

Théorème de l'énergie cinétique

EX1. Prothèse myo-électrique

Modélisation du comportement dynamique de la chaîne d'énergie de l'index

Objectif : L'objectif est d'évaluer le couple que devra fournir l'actionneur pour la mise en mouvement de l'index de la main prothétique.

La figure 4 décrit sous forme simplifiée les constituants réalisant l'index d'une main gauche prothétique (gant esthétique non représenté). On retrouve notamment la paume (0), la phalange (3) associée à la biellette (4), la phalange (5) associée à la biellette (6) et la phalange (7). La bielle (2) permet la mise en mouvement de la phalange (3) à partir du mouvement de l'arbre de l'actionneur (1).

En raison d'un encombrement limité, les ingénieurs ont proposé, sur le prototype de la prothèse, que la rotation du pouce soit réalisée dans un plan perpendiculaire à celui de l'index. La prise d'un objet se fait donc par pincement entre la phalange (7) de l'index et la paume de la main (0). Le pouce de la main prothétique n'enroule donc pas l'objet. Pour la saisie d'un verre, seule l'action de l'index est donc étudiée. À contrario, une main humaine enroule l'objet avec tous les doigts, pouce compris, et permet de saisir des objets de plus grandes dimensions.

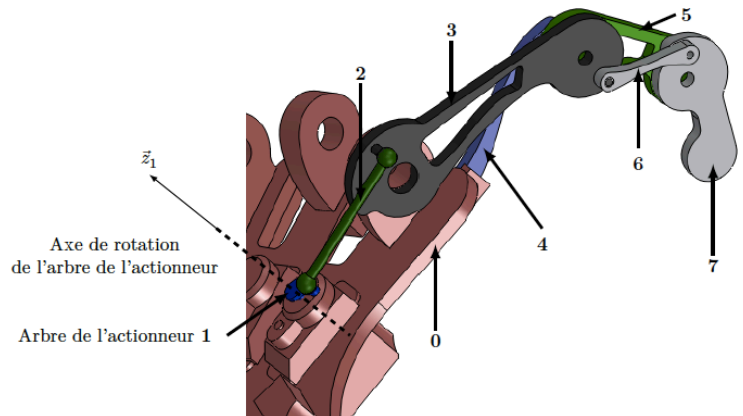


Figure 4 Description des constituants associés aux mouvements de l'index

Modélisation de la chaîne cinématique de transmission

Dans cette partie, l'étude porte sur la chaîne cinématique définie par l'ensemble $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ (figure 5).

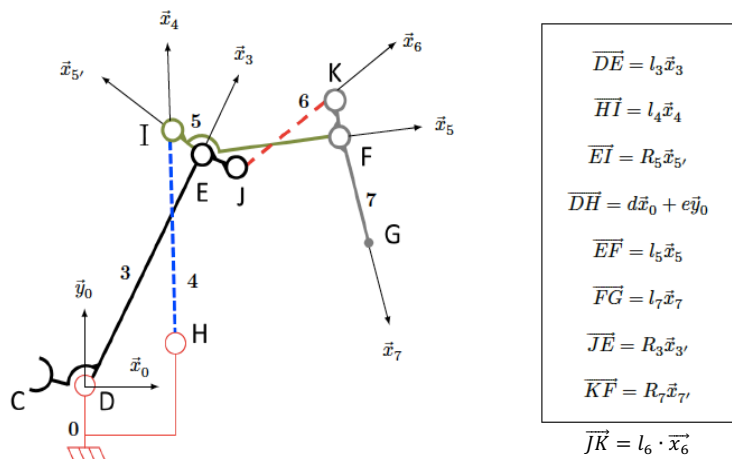
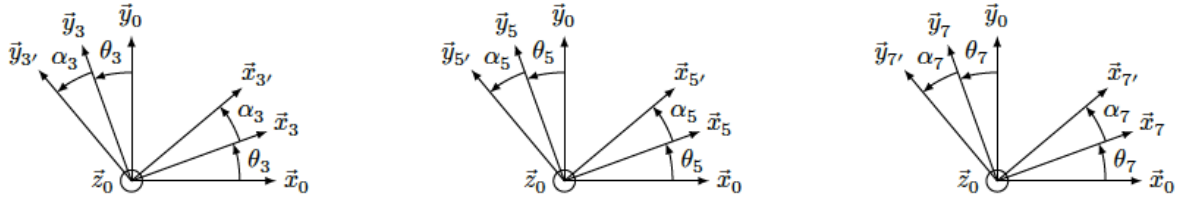


Figure 5 Schéma cinématique du dispositif de mise en mouvement de la phalange (7) et paramétrage

Les figures géométrales associées aux changements de bases sont données sur la figure 6. Les mouvements des différents solides sont dans le plan $(D; \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.



On note $\theta_4 = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$ et $\theta_6 = (\vec{x}_0, \vec{x}_6) = (\vec{y}_0, \vec{y}_6)$

Figure 6 Figures géométrales de changement de bases et paramétrages

Hypothèses :

- Les masses des bielles (2), (4) et (6) et des phalanges (5) et (7) sont négligées,
- les liaisons sont supposées parfaites,
- le référentiel associé à la paume de la main prothétique (0) est supposé galiléen.
- Lors de cette phase de mise en mouvement, il n'y a pas d'action du verre sur l'index.

Données :

- Les caractéristiques géométriques et inertielles de la phalange (3) et de l'arbre de l'actionneur (1) sont fournies dans le tableau 4.

Phalange (3)		
	Masse	M_3
	Centre d'inertie	$\overline{DG}_3 = a_3 \vec{x}_3 + b_3 \vec{y}_3 + c_3 \vec{z}_3$
	Opérateur d'inertie	$\overline{I}(G_3, 3) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{B_3}$
Arbre actionneur (1)		
	Masse	M_1
	Centre d'inertie	G_1 situé sur l'axe de rotation de l'actionneur
	Opérateur d'inertie	$\overline{I}(G_1, 1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{B_1}$

Tableau 4 Tableau des caractéristiques géométriques et inertielles de l'arbre de l'actionneur (1) et de la phalange (3)

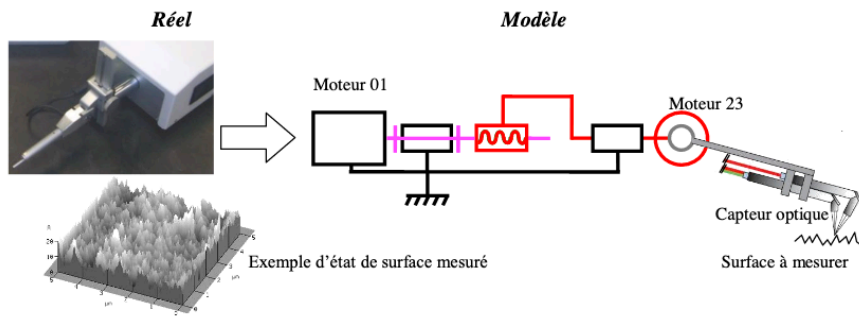
- Le paramètre angulaire de la liaison pivot d'axe $(G; \vec{z}_1)$ orientant le solide (1) par rapport à (0) est noté θ_1 . Il représente la position angulaire de l'arbre de l'actionneur (1).
- L'actionneur exerce une action mécanique sur le solide (1), assimilée à un couple pur $\overrightarrow{C}_{mot} = c_{mot} \cdot \vec{z}_1$.
- L'accélération de la pesanteur est modélisée par $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}_0$.

Q1. Réaliser le schéma d'analyse associé à l'étude du comportement dynamique l'ensemble S.

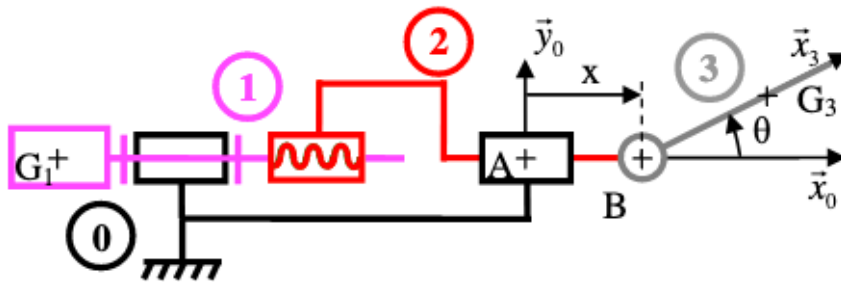
Q2. Donner l'expression de $T_{S/0}$ de l'énergie cinétique de l'ensemble S dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen associé à la paume (0).

Q3. Après avoir calculé les expressions des puissances galiléennes des actions mécaniques extérieures et intérieures à l'ensemble S déterminer la relation entre le couple moteur $c_{mot}(t)$, $\theta_1(t)$, $\theta_3(t)$, leurs dérivées successives et les caractéristiques géométriques et inertielles des solides.

Ex 2 : Rugosimètre



La rugosimétrie est la mesure de l'état de surface des pièces mécaniques. La mesure de rugosimétrie repose traditionnellement sur deux éléments distincts : le capteur, qui peut être mécanique (palpeur) ou optique, et le traitement du signal.



$$R_0 = (A; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$$

- Le rotor 1, de centre de gravité G_1 tel que $\overrightarrow{AG_1} = -a \cdot \vec{x}_0$, a pour moment d'inertie J_1 selon l'axe $(A; \vec{x}_0)$. On note φ le paramètre angulaire de la liaison pivot de 1/0 tel que $\varphi = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$.
Le moteur 01 génère le mouvement de rotation de 1/0. Le couple moteur appliqué sur 1 est noté $\overrightarrow{C_{0 \rightarrow 1}^m} = C_1 \cdot \vec{x}_0$.
- Le coulisseau 2, de centre de gravité G_2 , a pour masse m_2 . La liaison glissière de 2/0 a pour paramètre de position x tel que $\overrightarrow{AB} = x \cdot \vec{x}_0$. La liaison hélicoïdale de 1/2 possède un pas à droite tel que $pas = 0,5 \text{ mm}$.
- L'ensemble 3, de centre de gravité G_3 tel que $\overrightarrow{BG_3} = r \cdot \vec{x}_3$, a pour masse m_3 .

On donne la matrice d'inertie de cet ensemble: $[I_{G_3,3}] = \begin{bmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$.

On note θ le paramètre angulaire de la liaison pivot de 3/2 tel que $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_3) = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$.

Le moteur 23 génère le mouvement de rotation de 3/2. Le couple moteur appliqué sur 3 est noté $\overrightarrow{C_{2 \rightarrow 3}^m} = C_3 \cdot \vec{z}_0$.

- Un système d'équilibrage (ressort de torsion) permet à la tête optique d'être horizontale ($\theta = 0^\circ$) en position de repos, c'est-à-dire lorsque le moteur 23 n'est pas alimenté. Ce système exerce sur l'ensemble 3 un couple de rappel noté $\overrightarrow{C_{2 \rightarrow 3}^r} = C_r \cdot \vec{z}_0$.
- On considère que toutes les liaisons sont parfaites.
- L'action mécanique de la pesanteur est telle que $\vec{g} = -g \cdot \vec{y}_0$.

Q1. Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma = \{1,2,3\}$ des pièces mobiles : T_{Σ/R_0}

$$T_{\Sigma/R_0} \text{ peut se mettre sous la forme : } T_{\Sigma/R_0} = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot A \cdot \dot{\theta}^2 + f(\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi}.$$

L'objectif est ici de déterminer les expressions de J_{eq} , A et $f(\theta)$.

Pour cela on demande :

Q1a. De déterminer $\{V_{2/1}\}_B$

Q1b. En écrivant la fermeture cinématique de la chaîne $\{0,1,2,0\}$ trouver la relation liant \dot{x} et $\dot{\varphi}$

Q1c. De déterminer les expressions de J_{eq} , A et $f(\theta)$.

Q2. Déterminer les puissances des actions mécaniques extérieures à l'ensemble $\Sigma = \{1,2,3\}$

Q3. Déterminer les puissances des actions mécaniques intérieures à l'ensemble $\Sigma = \{1,2,3\}$

Q4. Par application du théorème de l'énergie cinétique, Déterminer la loi de commande de $\Sigma = \{1,2,3\}$

Ex 3 : Quille pendulaire de voilier

La conception des voiliers de course, dans un contexte de forte compétitivité sportive et technique, utilise toutes les évolutions récentes afin d'améliorer performances et sécurité. Dès les premiers stades de la conception du navire, l'architecte naval intègre les exigences des différents spécialistes qui collaborent au projet. A ce titre la conception d'un voilier de course océanique est analogue à la conduite d'un projet industriel classique où les intervenants s'inscrivent dans une démarche collaborative pilotée par un coordonnateur du projet.

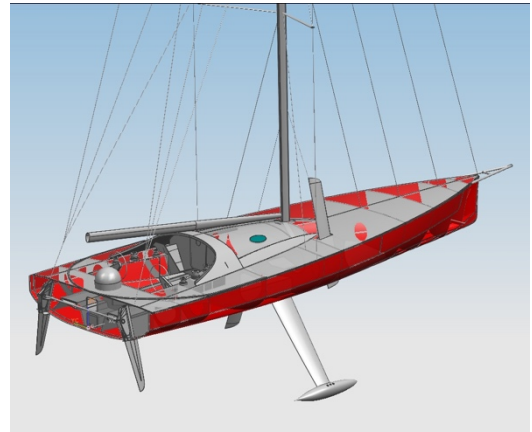


Figure 1 : Voilier 60' IMOCA

L'étude proposée s'intéresse à quelques aspects de la conception d'une quille pendulaire équipant un monocoque 60' IMOCA

Cahier des charges :

Le cahier des charges du système est donné à la Figure 2.

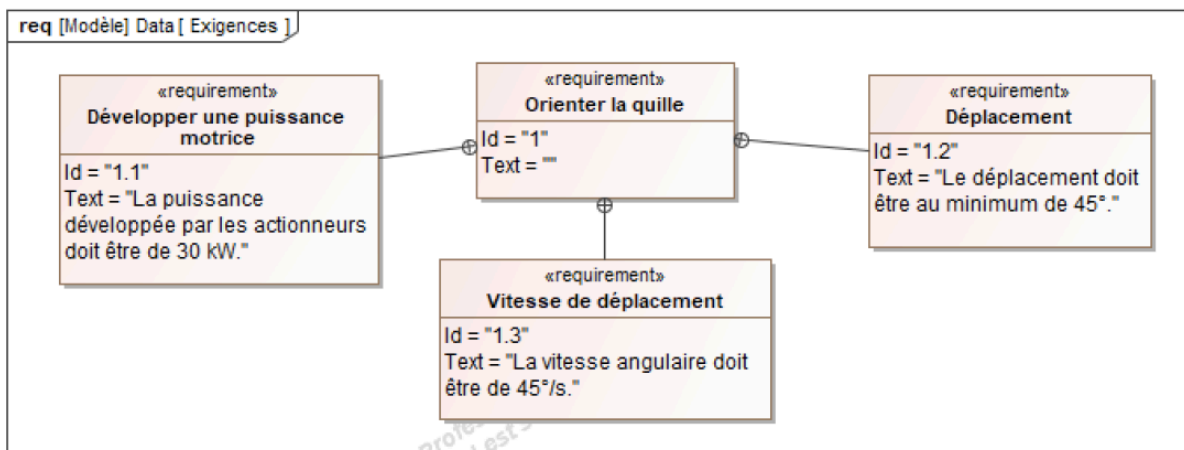


Figure 2 : Diagramme des exigences partiel

L'objectif du travail proposé est de vérifier que la chaîne d'énergie est correctement dimensionnée pour permettre le déplacement de la quille pendulaire.

Modéliser le système

La quille pendulaire est en liaison pivot d'axe $(O; \vec{z}_N)$ avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci. La mise en mouvement et le blocage en position de la quille sont réalisés par des chaînes fonctionnelles indépendantes.

1 Modélisation et paramétrage de la chaîne d'énergie du système

La chaîne d'énergie du système étudié est composée (voir Figure 3) :

du berceau N encastré sur la coque du navire et dont le repère associé est $R_N = (O; \vec{x}_N, \vec{y}_N, \vec{z}_N)$;

de la quille 1 constituée du voile et du lest et dont le repère associé est $R_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;

du vérin 2-4 constitué du piston 2 et du cylindre 4 et dont les repères associés sont respectivement $R_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $R_4 = (C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (la rotation relative 2-4 ne sera pas prise en compte dans l'étude et donc les bases de R_2 et R_4 sont confondues) ;

du vérin 3-5 constitué du piston 3 et du cylindre 5 et dont les repères associés sont $R_3 = (A; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ et $R_5 = (B; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ (la rotation relative 3-5 ne sera pas prise en compte dans l'étude et donc les bases de R_3 et R_5 sont confondues).

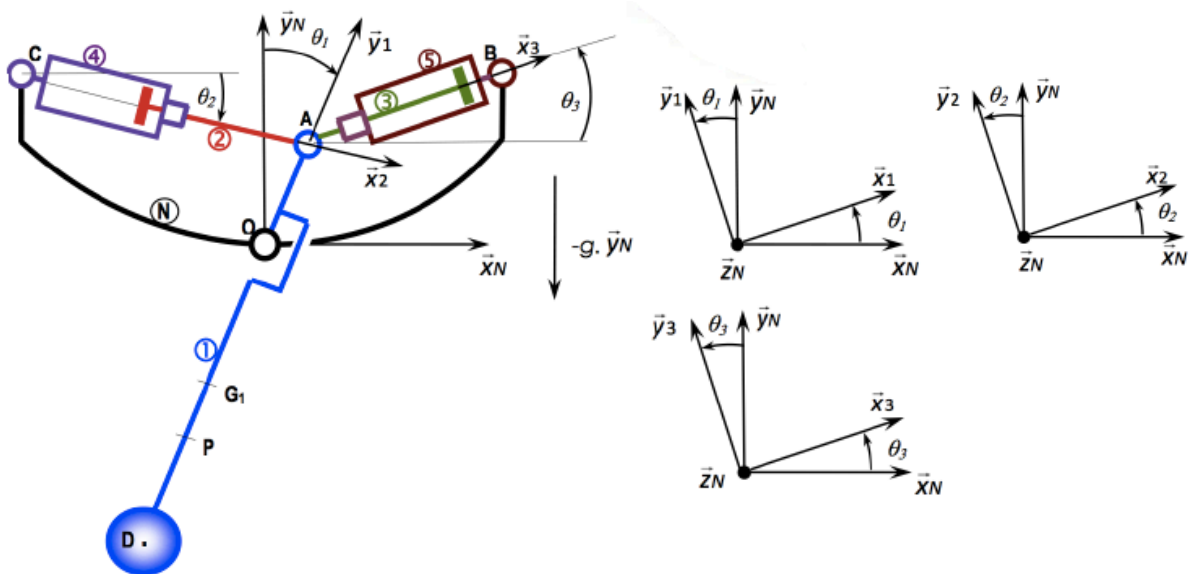
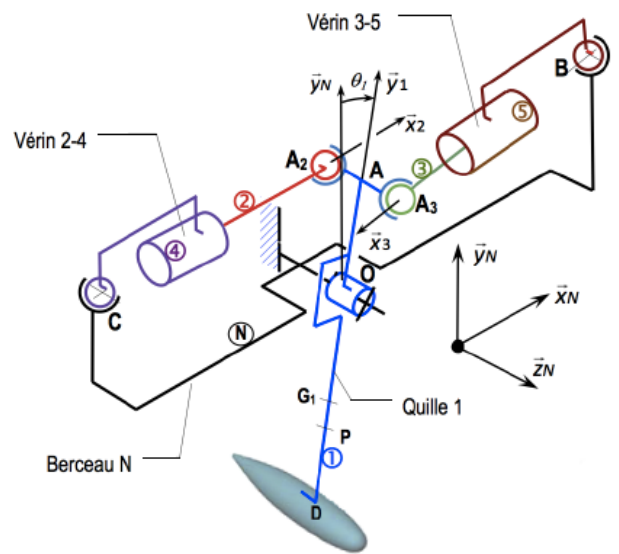


Figure 3 : Modèle 2D

Données géométriques :

Le plan d'étude est : $(A; \vec{x}_N, \vec{y}_N)$

Dans ce modèle, les points A_2 et A_3 sont confondus avec le point A ($d = 0$), et les points C et B sont projetés dans le plan $(A; \vec{x}_N, \vec{y}_N)$.

$\vec{OA} = R \cdot \vec{y}_1$; $\vec{OC} = -a \cdot \vec{x}_N + b \cdot \vec{y}_N$; $\vec{OB} = a \cdot \vec{x}_N + b \cdot \vec{y}_N$; $\vec{DO} = L_{t1} \cdot \vec{y}_1$; avec $R > 0$, $a > 0$, $b > 0$ et $L_{t1} > 0$; $\vec{CA} = x_{24}(t) \cdot \vec{x}_2$; $\vec{AB} = x_{35}(t) \cdot \vec{x}_3$

Liaison	Type	Orientation	Paramètre	Liaison	Type	Orientation	Paramètre
$N/1$	Pivot	$(O; \vec{z}_N)$	θ_1	$2/4$	Glissière	\vec{x}_2	$x_{24}(t)$
$N/4$	Pivot	$(C; \vec{z}_N)$	θ_2	$5/3$	Glissière	\vec{x}_3	$x_{35}(t)$
$N/5$	Pivot	$(B; \vec{z}_N)$	θ_3	$2/1$	Pivot	$(A; \vec{z}_N)$	
				$3/1$	Pivot	$(A; \vec{z}_N)$	

Données massiques et inertielles :

Solide	Masse	Centre d'inertie	Opérateur d'inertie
1	m_1	G_1 $\overrightarrow{OG_1} = -L_1 \cdot \overrightarrow{y_1}$ $L_1 > 0$	$[I_{G_1,1}] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_N})}$
2	m_2	G_2 $\overrightarrow{AG_2} = -L_2 \cdot \overrightarrow{x_2}$ $L_2 > 0$	$[I_{G_2,2}] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_N})}$
3	m_3	G_3 $\overrightarrow{AG_3} = L_2 \cdot \overrightarrow{x_3}$	$[I_{G_3,3}] = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N})}$ $A_3=A_2$ et $B_3=B_2$
4	m_4	C	$[I_{C,4}] = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_N})}$
5	$m_5 = m_4$	B	$[I_{B,5}] = \begin{bmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N})}$ $A_5=A_4, B_5=B_2$ et $C_5=C_4$

Figure 4 : Données massiques et inertielles

2 Modélisation des actions mécaniques :

Le bateau est supposé à l'arrêt et son repère R_N est galiléen.

Les liaisons sont supposées parfaites. Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini en Figure 5. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique définie en Figure 5, où F_p est une composante de portance et F_t est une composante de traînée.

Actions		Origine	Torseur	Actions		Origine	Torseur
De	Sur			De	Sur		
Huile	2	Pression Hydraulique Vérin 2-4	$\{T_{h \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} F_{h2} \cdot \overrightarrow{x_2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$	Huile	2	Frottement visqueux Vérin 2-4	$\{T_{frot \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} -k \cdot \frac{dx_{24}}{dt} \overrightarrow{x_2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$
Huile	3	Pression Hydraulique Vérin 3-5	$\{T_{h \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} -F_{h3} \cdot \overrightarrow{x_3} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$	Huile	3	Frottement visqueux Vérin 3-5	$\{T_{frot \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} k \cdot \frac{dx_{35}}{dt} \overrightarrow{x_3} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$
				Eau	1	Actions Hydro- dynamiques	$\{T_{eau \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} F_p \overrightarrow{z_1} + F_t \overrightarrow{x_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P$ $\overrightarrow{OP} = -h \cdot \overrightarrow{y_1}$

Figure 5 : Actions mécaniques

3 détermination des énergies cinétiques galiléennes :

Q1. Exprimer les vitesses suivantes :

- $\overrightarrow{V_{G_1 \in 1/N}}$ en fonction de $\frac{d\theta_1}{dt}$ et des paramètres géométriques utiles ;
- $\overrightarrow{V_{G_2 \in 2/N}}$ en fonction de $\frac{d\theta_2}{dt}, \frac{dx_{24}}{dt}, x_{24}$ et des paramètres géométriques utiles ;
- $\overrightarrow{V_{G_3 \in 3/N}}$ en fonction de $\frac{d\theta_3}{dt}, \frac{dx_{35}}{dt}, x_{35}$ et des paramètres géométriques utiles ;
- $\overrightarrow{V_{A \in 2/4}}$ en fonction de $\frac{dx_{24}}{dt}$ et des paramètres géométriques utiles .
- $\overrightarrow{V_{A \in 3/5}}$ en fonction de $\frac{dx_{35}}{dt}$ et des paramètres géométriques utiles .

Q2. Déterminer les énergies cinétiques suivantes :

(a) énergie cinétique galiléenne du solide 1 dans son mouvement par rapport à N , $T_{1/N}$, en fonction de $\frac{d\theta_1}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles ;

(b) énergie cinétique galiléenne du solide 2 dans son mouvement par rapport à N , $T_{2/N}$, en fonction de $\frac{d\theta_2}{dt}$, $\frac{dx_{24}}{dt}$, x_{24} et des paramètres géométriques utiles ;

(c) énergie cinétique galiléenne du solide 4 dans son mouvement par rapport à N , $T_{4/N}$, en fonction de $\frac{d\theta_2}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles ;

4 Évaluer des puissances développées par les actions mécaniques :

On note E l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5. On note $P_{i \leftrightarrow j}$ la puissance intérieure développée par les actions entre les solides i et j (par exemple : $P_{5 \leftrightarrow 3}$ est la puissance développée l'action visqueuse entre 3 et 5).

Q3. Recenser les différentes puissances intérieures à E en utilisant la notation ci-dessus, et les exprimer en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

On note $P_{ext \rightarrow i/N}$ la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à E sur le solide i .

Q4. Recenser puis exprimer les puissances galiléennes développées par les actions mécaniques extérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

5 Déterminer la puissance motrice nécessaire :

Dans la phase de vie étudiée, lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que $Fh_2 > 0$ et $Fh_3 = 0$ (voir Figure 5). Le vérin 2-4 est alors moteur et le vérin 3-5 est libre.

Q5. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à E dans son mouvement par rapport à N . Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer, dans ces conditions, la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction des autres puissances et de la variation d'énergie cinétique de l'ensemble des solides par rapport à N .