3_2 Loi entrée sortie géométrique d'une chaine cinématique

Table des matières

1) Introduction :

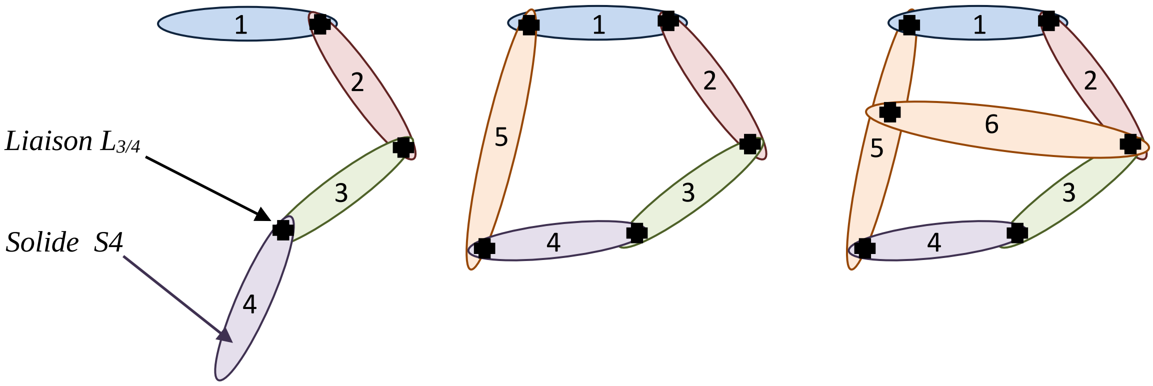
On appelle loi Entrée/Sortie géométrique d'une chaîne cinématique d'un système mécanique, l'ensemble des relations entre les paramètres de position de la pièce d'entrée et ceux de la pièce de sortie sur laquelle on veut déterminer les effets du mouvement imposé en entrée .

On analyse toujours les chaînes de solides, même les plus complexes à partir de sa structure en chaînes ouvertes et/ou fermées :

Chaine continue ouverte :
- *n solides*
- *n-1 liaisons*

Chaine continue fermée :
- *n solides*
- *n liaisons*

Chaine complexe :
- *n solides*
- *a liaisons* *(a>n)*



Différentes structures de chaines de solides

La technique pour obtenir la loi Entrée/Sortie cinématique dépendra ensuite de la nature de la chaîne de solides :

- dans le cas des chaînes cinématiques ouvertes, la loi entrée/sortie cinématique concerne la relation entre les coordonnées articulaires et les coordonnées opérationnelles du point en bout de chaîne .
- dans le cas des chaînes cinématiques fermées, la loi entrée/sortie cinématique concerne la relation entre le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie en bout de chaîne .

2) Loi entrée/sortie de chaines cinématiques ouvertes :

(Exemple type : bras de manipulation) :

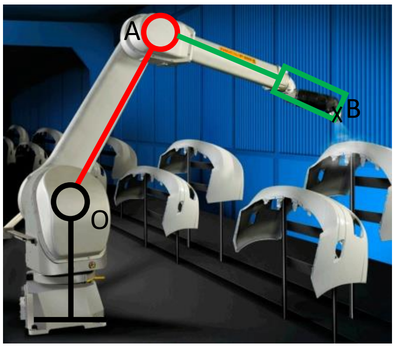
Dans ce type de mécanisme les paramètres cinématiques sont tous indépendants. Cela nécessite donc le pilotage de chaque paramètre cinématique.
Pour des considérations de réalisation, il est difficile d'implanter plus d'un actionneur pour piloter le mouvement d'une liaison. Ceci conduit à construire ces mécanismes sur la base de liaisons à un degré de liberté. Chaque liaison ainsi pilotée peut s'appeler un axe et on parle alors de robots trois axes, quatre axes, etc.…
Pour ce type de système, on s'intéresse généralement à l'effecteur en bout de chaîne cinématique, effecteur qui peut-être une pince, une caméra, une pompe de peinture…
La loi Entrée/Sortie cinématique concerne donc la relation entre :

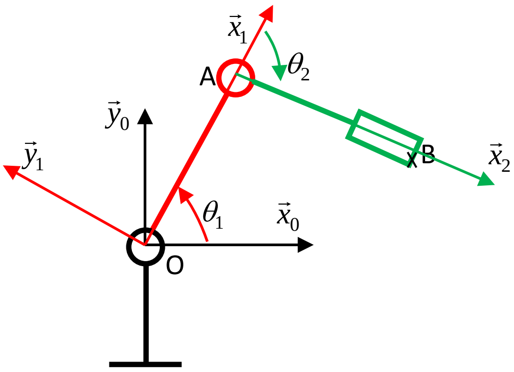
- les coordonnées articulaires (c'est-à-dire les paramètres pilotant les actionneurs)
- les coordonnées opérationnelles (c'est-à-dire les coordonnées d'un point de l'effecteur en bout de chaîne).

Dans le cas de chaine cinématique ouverte, on appelle la loi d'entrée sortie du système : <u>modèle géométrique</u> .
On distingue le modèle géométrique direct et le modèle géométrique indirect :

- Le modèle géométrique direct permet de lier les coordonnées opérationnelles aux coordonnées articulaires .
- Le modèle géométrique indirect permet de lier les coordonnées articulaires aux coordonnées opérationnelles.

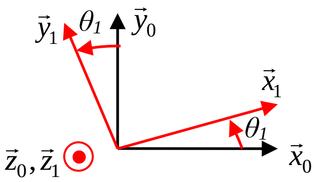
<u>Exemple</u> : robot de peinture

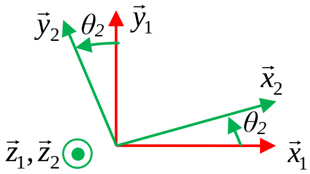




On considère un modèle plan simple dans lequel pistolet de peinture du robot est animé par seulement deux mouvements de rotation de paramètres θ_1 et θ_2.

<u>Figures de calcul</u>





Le point B de la pince en bout de chaine a pour coordonnées x_B et y_B dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Le modèle géométrique direct permet d'exprimer les coordonnées x_B et y_B en fonction des paramètres θ_1 et θ_2. Le modèle géométrique indirect exprime les paramètres θ_1 et θ_2 en fonction des coordonnées x_B et y_B.

Remarque : En composant pièces et liaisons successives, on obtient la position angulaire de la pièce n en bout de chaine par rapport à la pièce liée au bâti *0* : $(\vec{z}_0,\vec{z}_n)=(\vec{z}_0,\vec{z}_1)+(\vec{z}_1,\vec{z}_2)+...+(\vec{z}_{n-1},\vec{z}_n)$
Sur l'exemple précédent , la position angulaire de la pièce *2* par rapport à la pièce *0* s'écrit ici :

$$(\vec{x}_0,\vec{x}_2)=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)+(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=\theta_1+\theta_2$$

2.1) Calcul du modèle géométrique direct :

Le modèle géométrique direct permet de lier les coordonnées opérationnelles aux coordonnées articulaires. Il s'obtient généralement à partir d'une relation de Chasles dont l'expression est ensuite projetée dans la base dans laquelle sont exprimées les coordonnées opérationnelles.

Exemple du bras de robot :

Soit L la longueur des deux bras repérés *1* et *2* sur le robot.

On exprime le vecteur $\overrightarrow{OB}$ à l'aide de la relation de Chasles : $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ autrement dit $\overrightarrow{OB}=L\cdot\vec{x}_1+L\cdot\vec{x}_2$

On projette $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ dans la base dans laquelle on exprime les coordonnées x_B et y_B ici la base $(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$:

- $\vec{x}_1=\cos(\theta_1)\cdot\vec{x}_0+\sin(\theta_1)\cdot\vec{y}_0$
- $\vec{x}_2=\cos(\theta_1+\theta_2)\cdot\vec{x}_0+\sin(\theta_1+\theta_2)\cdot\vec{y}_0$

donc : $\overrightarrow{OB}=\mathrm{L}\cdot(\cos(\theta_1)+\cos(\theta_1+\theta_2))\cdot\overrightarrow{x_0}+\mathrm{L}\cdot(\sin(\theta_1)+\sin(\theta_1+\theta_2))\cdot\overrightarrow{y_0}$
Ce qui permet d'écrire le modèle géométrique direct :

$$\begin{cases} x_B=L\cdot(\cos(\theta_1)+\cos(\theta_1+\theta_2)) \\ y_B=L\cdot(\sin(\theta_1)+\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{cases}$$

2.2) Calcul du modèle géométrique indirect :

Le modèle géométrique indirect permet de lier les coordonnées articulaires aux coordonnées opérationnelles. Ce modèle permet de définir les consignes de position articulaires à émettre vers les moteurs et de définir également les débattements requis pour chaque articulation de la chaine ouverte. Le modèle géométrique indirect se construit en inversant le modèle géométrique direct.

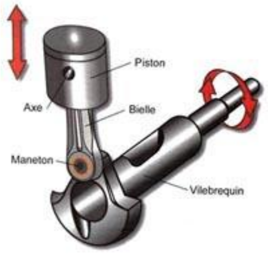
Exemple du bras de robot :

Il faut inverser le modèle géométrique direct : $\begin{cases} x_B=L\cdot(\cos(\theta_1)+\cos(\theta_1+\theta_2)) \\ y_B=L\cdot(\sin(\theta_1)+\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{cases}$

soit tous calculs fait :

$$\begin{cases} \theta_2=\arccos\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{x_B}{L}\right)^2+\left(\frac{y_B}{L}\right)^2\right)-1\right) \\ \theta_1=\arctan\left(\frac{y_B}{x_B}\right)-\frac{\theta_2}{2} \end{cases}$$

3) Loi entrée/sortie de chaines cinématiques fermées :



(Exemple type : mécanismes de transformation de mouvement)

Certaines caractéristiques géométriques sont invariantes, elles font partie de la définition physique du mécanisme et sont supposées connues. D'autres paramètres sont des données variables représentatives des mouvements du système.

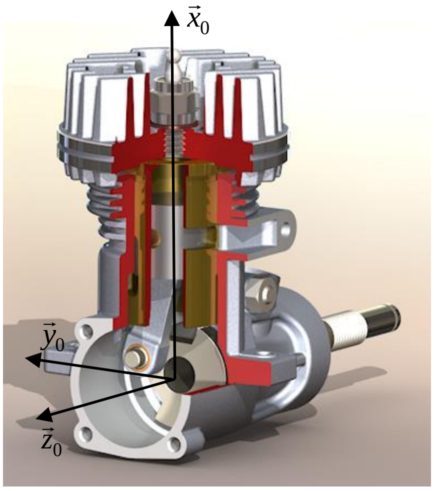
Dans le cas de chaines cinématiques fermées, la loi entrée/sortie est une loi exprimant le(s) paramètre(s) de sortie du système uniquement en fonction du(des) paramètre(s) d'entrée et des caractéristiques géométriques invariantes du système.
La loi entrée sortie d'une chaîne cinématique fermée peut être obtenue par :

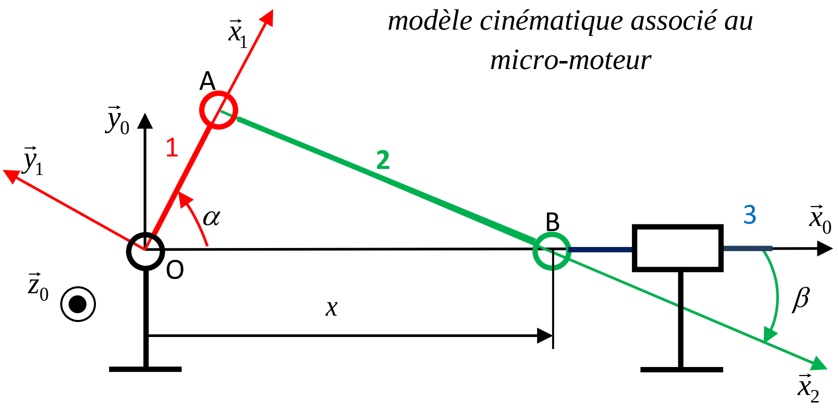
- une fermeture géométrique ou une fermeture angulaire,
- une fermeture par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante,
- l'écriture d'une équation obtenue par une condition de non glissement,
- une fermeture cinématique, …

3.1) Calcul d'une loi d'entrée sortie cinématique par fermeture géométrique :

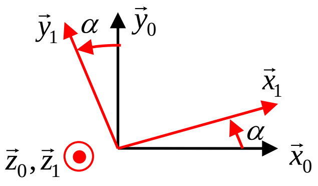
La loi entrée sortie dans le cas de chaines fermées se fait souvent (mais pas toujours) à l'aide de la technique dite de fermeture géométrique.
La technique consiste à écrire une relation de Chasles en passant par les points caractéristiques des différents solides tout en parcourant la chaîne fermée. On projette ensuite la relation obtenue dans une base judicieusement choisie de manière à faire apparaître tous les paramètres (on choisit en général une base intermédiaire entre toutes les bases définies, ce qui limite les projections). On élimine enfin les paramètres intermédiaires en combinant les équations afin d'obtenir la relation entrée sortie recherchée.

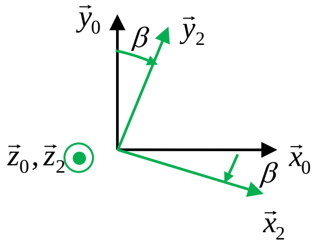
<u>Exemple : micro-moteur</u>
Soit micromoteur dont le schéma cinématique plan est donné page ci-dessous. La longueur de la *manivelle 1* (*L1*) et de la *bielle 2* (*L2*) sont des caractéristiques géométriques connues et invariables. Les paramètres α, β et x sont des paramètres d'orientation et de position représentatifs des mouvements du système.





Figures de calcul associées au modèle cinématique :





Le paramètre d'entrée est α, il traduit la rotation de la *manivelle 1* par rapport à *0* autour de l'axe $(O;\vec{z}_0)$. Le paramètre de sortie est x, il traduit la translation du *piston 3* par rapport à *0* suivant l'axe $(O;\vec{x}_0)$. Le paramètre β est un paramètre intermédiaire qui traduit la rotation de la bielle *2* par rapport à *0* autour de l'axe $(B;\vec{z}_0)$.

La fermeture géométrique consiste à écrire que le vecteur nul : $\overrightarrow{OO}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$,
soit :
$\vec{0}=L_1\cdot\vec{x}_1+L_2\cdot\vec{x}_2-x\cdot\vec{x}_0$
En projection sur les axes $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$, on obtient :

$$\begin{cases} L_1\cdot\cos\alpha+L_2\cdot\cos\beta-x=0 \\ L_1\cdot\sin\alpha-L_2\cdot\sin\beta=0 \end{cases}$$

On obtient donc deux relations scalaires. On retrouve donc un système avec 3 paramètres et 2 relations de dépendance, soit un système à un degré de liberté. Il y a donc une équation qui correspond à la loi entrée sortie du système.
Pour obtenir cette loi, il faut utiliser les 2 relations de dépendance précédentes et les combiner pour une seule relation dans laquelle il faut faire disparaitre le paramètre intermédiaire β.

$$\begin{cases} \cos\beta=\dfrac{x-L_1\cdot\cos\alpha}{L_2} \\ \sin\beta=\dfrac{L_1\cdot\sin\alpha}{L_2} \end{cases} \quad \text{et } \cos^2\beta+\sin^2\beta=1$$

Alors :

$$\left(\frac{x-L_1\cdot\cos\alpha}{L_2}\right)^2+\left(\frac{L_1\cdot\sin\alpha}{L_2}\right)^2=1 \qquad \Rightarrow (x-L_1\cdot\cos\alpha)^2+(L_1\cdot\sin\alpha)^2=(L_2)^2$$

et $(x-L_1\cdot\cos\alpha)^2=(L_2)^2-(L_1\cdot\sin\alpha)^2$

donc : $x-L_1\cdot\cos\alpha=\sqrt{(L_2)^2-(L_1\cdot\sin\alpha)^2}$

et finalement on obtient la loi entrée sortie : $\boxed{x=L_1\cdot\cos\alpha+\sqrt{(L_2)^2-(L_1\cdot\sin\alpha)^2}}$

Remarque : cette relation n'est valable que pour $L_2 > L_1$.