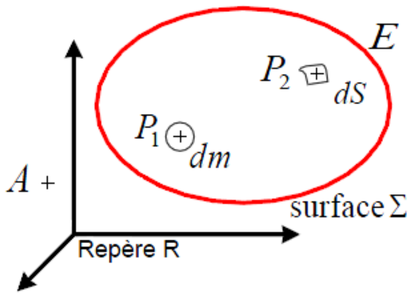
4 Puissance et énergie

Sommaire

1) Puissance développée par les efforts extérieurs à un système en mouvement par rapport à un repère :

Un système matériel E est en mouvement par rapport à un repère R. Supposons que le système matériel E soit soumis à une action mécanique à distance de densité massique $\vec{f}(P_1)$ (unité $N.kg^{-1}$).



Supposons également que le système matériel E soit soumis à une action mécanique de contact de densité surfacique $\vec{p}(P_2)$ (unité $N.m^{-2}$).

Définition 45. Les puissances développées, à la date t, par ces actions, dans le mouvement de E par rapport à R, sont égales à :

$$P(action\,à\,distance \rightarrow E/R) = \int_{P_1 \in E} \vec{f}(P_1) \cdot \vec{V}(P_1/R)dm$$

$$P(action\,de\,contact \rightarrow E/R) = \int_{P_2 \in \Sigma} \vec{p}(P_2) \cdot \vec{V}(P_2/R)dS$$

avec Σ surface de E

2) Cas particuliers du solide indéformable :

2.1 Énoncé :

Définition 46. La puissance mécanique développée par les actions mécaniques agissant sur un solide S au cours de son mouvement par rapport à un repère R est égale au comoment du torseur cinématique du solide S dans son mouvement par rapport au repère R et du torseur des actions mécaniques agissant sur S.

$$\boxed{P_{\vec{f}(P)\rightarrow S/R} = \underset{A}{\{V_{S/R}\}} \otimes \underset{A}{\{T_{f\rightarrow S}\}}}$$

2.2 Démonstration :

Soit un solide S en mouvement par rapport à un repère R. Le mouvement de S par rapport à R est caractérisé par le torseur cinématique au point A par :

$$\{V_{S/R}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{A\in S/R} \end{Bmatrix}$$

Le solide S est soumis en chaque point P à une action mécanique caractérisée par la densité de force $\vec{f}(P)$ .Cette action mécanique élémentaire est décrite par le torseur :

$$\{T_{f\rightarrow S}\} = {}_P\begin{Bmatrix} d\vec{F}_{f\rightarrow S} = \vec{f}(P)\cdot d\mu \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

L'action mécanique globale sur le solide S est déterminée en intégrant l'action élémentaire en chaque point du solide placé dans le champ de force d'où :

$$\{T_{f\to S}\} = {}_A\left\{\begin{array}{l} \vec{R}_{f\to S} = \int_{P\in S} \vec{f}(P)\cdot d\mu \\ \vec{M}_{A\,f\to S} = \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}(P)\cdot d\mu \end{array}\right\}$$

De par la définition 45, la puissance développée par cette action mécanique sur le solide S s'exprime :

$$P_{\vec{f}(P)\to S/R} = \int \vec{f}(P)\cdot \vec{V}_{P\in S/R} d\mu$$

Compte tenu de la relation du champ des vecteurs vitesses d'un solide :

$$\vec{V}_{P\in S/R} = \vec{V}_{A\in S/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AP}$$

La puissance développée devient :

$$P_{\vec{f}(P)\to S/R} = \int \vec{f}(P)\cdot \left(\vec{V}_{A\in S/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AP}\right) d\mu$$

$$P_{\vec{f}(P)\to S/R} = \int \vec{f}(P)\cdot \vec{V}_{A\in S/R}\, d\mu + \int \vec{f}(P)\cdot \left(\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AP}\right) d\mu$$

en permutant les termes du produit mixte puis en sortant des intégrales les termes indépendants de $d\mu$.

$$P_{\vec{f}(P)\to S/R} = \int \vec{f}(P)\cdot \vec{V}_{A\in S/R}\, d\mu + \int \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}(P)\right) d\mu$$

$$P_{\vec{f}(P)\to S/R} = \vec{V}_{A\in S/R} \cdot \int \vec{f}(P)\cdot d\mu + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \int \left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}(P)\right) d\mu$$

Sous cette forme, on reconnaît le comoment du torseur cinématique et du torseur de l'action mécanique s'exerçant sur le solide S :

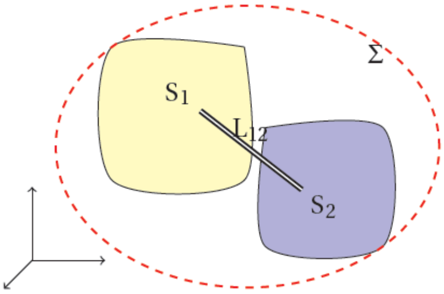
$$P_{\vec{f}(P)\to S/R} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{A\in S/R} \end{array}\right\} \otimes {}_A\left\{\begin{array}{c} \int \vec{f}(P) d\mu \\ \int \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}(P) d\mu \end{array}\right\}$$

$$P_{\vec{f}(P)\to S/R} = \underset{A}{\{V_{S/R}\}} \otimes \underset{A}{\{T_{f\to S}\}}$$

Remarque 1 : Le comoment des torseurs ne dépend pas du point A choisi mais les deux torseurs doivent être réduits en un même point avant d'effectuer le calcul. On choisira le point de réduction qui permettra le calcul le plus simple possible.
Remarque 2 : La puissance calculée dépend du repère dans lequel on la calcule. Si le repère de calcul est galiléen, on parle alors de puissance galiléenne.

3) Puissance développée par les efforts intérieurs à un système de solides indéformables :

3.1 Puissance des efforts de liaison :



On se propose maintenant de déterminer la puissance des efforts intérieurs à un système de solides indéformables.

Définition 47. Soit le système matériel Σ constitué de deux solides S_1 et S_2 en mouvement par rapport à un repère R et liés entre eux par une liaison L_{12}.

Les puissances développées par les actions extérieures à S_1 et S_2 respectivement sur chacun de ces solides en mouvement par rapport au repère R s'écrivent :

$$P_{(\bar{S}_1 \to S_1/R)} = P_{(\bar{\Sigma} \to S_1/R)} + P_{(S_2 \to S_1/R)}$$

$$P_{(\bar{S}_2 \to S_2/R)} = P_{(\bar{\Sigma} \to S_2/R)} + P_{(S_1 \to S_2/R)}$$

en sommant ces deux égalités :

$$P_{(\bar{S}_1 \to S_1/R)} + P_{(\bar{S}_2 \to S_2/R)} = P_{(\bar{\Sigma} \to S_1/R)} + P_{(\bar{\Sigma} \to S_2/R)} + P_{(S_2 \to S_1/R)} + P_{(S_1 \to S_2/R)}$$

avec :

$$P_{(S_2 \to S_1/R)} = \{T_{S_2 \to S_1}\} \otimes \{V_{S_1/R}\}$$

$$P_{(S_1 \to S_2/R)} = \{T_{S_1 \to S_2}\} \otimes \{V_{S_2/R}\}$$

donc en remplaçant, il vient :

$$P_{(\bar{S}_1 \to S_1/R)} + P_{(\bar{S}_2 \to S_2/R)} = P_{(\bar{\Sigma} \to \Sigma/R)} + \{T_{S_2 \to S_1}\} \otimes \{V_{S_1/R}\} + \{T_{S_1 \to S_2}\} \otimes \{V_{S_2/R}\}$$

$$P_{(\bar{S}_1 \to S_1/R)} + P_{(\bar{S}_2 \to S_2/R)} = P_{(\bar{\Sigma} \to \Sigma/R)} + \{T_{S_2 \to S_1}\} \otimes \{V_{S_1/R}\} - \{T_{S_2 \to S_1}\} \otimes \{V_{S_2/R}\}$$

$$P_{(\bar{S}_1 \to S_1/R)} + P_{(\bar{S}_2 \to S_2/R)} = P_{(\bar{\Sigma} \to \Sigma/R)} + \{T_{S_2 \to S_1}\} \otimes \left(\{V_{S_1/R}\} - \{V_{S_2/R}\}\right)$$

$$P_{(\bar{S}_1 \to S_1/R)} + P_{(\bar{S}_2 \to S_2/R)} = P_{(\bar{\Sigma} \to \Sigma/R)} + \{T_{S_2 \to S_1}\} \otimes \{V_{S_1/S_2}\}$$

avec :

- $P_{(\bar{\Sigma} \to \Sigma/R)}$ la puissance des efforts extérieurs s'exerçant sur le système matériel Σ
- $P_{(S_2 \to S_1/R)} + P_{(S_1 \to S_2/R)} = \{T_{S_2 \to S_1}\} \otimes \{V_{S_1/S_2}\}$ la puissance dissipée dans la liaison entre les deux solides de Σ

Cette puissance est indépendante du repère de calcul. On nomme cette puissance, puissance des inter–efforts ou puissance développée par les efforts intérieurs et on la note :

$$\begin{aligned} P_{(S_1 \leftrightarrow S_2)} &= P_{(S_2 \to S_1/R)} + P_{(S_1 \to S_2/R)} \\ &= \{T_{S_2 \to S_1}\} \otimes \{V_{S_1/S_2}\} \\ ou \quad &= \{T_{S_1 \to S_2}\} \otimes \{V_{S_2/S_1}\} \end{aligned}$$

avec $\{T_{S_2 \to S_1}\}$ le torseur des actions mécaniques transmissible par la liaison et $\{V_{S_1/S_2}\}$ le torseur cinématique.

Remarque : La puissance des inter-efforts de liaison est indépendante du repère et du point de réduction choisi pour tout comoment, on choisira un point judicieux pour l'écriture des torseurs.

4) Travail et énergie :

Soit un ensemble matériel E soumis à l'action mécanique représentée par la densité de force $\vec{f}(P)$ en chaque point P .

4.1 Travail :

Définition 48. On appelle travail d'une action mécanique entre l'instant t_1 et l'instant t_2, la quantité obtenue en sommant la puissance développée par cette action mécanique entre ces deux instants :

$$W_{t_1}^{t_2}\left(\vec{f}(P)\to E/R\right)=\int_{t_1}^{t_2} P_{\left(\vec{f}(P)\to E/R\right)}\cdot dt \text{ [J]}$$

4.2 Energie potentielle :

Lorsque l'action mécanique est une action conservative (une force est dite conservative lorsque le travail produit par cette force est indépendant du chemin suivi par son point d'action), alors le travail de cette force peut se mettre sous la forme d'une différentielle totale exacte. Le travail ne dépend plus alors que des états initiaux et finaux de l'énergie potentielle :

$$W_{t_1}^{t_2}\left(\vec{f}(P)\to E/R\right)=-\left(Ep(t_2)-Ep(t_1)\right)$$

Définition 49. On appelle énergie potentielle associée à une action mécanique conservative, la fonction réelle Ep telle que la puissance mécanique $P\left(\vec{f}(P)\to E/R\right)$ s'écrit :

$$P_{\left(\vec{f}(P)\to E/R\right)}=-\frac{dEp}{dt}$$

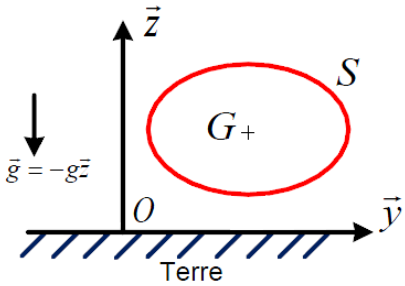
Remarques :

- le signe moins permet une compréhension plus intuitive de la notion d'énergie potentielle
- L'énergie potentielle est une fonction primitive de la puissance. Elle est donc définie à une constante près, que l'on néglige.
- Quand il existe une énergie potentielle, on dit que l'action mécanique "dérive" d'une énergie potentielle.

4.2.1) Energie potentielle de la pesanteur :

Soit $R(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié à la terre tel que le vecteur unitaire $\vec{z}$ soit dirigé suivant la verticale ascendante.

Dans une région localisée de l'espace, l'action mécanique de la pesanteur sur un solide S, de masse m et de centre d'inertie G, est modélisée par une densité massique de force uniforme $\vec{g}=-g\cdot\vec{z}$



L'action de la pesanteur sur le solide S est modélisée par :

$$\{T_{pes\to S}\}=\underset{G}{\begin{Bmatrix}-mg\cdot\vec{z}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}}$$

Le mouvement du solide S par rapport à R est modélisé par : $\{V_{S/R}\}=\underset{G}{\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{S/R}\\ \vec{V}_{G\in S/R}\end{Bmatrix}}$

Donc $P_{(pes\to S/R)}=-m\cdot g\cdot\vec{z}\cdot\vec{V}_{G\in S/R}$

et $Ep_{(pes\to S/R)}=m\cdot g\cdot z_G$ avec $z_G=\vec{z}\cdot\overrightarrow{OG}$

5) Théorème de l'énergie cinétique :

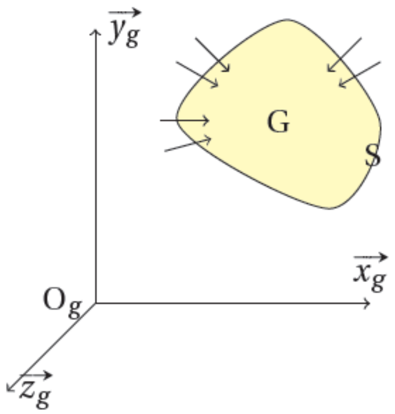
5.1 Énoncé :

Définition 50. Pour tout mouvement d'un système de solides Σ, la dérivée de l'énergie cinétique galiléenne de Σ est égale à la somme de la puissance galiléenne développée par les actions mécaniques extérieures s'exerçant sur Σ et de la puissance des inter-efforts entre les solides de Σ.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[Ec_{(\Sigma/Rg)}\right]=P_{(\bar{\Sigma}\to\Sigma/Rg)}+P_{\text{int}\Sigma}}$$

5.2 Démonstration dans le cas d'un seul solide :

Soit un solide S de masse m en mouvement par rapport à un repère galiléen Rg . Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à ce solide s'écrit :



$$\{D_{S/Rg}\}=\{T_{\bar{S}\to S}\}$$

$${}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{D(S/Rg)} = \int_{P\in S}\vec{a}_{P/Rg}\,dm \\ \vec{\delta}_{(A,S/Rg)} = \int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{a}_{P/Rg}\,dm \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{R}_{\bar{S}\to S}\\ \vec{M}_{A\bar{S}\to S}\end{Bmatrix}$$

Multiplions chaque membre de l'égalité par le torseur cinématique du mouvement de S par rapport au repère galiléen Rg : $\{V_{S/Rg}\}={}_A\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{S/Rg}\\ \vec{V}_{A\in S/Rg}\end{Bmatrix}$

$$\{D_{S/Rg}\}\otimes\{V_{S/Rg}\}=\{T_{\bar{S}\to S}\}\otimes\{V_{S/Rg}\}$$

$${}_A\begin{Bmatrix} \int_{P\in S}\vec{a}_{P/Rg}\,dm \\ \int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{a}_{P/Rg}\,dm \end{Bmatrix}\otimes{}_A\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{S/Rg}\\ \vec{V}_{A\in S/Rg}\end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{R}_{\bar{S}\to S}\\ \vec{M}_{A\bar{S}\to S}\end{Bmatrix}\otimes{}_A\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{S/Rg}\\ \vec{V}_{A\in S/Rg}\end{Bmatrix}$$

le terme de droite représente la puissance galiléenne développée par les actions mécaniques extérieures à S sur S :

$$P(\bar{S}\to S/Rg)={}_A\begin{Bmatrix}\vec{R}_{\bar{S}\to S}\\ \vec{M}_{A\bar{S}\to S}\end{Bmatrix}\otimes{}_A\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{S/Rg}\\ \vec{V}_{A\in S/Rg}\end{Bmatrix}$$

Développons l'autre terme :

$$\{D_{S/Rg}\}\otimes\{V_{S/Rg}\}={}_A\begin{Bmatrix} \int_{P\in S}\vec{a}_{P/Rg}\,dm \\ \int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{a}_{P/Rg}\,dm \end{Bmatrix}\otimes{}_A\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{S/Rg}\\ \vec{V}_{A\in S/Rg}\end{Bmatrix}$$

$$\{D_{S/Rg}\}\otimes\{V_{S/Rg}\}=\left(\int_{P\in S}\vec{a}_{P/Rg}\,dm\right)\cdot\vec{V}_{A\in S/Rg}+\left(\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{a}_{P/Rg}\,dm\right)\cdot\vec{\Omega}_{S/Rg}$$

$\vec{V}_{A\in S/Rg}$ est indépendant de la masse, on peut donc le mettre sous l'intégrale sans changer le résultat :

$$\{D_{S/Rg}\}\otimes\{V_{S/Rg}\}=\int_{P\in S}\vec{a}_{P/Rg}\cdot\vec{V}_{A\in S/Rg}dm+\left(\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{a}_{P/Rg}\,dm\right)\cdot\vec{\Omega}_{S/Rg}$$

En remplaçant $\vec{V}_{A\in S/Rg}=\vec{V}_{P\in S/Rg}+\vec{\Omega}_{S/Rg}\wedge\overrightarrow{PA}$

$$\{D_{S/Rg}\}\otimes\{V_{S/Rg}\}=\int_{P\in S}\vec{a}_{P/Rg}\cdot\left(\vec{V}_{P\in S/Rg}+\vec{\Omega}_{S/Rg}\wedge\overrightarrow{PA}\right)dm+\left(\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{a}_{P/Rg}\,dm\right)\cdot\vec{\Omega}_{S/Rg}$$

$$\{D_{S/Rg}\}\otimes\{V_{S/Rg}\}=\int_{P\in S}\vec{a}_{P/Rg}\cdot\vec{V}_{P\in S/Rg}dm+\int_{P\in S}\vec{a}_{P/Rg}\cdot\left(\vec{\Omega}_{S/Rg}\wedge\overrightarrow{PA}\right)dm+\left(\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{a}_{P/Rg}\,dm\right)\cdot\vec{\Omega}_{S/Rg}$$

La somme des deux dernières intégrales est nulle (produits mixtes opposés),donc :

$$\{D_{S/Rg}\}\otimes\{V_{S/Rg}\}=\int_{P\in S}\vec{a}_{P/Rg}\cdot\vec{V}_{P\in S/Rg}dm$$

Par définition $\left[\frac{d}{dt}\vec{V}_{P\in S/Rg}\right]_{Rg}=\vec{a}_{P\in S/Rg}$ (P naturel de S)

en remplaçant:

$$\{D_{S/Rg}\}\otimes\{V_{S/Rg}\}=\int_{P\in S}\left[\frac{d}{dt}\vec{V}_{P/Rg}\right]_{Rg}\cdot\vec{V}_{P\in S/Rg}dm$$

On reconnaît sous le signe intégrale la forme différentielle : $\frac{du^2}{dt}=2\cdot u\cdot\frac{du}{dt}$

$$\{D_{S/Rg}\}\otimes\{V_{S/Rg}\}=\int_{P\in S}\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_{P\in S/Rg}\right)^2dm$$

Compte tenu du principe de conservation de la masse on peut inverser l'intégration et la dérivation.

$$\{D_{S/Rg}\}\otimes\{V_{S/Rg}\}=\frac{d}{dt}\left[\int_{P\in S}\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{V}_{P\in S/Rg}\right)^2dm\right]$$

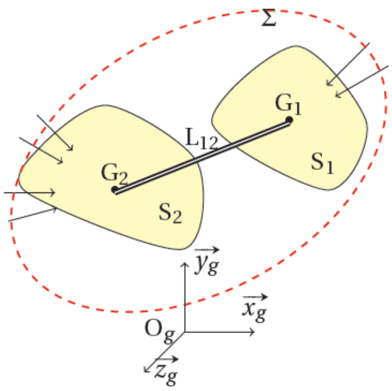
On reconnaît la définition de l'énergie cinétique.

$$\{D_{S/Rg}\}\otimes\{V_{S/Rg}\}=\frac{d}{dt}\left[T_{S/Rg}\right]$$

On retrouve donc la définition du théorème de l'énergie cinétique pour un solide (pas de puissance des inter–efforts pour un seul solide) :

$$\frac{d}{dt}\left[T_{S/Rg}\right]=\mathrm{P}_{(\bar{S}\to S/Rg)}$$

5.3 Démonstration dans le cas de deux solides :



Soit un système matériel Σ composé de deux solides S_1 et S_2 en mouvement par rapport à un repère galiléen Rg et en liaison l'un avec l'autre.

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à S_1 s'écrit :

- $\frac{d}{dt}\left[T_{S_1/Rg}\right]=\mathrm{P}_{(\bar{S}_1\to S_1/Rg)}$

de même pour S_2 :

- $\frac{d}{dt}\left[T_{S_2/Rg}\right] = P_{(\overline{S}_2 \to S_2/Rg)}$

La puissance des actions extérieures sur S_1 est la somme de la puissance des actions extérieures à Σ agissant sur S_1 et des actions de liaisons de S_2 sur S_1.

$$\frac{d}{dt}\left[T_{S_1/Rg}\right] = P_{(\overline{S}_1 \to S_1/Rg)} = P_{(\overline{\Sigma} \to S_1/Rg)} + P_{(S_2 \to S_1/Rg)}$$

de même pour S_2 :

$$\frac{d}{dt}\left[T_{S_2/Rg}\right] = P_{(\overline{S}_2 \to S_2/Rg)} = P_{(\overline{\Sigma} \to S_2/Rg)} + P_{(S_1 \to S_2/Rg)}$$

En additionnant les deux égalités on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left[T_{S_1/Rg}\right] + \frac{d}{dt}\left[T_{S_2/Rg}\right] = \left(P_{(\overline{\Sigma} \to S_1/Rg)} + P_{(\overline{\Sigma} \to S_2/Rg)}\right) + \left(P_{(S_2 \to S_1/Rg)} + P_{(S_1 \to S_2/Rg)}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[T_{\Sigma/Rg}\right] = \left(P_{(\overline{\Sigma} \to S_1/Rg)} + P_{(\overline{\Sigma} \to S_2/Rg)}\right) + \left(P_{(S_2 \to S_1/Rg)} + P_{(S_1 \to S_2/Rg)}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[T_{\Sigma/Rg}\right] = P_{(\overline{\Sigma} \to \Sigma/Rg)} + P_{(S_2 \leftrightarrow S_1)}$$

On retrouve donc le théorème de l'énergie cinétique dans le cas de deux solides.

5.4 Généralisation à n solides :

Le théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble matériel de n solides s'obtient en généralisant la relation pour deux solides.

$$\frac{d}{dt}\left[T_{\Sigma/Rg}\right] = P_{(\overline{\Sigma} \to \Sigma/Rg)} + P_{(\text{int}\,\Sigma)}$$

5.5 Utilisation :

Le théorème de l'énergie cinétique permet d'obtenir une équation différentielle du second ordre caractéristique du mouvement, cette équation n'est pas indépendante des 6 équations obtenues à partir du PFD.
Le théorème de l'énergie cinétique est efficace pour déterminer l'équation différentielle du mouvement dans le cas d'un mécanisme à un seul degré de mobilité.
Le théorème est difficile à mettre en œuvre si les puissances intérieures ne sont pas nulles ou ne dérivent pas d'une fonction de force invariable (énergie potentielle).

5.6 Intégrale première de l'énergie cinétique :

Lorsque les puissances des efforts extérieurs et intérieurs à un ensemble de solides Σ sont nulles ou dérivent d'une fonction de force (énergie potentielle au signe près), ces puissances peuvent alors être mises sous la forme d'une différentielle de l'énergie potentielle :

$$P_{(\overline{\Sigma} \to \Sigma/Rg)} + P_{(\text{int}\,\Sigma)} = -\frac{d}{dt}\left[Ep(\Sigma)\right]$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt}\left[T_{\Sigma/Rg}\right] = -\frac{d}{dt}\left[Ep(\Sigma)\right]$$

En intégrant cette équation on obtient :

$$T_{\Sigma/Rg} = -Ep(\Sigma) + K$$

avec K constante d'intégration. Cette équation est l'intégrale première de l'énergie cinétique, c'est une équation différentielle du mouvement du premier ordre. On écrit plutôt cette relation sous la forme :

$$T_{\Sigma/Rg} + Ep(\Sigma) = K$$

On reconnaît en posant $K=Em(\Sigma)$ la relation caractéristique de la conservation de l'énergie mécanique. L'énergie mécanique totale est la somme de l'énergie cinétique galiléenne et de l'énergie potentielle :