cdot\vec{z}}{dt}\right]_R=\left[\frac{d\,(a\cdot\vec{x})}{dt}\right]_R+\left[\frac{d\,(b\cdot\vec{y})}{dt}\right]_R+\left[\frac{d(c\cdot\vec{z})}{dt}\right]_R$$

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_R=\dot{a}\cdot\vec{x}+a\cdot\left[\frac{d\,\vec{x}}{dt}\right]_R+\dot{b}\cdot\vec{y}+b\cdot\left[\frac{d\,\vec{y}}{dt}\right]_R+\dot{c}\cdot\vec{z}+c\cdot\left[\frac{d\,\vec{z}}{dt}\right]_R$$

Comme les vecteurs de base $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ sont constant dans leur propre base (qui est la base de R) alors :

$\left[\frac{d\,\vec{x}}{dt}\right]_R=\left[\frac{d\,\vec{y}}{dt}\right]_R=\left[\frac{d\,\vec{z}}{dt}\right]_R=\vec{0}$ Il vient donc finalement : $\boxed{\left[\frac{d\,\vec{V}}{dt}\right]_R=\dot{a}\cdot\vec{x}+\dot{b}\cdot\vec{y}+\dot{c}\cdot\vec{z}}$

3.2) Dérivée d'un vecteur exprimé dans une base différente de la base de dérivation :

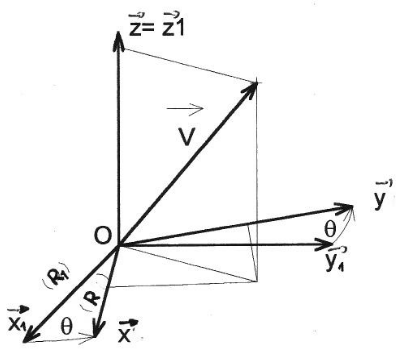
- Soit (ε) l'espace affine à trois dimensions et (E) l'espace vectoriel associé, notons $B(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ la base d'un repère orthonormé direct $R(O;\vec{x},\vec{y};\vec{z})$ de (ε).
- Soit (ε_1) l'espace affine à trois dimensions et (E_1) l'espace vectoriel associé, notons $B_1(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ la base d'un repère orthonormé direct $R_1(O;\vec{x}_1,\vec{y}_1;\vec{z}_1)$ de (ε_1).

Considérons le vecteur $\vec{V}$ exprimé dans la base du repère R :

$$\vec{V}=a\cdot\vec{x}+b\cdot\vec{y}+c\cdot\vec{z} \text{ où } a,\ b,\ c \text{ sont des fonctions de } t.$$

Calculons la dérivée du vecteur $\vec{V}$ par rapport à la variable t dans le repère R_1. Mais avant d'effectuer le calcul dans le cas général, commençons par traiter le cas particulier où $\vec{z}_1=\vec{z}$.

3.2.1) les deux repères ont une direction commune $\vec{z}_1=\vec{z}$:



Dans ce cas, un seul paramètre angulaire suffit pour orienter la base de R par rapport à la base de R_1.

Posons :

$\theta=(\vec{x}_1,\vec{x})$, θ est une fonction de t.

La dérivée du vecteur $\vec{V}$ par rapport à t dans R_1 s'écrit :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1}=\left[\frac{d}{dt}(a\cdot\vec{x}+b\cdot\vec{y}+c\cdot\vec{z})\right]_{R_1}$$

$$=\left[\frac{d}{dt}a\cdot\vec{x}\right]_{R_1}+\left[\frac{d}{dt}b\cdot\vec{y}\right]_{R_1}+\left[\frac{d}{dt}c\cdot\vec{z}\right]_{R_1}$$

Soit en développant :

$$\boxed{\begin{aligned}\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1} &= \dot{a}\cdot\vec{x}+\dot{b}\cdot\vec{y}+\dot{c}\cdot\vec{z}+a\cdot\left[\frac{d}{dt}\vec{x}\right]_{R_1}+b\cdot\left[\frac{d}{dt}\vec{y}\right]_{R_1}+c\cdot\left[\frac{d}{dt}\vec{z}\right]_{R_1}\\ &= \left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R}+a\cdot\left[\frac{d}{dt}\vec{x}\right]_{R_1}+b\cdot\left[\frac{d}{dt}\vec{y}\right]_{R_1}+c\cdot\left[\frac{d}{dt}\vec{z}\right]_{R_1} \qquad (1)\end{aligned}}$$

Comme $\vec{z}_1=\vec{z}$ alors $\left[\frac{d}{dt}\vec{z}\right]_{R_1}=\vec{0}$.

Pour calculer le terme $\left[\frac{d}{dt}\vec{x}\right]_{R_1}$ considérons que le vecteur unitaire $\vec{x}$ est une fonction de *t* par l'intermédiaire de l'angle θ: $\vec{x}[\theta(t)]$, alors :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{x}\right]_{R_1}=\left[\frac{d}{d\theta}\vec{x}\right]_{R_1}\cdot\dot{\theta} \text{ avec } \dot{\theta}=\left[\frac{d\theta}{dt}\right]$$

En exprimant le vecteur unitaire $\vec{x}$ dans la base de R_1, on obtient :

$$\left[\frac{d}{d\theta}\vec{x}\right]_{R_1}=\left[\frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta\,\vec{x}_1+\sin\theta\,\vec{y}_1\right)\right]_{R_1}=-\sin\theta\,\vec{x}_1+\cos\theta\,\vec{y}_1$$

soit le résultat suivant :

$$\left[\frac{d}{d\theta}\vec{x}\right]_{R_1}=\vec{y}$$

On retrouve un résultat classique, à savoir que la dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à son angle polaire est le vecteur directement perpendiculaire (déduit par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$)

De la même façon on a : $\left[\frac{d}{d\theta}\vec{y}\right]_{R_1}=-\vec{x}$. Par suite l'équation (1) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1}=\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R}+a\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{y}-b\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{x} \text{ où encore :}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1}=\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R}+\dot{\theta}\cdot\vec{z}_1\wedge\left(a\cdot\vec{x}+b\cdot\vec{y}+c\cdot\vec{z}\right)$$

généralement on pose $\vec{\Omega}_{R/R_1}=\dot{\theta}\cdot\vec{z}_1$

<u>Définition</u> : le vecteur $\vec{\Omega}_{R/R_1}$ est appelé vecteur rotation de la base de R par rapport à la base de R_1, ou plus simplement vecteur rotation de R par rapport à R_1.

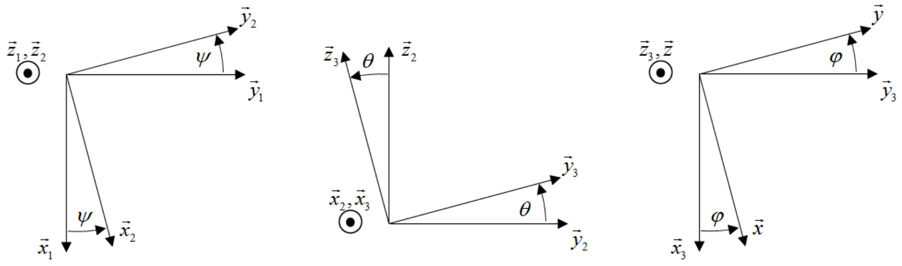
Finalement l'équation (1) prend la forme finale à retenir :

(Formule fondamentale dite de la dérivation composée)

$$\boxed{\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1}=\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R}+\vec{\Omega}_{R/R_1}\wedge\vec{V}}$$

3.2.2) Cas général : application aux angles d'Euler :

Supposons que l'orientation de la base de R par rapport à celle de R_1 soit définie par les trois angles d'Euler $(\psi,\ \theta,\ \varphi)$.



$$(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)\xrightarrow{rot(\vec{z}_1,\psi)}(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_{1,2})\xrightarrow{rot(\vec{x}_2,\theta)}(\vec{x}_{2,3},\vec{y}_3,\vec{z}_3)\xrightarrow{rot(\vec{z}_3,\varphi)}(\vec{x}\ ,\vec{y}\ ,\vec{z}_{,3})$$

On pose : $\vec{V}=a\cdot\vec{x}+b\cdot\vec{y}+c\cdot\vec{z}$, la dérivée du vecteur $\vec{V}$ par rapport à t, dans le repère R_1, se met sous la forme :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1}=\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R}+a\cdot\left[\frac{d\,\vec{x}}{dt}\right]_{R_1}+b\cdot\left[\frac{d\,\vec{y}}{dt}\right]_{R_1}+c\cdot\left[\frac{d\,\vec{z}}{dt}\right]_{R_1}$$

D'où la formulation suivante :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1}=\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R}+\vec{\Omega}_{R/R_1}\wedge\vec{V}$$

avec $\vec{\Omega}_{R/R1}=\dot{\psi}\cdot\vec{z}_1+\dot{\theta}\cdot\vec{x}_2+\dot{\varphi}\cdot\vec{z}$ (2) le vecteur rotation dans ce cas assez classique.

<u>Remarque</u> : l'écriture du vecteur rotation telle qu'elle apparaît formule (2) n'est pas écrite dans une base particulière. Il faudra en tenir compte lorsque vous aurez à calculer le produit vectoriel $\vec{\Omega}_{R/R_1}\wedge\vec{V}$. Vous devrez choisir une **base commune de calcul** pour les deux vecteurs.

4) Composition des vecteurs rotation :

Soient n espace affines (ε_i), $i=1$ à n, à trois dimensions et (E_i), les espaces vectoriels associés. On note $B_i(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ la base d'un repère orthonormé direct $R_i(O;\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ de (ε_i).

Etant donné un vecteur $\vec{V}$, on peut écrire successivement :

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{R_1}=\left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{R_2}+\vec{\Omega}_{R2/R1}\wedge\vec{V}$$

.

.

.

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{R_{n-1}}=\left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{R_n}+\vec{\Omega}_{Rn/Rn-1}\wedge\vec{V}$$

Ajoutons membre à membre ces égalités. Après simplification, il vient :

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{R_1}=\left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{R_n}+(\vec{\Omega}_{Rn/R\,n-1}+\ldots+\vec{\Omega}_{R2/R1})\wedge\vec{V}\quad(3)$$

D’autre part, on peut écrire directement :

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{R_n} + \vec{\Omega}_{R_n/R_1} \wedge \vec{V} \quad (4)$$

On en déduit donc en comparant les équations (3) et (4) que :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{Rn/R1} = \sum_{i=2}^{n} \vec{\Omega}_{Ri/Ri-1}}$$

<u>Remarque : Inversion des bases de dérivation :</u>

Etant donné un vecteur $\vec{V}$ et deux repères R_1 et R_2, on peut écrire :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1} = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_2} + \vec{\Omega}_{R2/R1} \wedge \vec{V}$$

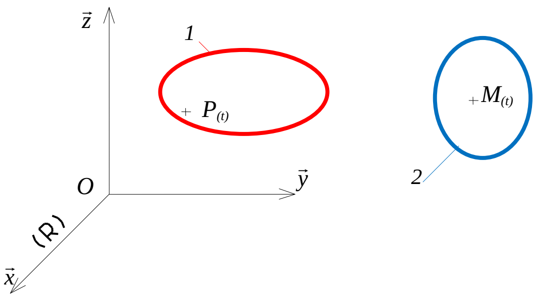
$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_2} = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1} + \vec{\Omega}_{R1/R2} \wedge \vec{V}$$

Après avoir ajouté membre à membre ces deux relations et simplifié l'égalité obtenue, on en déduit que :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{R2/R1} = -\vec{\Omega}_{R1/R2}}$$

5) Composition des mouvements :

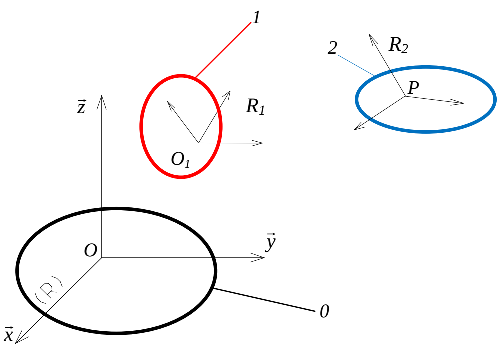
5.1) Préliminaire : notion de point coïncident :



Soit un point P d'un solide 1 en mouvement par rapport à un repère R. Ce point appartient <u>naturellement</u> au solide 1, c'est à dire qu'à chaque instant il est lié au solide. Les écritures : $\vec{V}_{P \in 1/R}$ *et* $\vec{a}_{P \in 1/R}$ sont interprétées de façon évidente.

Soit un point M naturellement lié à un autre solide 2 en mouvement par rapport au repère R et au solide 1. On peut être amené à calculer, à l'instant t, le vecteur vitesse ou le vecteur accélération du point M par rapport à R, ***en le supposant lié à cet instant au solide 1***. Dans ce cas les écritures $\vec{V}_{M \in 1/R}$ *et* $\vec{a}_{M \in 1/R}$ sont possibles et se calculent de façons particulières !

5.2) Composition des vecteurs vitesse :



Soit un point P élément du solide 2 mobile par rapport à deux repères R, lié au solide 0, et R_1 , lié au solide 1. Cherchons, à la date t, la relation entre les vecteurs vitesse:

$$\vec{V}_{P \in 2/0} \;\; et \;\; \vec{V}_{P \in 2/1}$$

Par définition :

$$\vec{V}_{P\in 2/0}=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R \text{ soit } \vec{V}_{P\in 2/0}=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_1}\right]_R+\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1P}\right]_R$$

$$\text{or } \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_1}\right]_R=\vec{V}_{O_1\in 1/0}$$

$$\text{et } \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1P}\right]_R=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1P}\right]_{R_1}+\vec{\Omega}_{R1/R}\wedge\overrightarrow{O_1P}$$

$$=\vec{V}_{P\in 2/1}+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{O_1P}$$

Par suite on peut écrire :

$$\vec{V}_{P\in 2/0}=\vec{V}_{O_1\in 1/0}+\vec{V}_{P\in 2/1}+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{O_1P} \quad (5)$$

Définitions : Dans le mouvement du point P par rapport aux deux repères R et R_1 on appelle :

- Vecteur vitesse absolue : $\vec{V}_{P\in 2/0}$
- Vecteur vitesse relative : $\vec{V}_{P\in 2/1}$
- Vecteur vitesse d'entraînement : $\vec{V}_{O_1\in 1/0}+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{O_1P}$

Si on considère, à l'instant t, le point P lié au repère R_1, le champ des vecteurs vitesse précise que :

$$\vec{V}_{P\in 1/0}=\vec{V}_{O_1\in 1/0}+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{O_1P}$$

Alors l'équation (5) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\boxed{\vec{V}_{P\in 2/0}=\vec{V}_{P\in 2/1}+\vec{V}_{P\in 1/0}}$$

Généralisation :

Soit un point P mobile par rapport à n repères Ri $(i=1$ *à* $n)$, on peut écrire la relation générale de composition des vecteurs vitesse :

$$\boxed{\vec{V}_{P\in n/1}=\sum_{i=1}^{n-1}\vec{V}_{P\in i+1/i}}$$

5.3) Composition des vecteurs accélération :

La relation de composition des vecteurs vitesse établie au paragraphe précédent s'écrit :

$$\vec{V}_{P\in 2/0}=\vec{V}_{O_1\in 1/0}+\vec{V}_{P\in 2/1}+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{O_1P}$$

Dérivons chaque terme par rapport à t, dans R :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}_{P\in 2/0}\right]_R=\left[\frac{d}{dt}\vec{V}_{O_1\in 1/0}\right]_R+\left[\frac{d}{dt}\vec{V}_{P\in 2/1}\right]_R+\left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}_{1/0}\right]_R\wedge\overrightarrow{O_1P}+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1P}\right]_R$$

$$\vec{a}_{P\in 2/0}=\vec{a}_{O_1\in 1/0}+\left[\frac{d}{dt}\vec{V}_{P\in 2/1}\right]_{R1}+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{V}_{P\in 2/1}+\left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}1/0\right]_R\wedge\overrightarrow{O_1P}+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge(\vec{V}_{P\in 2/1}+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{O_1P})$$

$$\boxed{\vec{a}_{P\in 2/0}=\vec{a}_{O_1\in 1/0}+\vec{a}_{P\in 2/1}+2\cdot\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{V}_{P\in 2/1}+\left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}1/0\right]_R\wedge\overrightarrow{O_1P}+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge(\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{O_1P})}$$

<u>Définitions :</u> Dans le mouvement du point P par rapport aux deux repères R et R_1, on appelle :

- Vecteur accélération absolue : $\vec{a}_{P \in 2/0}$
- Vecteur accélération relative : $\vec{a}_{P \in 2/1}$
- Vecteur accélération de Coriolis : $2 \cdot \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{V}_{P \in 2/1}$
- Vecteur accélération d'entraînement : $\vec{a}_{O_1 \in 1/0} + \left[\dfrac{d}{dt}\vec{\Omega}_{1/0}\right]_R \wedge \overrightarrow{O_1P} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge (\vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1P})$