4 Exercices énergétique (TEC)

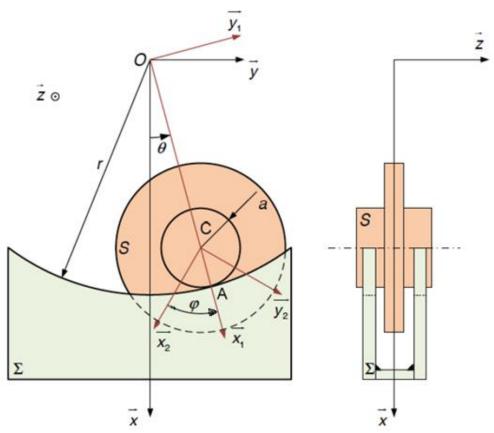
Connaissances B2	Savoir-faire					
 Centre d'inertie Opérateur d'inertie Matrice d'inertie Torseur cinétique Energie cinétique 	Déterminer l'énergie cinétique d'un solide ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide.					
Connaissances C1	Savoir-faire					
Chaines de solides : • théorème de l'énergie cinétique	Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement Proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison Choisir une méthode pour déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre					

Sommaire

4.1 Dispositif de mesure d'inertie :	2
4.2 Moteur d'entraînement d'un bras de robot :	3
4.3 Pendule double :	4
4.4 Axe de machine outil à commande numérique :	4
4.5 Système d'inspection pour tubes de guidage de centrale nucléaire :	6
4.6. Prothèse myo-électrique	7
Modélisation du comportement dynamique de la chaine d'énergie de l'index	7
Modélisation de la chaine cinématique de transmission	7
4.7 : Rugosimètre	9
4.8 Quille pendulaire de voilier	10
Modéliser le système	11
1 Modélisation et paramétrage de la chaîne d'énergie du système	11
2 Modélisation des actions mécaniques :	12
3 Détermination des énergies cinétiques galiléennes :	13
4 Évaluer des puissances développées par les actions mécaniques :	13
5 Déterminer la puissance motrice nécessaire :	13

4.1 Dispositif de mesure d'inertie :

La figure ci-dessous représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide S par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti Σ .



Le repère $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au bâti Σ . L'axe $(O; \vec{x})$ est dirigé suivant la verticale descendante On note \vec{g} l'accélération de la pesanteur telle que $\vec{g} = g \cdot \vec{x}$. Les deux portées cylindriques de Σ sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe $(O; \vec{z})$, de rayon r.

Le solide S de masse m, de centre d'inertie C, possède deux tourillons de même rayon a (a < r). L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

Le tourillon de S , de centre C, roule sans glisser au point A sur la portée cylindrique de Σ .

- Soit $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ le repère, tel que le point C soit sur l'axe $(O; \vec{x}_1)$. On pose $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.
- Soit $R_2(O; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ le repère lié à S. On pose $\varphi = (\vec{x}_2, \vec{x}_1)$. On suppose $\varphi = 0$ lorsque $\theta = 0$

Notons I le moment d'inertie de S par rapport à son axe de symétrie $(C; \vec{z})$, et f le facteur de frottement entre S et Σ .

On donne: a = 12.3 mm, r = 141.1 mm, $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$, m = 7217 g, f = 0.15.

- **Q1**. Quelle relation y'a-t-il entre θ et φ ?
- **Q2**. Quelle équation obtient-on en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à S dans son mouvement par rapport R?
- **Q3**. En supposant que l'angle θ reste petit au cours du mouvement, déterminer la période T des oscillations de S.
- **Q4**. En déduire le moment d'inertie I de S, sachant que $T=5\ s$.

4.2 Moteur d'entraînement d'un bras de robot :

Le repère $R_0 \left(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$ est lié au bâti 0. L'axe $\left(O; \vec{z}_0 \right)$ est dirigé suivant la verticale ascendante.

Le bras I est en liaison pivot d'axe $(O; \vec{z}_0)$ avec le bâti 0.

Soit
$$R_{\rm l} \left(O; \vec{x}_{\rm l}, \vec{y}_{\rm l}, \vec{z}_{\rm 0} \right)$$
 un repère lié à I . On pose $\vec{\Omega}_{{\rm l}/0} = \omega_{\rm l} \cdot \vec{z}_{\rm 0}$

Un moteur d'axe $\left(A;\vec{z}_{0}\right)$ tel que $\overrightarrow{OA}=r_{1}\cdot\vec{x}_{1}$ a son stator fixé au bras I et son rotor 2 entraîné en rotation le bras I par l'intermédiaire d'un engrenage à axes parallèles dont une roue est fixe par rapport au bâti 0.

La roue liée au rotor 2 a pour rayon primitif r_2 et celle liée au bâti θ a pour rayon primitif r_θ .

On pose
$$\vec{\Omega}_{2/1} = \omega \cdot \vec{z}_0$$
.

Le guidage en rotation du rotor 2 par rapport au stator 1 est réalisé par une liaison pivot sans frottement d'axe $(A; \vec{z}_0)$.

<u>Caractéristiques d'inertie</u>:

- I_I , moment d'inertie du bras I et du stator par rapport à $(G_1; \vec{z}_0)$;
- m_1 , masse du bras 1 et du stator ;
- G_I , centre d'inertie du bras I et du stator avec $\overrightarrow{OG_1} = L \cdot \vec{x}_1$;
- m_2 , masse du rotor 2 et de la roue dentée ;
- G_2 , centre d'inertie du rotor 2 et de la roue dentée avec $\overrightarrow{OG_2} = r_1 \cdot \vec{x_1} + h \cdot \vec{z_0}$

Le torseur d'action mécanique du stator sur le rotor se décompose en deux :

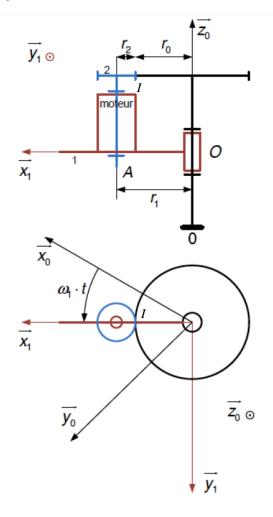
- $\bullet \quad \text{ action m\'ecanique de la liaison pivot, } \begin{cases} T_{1\rightarrow 2} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{cases} \begin{matrix} X_{12} & L_{I2} \\ X_{12} & M_{I2} \\ Z_{12} & 0 \end{matrix} \begin{matrix} \vdots \\ Z_{12} & 0 \end{matrix} \begin{matrix} X_{12} & X_{12} \\ X_{13} & X_{12} \\ X_{13} & X_{13} \end{matrix} \begin{matrix} \vdots \\ X_{14} & X_{14} \\ X_{14} & X_{14} \\ X_{14} & X_{14} \end{matrix} \begin{matrix} \vdots \\ X_{14} & X_{14} \\ X_{14} & X_{14} \\ X_{14} & X_{14} \end{matrix} \begin{matrix} \vdots \\ X_{14} & X_{14} \\ X_{14} & X_{14} \\ X_{14} & X_{14} \\ X_{14} & X_{14} \end{matrix} \begin{matrix} \vdots \\ X_{14} & X_{14} \\ X_{14} & X_{14} \\ X_{14} & X_{14} \\ X_{14} & X_{14} \end{matrix} \begin{matrix} \vdots \\ X_{14} & X_{14} \\ X_{14} & X_{14} \\ X_{14} & X_{14} \\ X_{14} & X_{14} \end{matrix} \begin{matrix} \vdots \\ X_{14} & X_{14} \end{matrix} \begin{matrix} \vdots \\ X_{14} & X_{14} \\ X_{15} & X_{14} \\ X_{15} & X_{14} \\ X_{15} & X_{15} \\ X_$
- action électromagnétique du moteur, $\{T_{moteur
 ightarrow 2}\} = egin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ A & 0 & C_m \end{pmatrix} R_1$;

L'engrenage est réalisé à partir de pignon à denture droite, l'angle de pression est de α = 20°.

On note : $\{T_{0 \to 2}\} = \begin{cases} F_{02} \cdot \sin \alpha & 0 \\ F_{02} \cdot \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{cases}$ le torseur de l'action transmissible par la roue 0 sur le pignon 2 avec I

le point de contact ($\overrightarrow{OI} = r_0 \cdot \vec{x}_1 + h_1 \cdot \vec{z}_0$).

- **Q1**. Exprimer la relation entre ω_i et ω
- Q2. Construire le schéma d'analyse (les actions mécaniques de pesanteur sont négligées)
- Q3. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble mobile.
- Q4. Exprimer les puissances extérieures et les puissances intérieures
- **Q5**. Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble mobile.
- **Q6**. En déduire l'équation différentielle du mouvement permettant d'obtenir C_m en fonction des paramètres du mouvement et des paramètres cinétiques



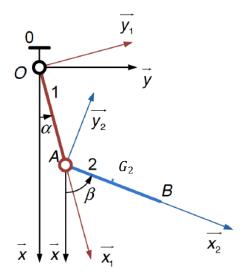
4.3 Pendule double:

Un pendule double est constitué de deux tiges I et 2 identiques, homogènes de masse m, de longueur 2.a et de dimensions transversales négligeables devant la longueur, oscillant dans le plan vertical $\left(O;\vec{x},\vec{y}\right)$ du repère $R\left(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$ considéré comme galiléen, lié au bâti O.

La tige I, d'extrémités O et A est en liaison pivot d'axe $O(\vec{z})$ avec le bâti $O(\vec{z})$. On note $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à I tel que $O(\vec{z}) = 2 \cdot a \cdot \vec{x}_1$ et on pose $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

On note G_I le centre d'inertie de la tige Isitué au milieu du segment [O;A]

On donne :
$$\begin{bmatrix} I_{G_1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Z})} \text{ avec } B = \frac{m_1 \cdot a^2}{3}$$



La tige 2, d'extrémités A et B est en liaison pivot d'axe $\left(A;\vec{z}\right)$ avec la tige I. On note $R_2\left(A;\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}\right)$ un repère lié à 2 tel que $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot a \cdot \vec{x}_2$ et on pose $\beta = (\vec{x},\vec{x}_2)$.

On note G_2 le centre d'inertie de la tige 2 situé au milieu du segment [A;B]. On note \vec{g} l'accélération de la pesanteur telle que $\vec{g} = g \cdot \vec{x}$.

On donne :
$$\begin{bmatrix} I_{G_2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z}) \text{ avec } B = \frac{m_2 \cdot a^2}{3}$$

Q1. Déterminer les puissances des actions mécaniques extérieures suivantes

- action mécanique de 0 sur 1, dans le mouvement de 1 par rapport à 0,
- action mécanique de 1 sur 2, dans le mouvement de 2 par rapport à 0,
- action mécanique de 1 sur 2, dans le mouvement de 2 par rapport à 1,
- action mécanique de la pesanteur sur I, dans le mouvement de 1 par rapport à O,
- action mécanique de la pesanteur sur 2, dans le mouvement de 2 par rapport à θ .

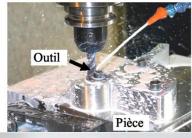
Q2. Ecrire le théorème de l'énergie cinétique pour la tige 2 dans son mouvement par rapport au bâti θ .

Q3. Ecrire le théorème de l'énergie cinétique pour l'ensemble des deux tiges 1+2 dans leurs mouvements par rapport au bâti 0.

4.4 Axe de machine outil à commande numérique :

L'usinage est une opération de transformation d'un produit par enlèvement de matière. Cette opération est à la base de la fabrication de produits dans les industries mécaniques. On appelle le moyen de production associé à une opération d'usinage une machine-outil ou un centre d'usinage. La génération d'une surface par enlèvement de matière est obtenue grâce à un outil muni d'au moins une arête coupante.

Les différentes formes de pièces sont obtenues par des translations et des rotations de l'outil par rapport à la pièce.

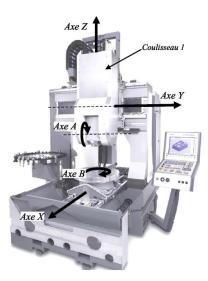


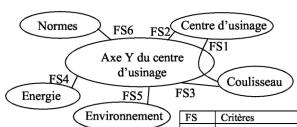


Exemple de pièce complexe obtenue par usinage

La figure ci-contre est un exemple de centre d'usinage possédant 3 translations (X, Y et Z) et deux rotations (B et C). Une telle machine est appelée machine 5 axes (un axe est un ensemble qui gère un des mouvements élémentaire, translation ou rotation). Sur cette machine, 3 axes sont utilisés pour mettre en mouvement l'outil par rapport au bâti (ce sont les translations Y et Z et la rotation A) et 2 axes sont utilisés pour mettre en mouvement la pièce par rapport au bâti (ce sont la translation X et la rotation B).

On s'intéresse ici à l'axe Y qui met en mouvement le coulisseau 1 par rapport au bâti 0. On donne une description structurelle simplifiée ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel.





FS1 : Déplacer le coulisseau par rapport au centre d'usinage suivant des mouvements programmés

FS2 : S'adapter au centre d'usinage FS3 : S'adapter au coulisseau FS4 : Etre alimenté en énergie

FS5 : S'adapter et résister à l'environnement

FS6: Respecter les normes

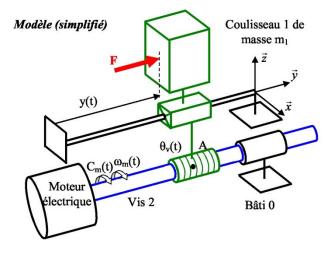
On considère un modèle simplifié dans lequel le coulisseau 1 est mis en mouvement par le moteur électrique qui délivre un couple moteur Cm(t).

Toutes les liaisons sont considérées comme parfaites. La liaison vis/écrou d'axe $(A; \vec{y})$ a pour loi de comportement :

$$\dot{y}(t) = -\frac{pas}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_m$$

On considère que la vis, d'inertie I par rapport à l'axe $(A; \vec{y})$ est de raideur axiale infinie et de raideur en torsion infinie.

Le coulisseau 1, de masse m_I , est soumis à une force extérieure \vec{F} telle que $\vec{F} = F \cdot \vec{y}$.



La loi du mouvement de l'axe Y est une loi en trapèze de vitesse. L'objectif va être de déterminer le couple que le moteur doit délivrer pour chacune des phases de la loi de mouvement imposée.

Q1. Isoler l'ensemble E = vis sans fin 2 + coulisseau 1 et déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble E, l'exprimer uniquement en fonction de ω_m .

Q2. On donne $F = 2000 \, N$, $\ddot{y} = -30 \, m \cdot s^{-2}$, $I = 0.02 \, kg.m^2$, $m_I = 100 \, kg$ et $pas = 5 \, mm$. Le critère couple maximal à délivrer de la FS1 est-il respecté ?

4.5 Système d'inspection pour tubes de guidage de centrale nucléaire :

Pour maitriser la réaction en chaine au cœur du réacteur, on plonge à l'intérieur des "grappes de contrôle" qui, suivant leur profondeur de descente, régulent la réaction. Elles sont constituées de plusieurs tiges, appelées "crayons" (voir photo ci contre), d'environ quatre mètres de longueur pour un diamètre de dix millimètres. Les crayons sont fixés à une tête à laquelle on impose les mouvements de montée ou descente. Chaque grappe de contrôle est guidée dans un tube.

La maintenance des installations nucléaires civiles est un enjeu essentiel de la sûreté de ces installations. Les centrales nucléaires font ainsi l'objet d'inspections régulières avec des matériels adaptés au contexte particulier de ce secteur d'activité. On s'intéresse donc au système permettant d'inspecter les tubes de guidage des crayons dont on donne un extrait de cahier des charges ainsi qu'une description structurelle.

Le système d'inspection est constitué d'une perche, commandée en montée et descente par un palan spécifique suspendu au dessus de la piscine. La perche pénètre à l'intérieur du tube à inspecter et descend jusqu'à l'outil d'inspection auquel on accroche la perche. Les mouvements de la perche permettent ensuite de déplacer à volonté l'outil dans le tube de guidage. Une gaine flexible fixée sous l'outil d'inspection et le reliant à un robot chenille contient les câbles assurant l'alimentation des cameras, la gestion de la prise d'images et leur transmission vers le système d'acquisition.

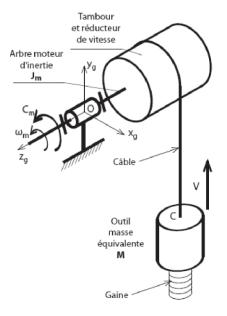
Exigence	Critère	Niveau
1.0 : Le système doit réaliser l'inspection de	Accélération de l'outil	$\geq 1m \cdot s^{-2}$
l'état d'usure des tubes de guidages		

Données et hypothèses :

La chaine d'énergie du système est constituée d'un moteur à courant continu commandé en loi trapèze de vitesse qui entraine un tambour associé à un réducteur. L'ensemble donne le mouvement vertical à l'outil d'inspection par l'intermédiaire du câble de la perche de commande accrochée à l'outil.

- Moteur : vitesse angulaire ω_m , couple $C_m = 13.5 \ N.m$, inertie de l'arbre moteur $Jm = 12600 \ kg.mm^2$ par rapport à son axe de rotation.
- Réducteur : rapport de réduction $\lambda = \frac{1}{12}$.
- Sortie de réducteur et tambour : moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe de rotation du tambour, $Jt = 892500 \ kg.mm^2$, rayon du tambour $R = 500 \ mm$.
- Outil : Masse M=24~kg , vitesse de translation $\vec{V}_{C\in outil/Rg}=V\cdot\vec{y}_g$
- Rendement global de l'installation : $\eta = 1$.

Q1. A l'aide du TEC, vérifier que la valeur du couple moteur nécessaire à la remontée de l'outil valide bien le critère de l'exigence 1.0.



4.6. Prothèse myo-électrique

Modélisation du comportement dynamique de la chaine d'énergie de l'index

Objectif: L'objectif est d'évaluer le couple que devra fournir l'actionneur pour la mise en mouvement de l'index de la main prothétique.

La figure 4 décrit sous forme simplifiée les constituants réalisant l'index d'une main gauche prothétique (gant esthétique non représenté). On retrouve notamment la paume (0), la phalange (3) associée à la biellette (4), la phalangine (5) associée à la biellette (6) et la phalangette (7). La bielle (2) permet la mise en mouvement de la phalange (3) à partir du mouvement de l'arbre de l'actionneur (1).

En raison d'un encombrement limité, les ingénieurs ont proposé, sur le prototype de la prothèse, que la rotation du pouce soit réalisée dans un plan perpendiculaire à celui de l'index. La prise d'un objet se fait donc par pincement entre la phalangette (7) de l'index et la paume de la main (0). Le pouce de la main prothétique

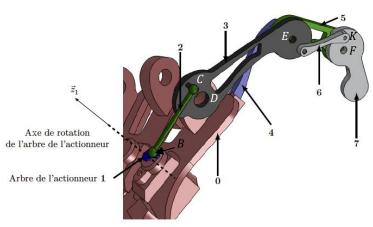


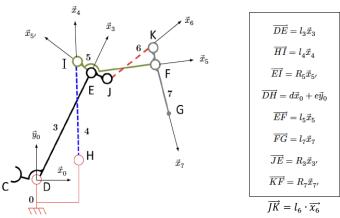
Figure 4 Description des constituants associés aux mouvements de l'index

n'enroule donc pas l'objet. Pour la saisie d'un verre, seule l'action de l'index est donc étudiée. À contrario, une main humaine enroule l'objet avec tous les doigts, pouce compris, et permet de saisir des objets de plus grandes dimensions.

Modélisation de la chaine cinématique de transmission

Dans cette partie, l'étude porte sur la chaine cinématique définie par l'ensemble $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ (figure 5).

Les figures géométrales associées aux changements de bases sont données sur la figure 6. Les mouvements des différents solides sont dans le plan $(D; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$.



 ${\bf Figure}~{\bf 5}~~{\bf Sch\'ema}~{\bf cin\'ematique}~{\bf du}~{\bf dispositif}~{\bf de}~{\bf mise}~{\bf en}~{\bf mouvement}~{\bf de}~{\bf la}~{\bf phalangette}~{\bf (7)}~{\bf et}~{\bf param\'etrage}$

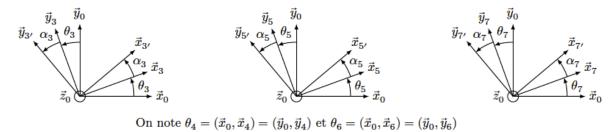


Figure 6 Figures géométrales de changement de bases et paramétrages

Hypothèses:

- Les masses des bielles (2), (4) et (6) et des phalanges (5) et (7) sont négligées,
- Les liaisons sont supposées parfaites,
- Le référentiel $R_0(D; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ associé à la paume de la main prothétique (0) est supposé galiléen.
- Lors de cette phase de mise en mouvement, il n'y a pas d'action du verre sur l'index.

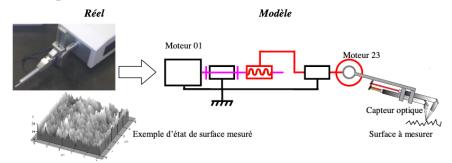
<u>Données :</u>

• Les caractéristiques géométriques et inertielles de la phalange (3) et de l'arbre de l'actionneur (1) sont fournies dans le tableau 4.

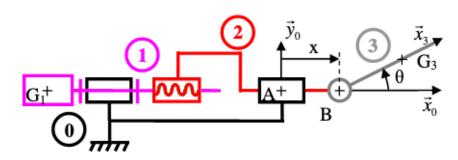
Phalange (3)						
$\overrightarrow{y_3}$	Masse	M 3				
	Centre d'inertie	$\overline{DG}_3 = a_3\vec{x}_3 + b_3\vec{y}_3 + c_3\vec{z}_3$				
$\overrightarrow{z_3} = \overrightarrow{z_0}$ $D R_3(D; \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$	Opérateur d'inertie	$\overline{\overline{I}}(G_3,3) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{B_3}$				
	Arbre act	tionneur (1)				
\uparrow $\overrightarrow{z_1}$ B	Masse	M1				
	Centre d'inertie	G_1 situé sur l'axe de rotation de l'actionneur				
G_1	Opérateur d'inertie	$\overline{\overline{I}}(G_1,1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{B_1}$				

- Le paramètre angulaire de la liaison pivot d'axe $(G; \vec{z_1})$ orientant le solide (1) par rapport à (0) est noté θ_1 . Il représente la position angulaire de l'arbre de l'actionneur (1).
- L'actionneur exerce une action mécanique sur le solide (1), assimilée à un couple pur $\overline{C_{mot}} = c_{mot} \cdot \overline{z_1}$.
- L'accélération de la pesanteur est modélisée par $\vec{g} = -g \cdot \overrightarrow{z_0}$.
- **Q1.** Réaliser le schéma d'analyse associé à l'étude du comportement dynamique l'ensemble S.
- **Q2.** Donner l'expression de $T_{S/0}$ de l'énergie cinétique de l'ensemble S dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen associé à la paume (0).
- **Q3.** Après avoir calculé les expressions des puissances galiléennes des actions mécaniques extérieures et intérieures à l'ensemble S déterminer la relation entre le couple moteur $c_{mot}(t)$, $\theta_1(t)$, $\theta_3(t)$, leurs dérivées successives et les caractéristiques géométriques et inertielles des solides.

4.7: Rugosimètre



La rugosimétrie est la mesure de l'état de surface des pièces mécaniques. La mesure de rugosimétrie repose traditionnellement sur deux éléments distincts : le capteur, qui peut être mécanique (palpeur) ou optique, et le traitement du signal.



$$R_0 = (A; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$$

- Le rotor 1, de centre de gravité G_I tel que $\overrightarrow{AG_1} = -a \cdot \overrightarrow{x_0}$, a pour moment d'inertie J_I selon l'axe $(A; \overrightarrow{x_0})$. On note φ le paramètre angulaire de la liaison pivot de 1/0 tel que $\varphi = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}) = (\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_1})$.
 - Le moteur 01 génère le mouvement de rotation de 1/0. Le couple moteur appliqué sur 1 est noté $\overrightarrow{C_{0 \to 1}} = C_1 \cdot \overrightarrow{x_0}$.
- Le coulisseau 2, de centre de gravité G_2 , a pour masse m_2 . La liaison glissière de 2/0 a pour paramètre de position x tel que $\overrightarrow{AB} = x \cdot \overrightarrow{x_0}$. La liaison hélicoïdale de 1/2 possède un pas à droite tel que pas=0,5 mm.
- L'ensemble 3, de centre de gravité G_3 tel que $\overrightarrow{BG_3} = r \cdot \overrightarrow{x_3}$, a pour masse m_3 .

On donne la matrice d'inertie de cet ensemble: $\begin{bmatrix} I_{G_3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{bmatrix}_{\overrightarrow{(x_3,y_3,z_3)}}.$

On note θ le paramètre angulaire de la liaison pivot de 3/2 tel que $\theta = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_3}) = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3})$. Le moteur 23 génère le mouvement de rotation de 3/2. Le couple moteur appliqué sur 3 est noté $\overrightarrow{C_{2\to 3}} = C_3 \cdot \overrightarrow{z_0}$.

- Un système d'équilibrage (ressort de torsion) permet à la tête optique d'être horizontale ($\theta = 0^{\circ}$) en position de repos, c'est-à-dire lorsque le moteur 23 n'est pas alimenté. Ce système exerce sur l'ensemble 3 un couple de rappel noté $\overrightarrow{C_{2r}} = C_r \cdot \overrightarrow{z_0}$.
- On considère que toutes les liaisons sont parfaites.
- L'action mécanique de la pesanteur est telle que $\vec{g} = -g \cdot \vec{y_0}$.

Q1. Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma = \{1,2,3\}$ des pièces mobiles : T_{Σ/R_0}

 T_{Σ/R_0} peut se mettre sous la forme : $T_{\Sigma/R_0} = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot A \cdot \dot{\theta}^2 + f(\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi}$. L'objectif est ici de déterminer les expressions de J_{eq} , A et $f(\theta)$.

Pour cela on demande:

Q1a. De déterminer ${V_{2/1}}$

Q1b. En écrivant la fermeture cinématique de la chaine $\{0,1,2,0\}$ trouver la relation liant \dot{x} et \dot{a}

Q1c. De déterminer les expressions de J_{eq} , A et $f(\theta)$.

- **Q2.** Déterminer les puissances des actions mécaniques extérieures à l'ensemble $\Sigma = \{1,2,3\}$
- **Q3.** Déterminer les puissances des actions mécaniques intérieures à l'ensemble $\Sigma = \{1,2,3\}$
- **Q4.** Par application du théorème de l'énergie cinétique, Déterminer la loi de commande de $\Sigma = \{1,2,3\}$.

4.8 Quille pendulaire de voilier

La conception des voiliers de course, dans un contexte de forte compétitivité sportive et technique, utilise toutes les évolutions récentes afin d'améliorer performances et sécurité. Dès les premiers stades de la conception du navire, l'architecte naval intègre les exigences des différents spécialistes qui collaborent au projet. A ce titre la conception d'un voilier de course océanique est analogue à la conduite d'un projet industriel classique où les intervenants s'inscrivent dans une démarche collaborative pilotée par un coordonnateur du projet.



Figure 1: Voilier 60' IMOCA

L'étude proposée s'intéresse à quelques aspects de la conception d'une quille pendulaire équipant un monocoque 60' IMOCA

Cahier des charges:

Le cahier des charges du système est donné à la Figure 2.

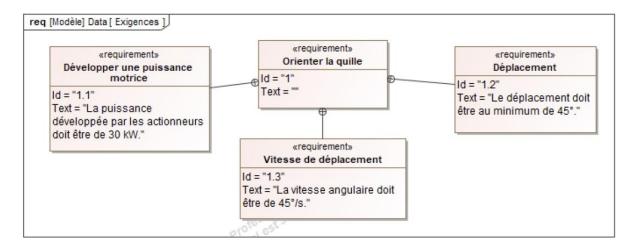


Figure 2 : Diagramme des exigences partiel

L'objectif du travail proposé est de vérifier que la chaîne d'énergie est correctement dimensionnée pour permettre le déplacement de la quille pendulaire.

Modéliser le système

La quille pendulaire est en liaison pivot d'axe $(0; \overline{z_N})$ avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci. La mise en mouvement et le blocage en position de la quille sont réalisés par des chaînes fonctionnelles indépendantes.

1 Modélisation et paramétrage de la chaîne d'énergie du système

La chaîne d'énergie du système étudié est composée (voir Figure 3) :

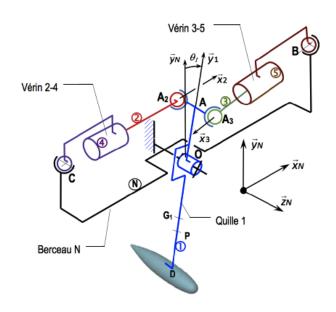
du berceau N encastré sur la coque du navire et dont le repère associé est $R_N = (O; \overrightarrow{x_N}, \overrightarrow{y_N}, \overrightarrow{z_N})$;

de la quille 1 constituée du voile et du lest et dont le repère associé est $R_1 = (0; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_N})$;

du vérin 2-4 constitué du piston 2 et du cylindre 4 et dont les repères associés sont respectivement

 $R_2=(A;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_N})$ et $R_4=(C;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_N})$ (la rotation relative 2-4 ne sera pas prise en compte dans l'étude et donc les bases de R_2 et R_4 sont confondues);

du vérin 3-5 constitué du piston 3 et du cylindre 5 et dont les repères associés sont $R_3 = (A; \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N})$ et $R_5 = (B; \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N})$ (la rotation relative 3-5 ne sera pas prise en compte dans l'étude et donc les bases de R_3 et R_5 sont confondues).



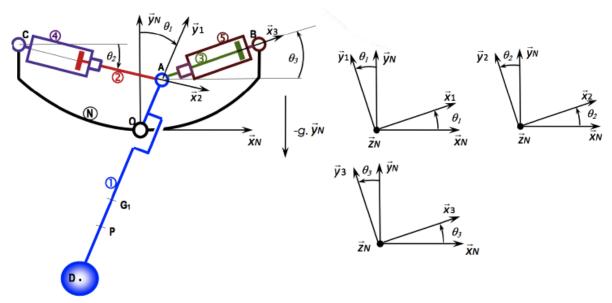


Figure 3 : Modèle 2D

Données géométriques :

Le plan d'étude est : $(A; \overrightarrow{x_N}, \overrightarrow{y_N})$

Dans ce modèle, les points A_2 et A_3 sont confondus avec le point A (d=0), et les points C et B sont projetés dans le plan $(A; \overrightarrow{x_N}, \overrightarrow{y_N})$.

$$\overrightarrow{OA} = R \cdot \overrightarrow{y_1}$$
; $\overrightarrow{OC} = -a \cdot \overrightarrow{x_N} + b \cdot \overrightarrow{y_N}$; $\overrightarrow{OB} = a \cdot \overrightarrow{x_N} + b \cdot \overrightarrow{y_N}$; $\overrightarrow{DO} = L_{t1} \cdot \overrightarrow{y_1}$; avec $R > 0$, $a > 0$, $b > 0$ et $L_{tl} > 0$; $\overrightarrow{CA} = x_{24}(t) \cdot \overrightarrow{x_2}$; $\overrightarrow{AB} = x_{35}(t) \cdot \overrightarrow{x_3}$

Liaison	Туре	Orientation	Paramètre	Liaison	Туре	Orientation	Paramètre
N/1	Pivot	$(0; \overrightarrow{z_N})$	$ heta_1$	2/4	Glissière	$\overrightarrow{x_2}$	$x_{24}(t)$
N/4	Pivot	$(C;\overrightarrow{z_N})$	$ heta_2$	5/3	Glissière	$\overrightarrow{x_3}$	$x_{35}(t)$
N/5	Pivot	$(B; \overrightarrow{z_N})$	$ heta_3$	2/1	Pivot	$(A;\overrightarrow{z_N})$	
				3/1	Pivot	$(A;\overrightarrow{z_N})$	

Données massiques et inertielles :

Solide	Masse	Centre d'inertie	Opérateur d'inertie
1	m_1	$\overrightarrow{OG_1} = -L_1 \cdot \overrightarrow{y_1}$ $L_1 > 0$	$\begin{bmatrix} I_{G_1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_N})}$
2	m_2	$\overrightarrow{AG_2} = -L_2 \cdot \overrightarrow{x_2}$	$\begin{bmatrix} I_{G_2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \end{bmatrix}$
3	m_3	$\overrightarrow{AG_3} = L_2 \cdot \overrightarrow{x_3}$	$\begin{bmatrix} I_{G_3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \qquad A_3 = A_2 \text{ et } B_3 = B_2$
4	m_4	С	$\begin{bmatrix} I_{C,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_N})}$
5	$m_5 = m_4$	В	$\begin{bmatrix} I_{B,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N})}$ $A_5 = A_4, B_5 = B_2 \text{ et } C_5 = C_4$

Figure 4 : Données massiques et inertielles

2 Modélisation des actions mécaniques :

Le bateau est supposé à l'arrêt et son repère R_N est galiléen.

Les liaisons sont supposées parfaites. Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini en Figure 5. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique définie en Figure 5, où F_p est une composante de portance et F_t est une composante de traînée.

Actio	ons	Origine	Torseur	Acti		ns	Origine	Torseur
De	Sur				De	Sur		
Huile	2	Pression Hydraulique Vérin 2-4	$\{T_{h\to 2}\} = \int_{C}^{F_{h,2}} \left\{ F_{h,2} \right\} dt$	$\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{x_2} \cdot \overrightarrow{x_2} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}$	Huile	2	Frottement visqueux Vérin 2-4	$\left\{T_{frot\to 2}\right\} = A \begin{cases} -k \cdot \frac{dx_{24}}{dt} \overrightarrow{x_{2}} \\ \overrightarrow{0} \end{cases}$
Huile	3	Pression Hydraulique Vérin 3-5	$\{T_{h\to 3}\} = \int_{B} \left\{ -F_{h} \right\}$	$\left\{ \overrightarrow{0}, \overrightarrow{x_3} \right\}$	Huile	3	Frottement visqueux Vérin 3-5	$\{T_{frot\to 3}\} = A \begin{cases} k \cdot \frac{dx_{35}}{dt} \overrightarrow{x_3} \\ \overrightarrow{0} \end{cases}$
					Eau	1	Actions Hydro- dynamiques	$\{T_{eau \to 1}\} = \begin{cases} F_P \overrightarrow{Z_1} + F_t \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{cases}$ $\overrightarrow{OP} = -h \cdot \overrightarrow{y_1}$

Figure 5 : Actions mécaniques

3 Détermination des énergies cinétiques galiléennes :

Q1. Exprimer les vitesses suivantes :

- $\overrightarrow{V_{G_1\epsilon 1/N}} \text{ en fonction de } \frac{d\theta_1}{dt} \text{ et des paramètres géométriques utiles };$ $\overrightarrow{V_{G_2\epsilon 2/N}} \text{ en fonction de } \frac{d\theta_2}{dt}, \frac{dx_{24}}{dt}, x_{24} \text{ et des paramètres géométriques utiles };$ $\overrightarrow{V_{G_3\epsilon 3/N}} \text{ en fonction de } \frac{d\theta_3}{dt}, \frac{dx_{35}}{dt}, x_{35} \text{ et des paramètres géométriques utiles };$ $\overrightarrow{V_{A\epsilon 2/4}} \text{ en fonction de } \frac{dx_{24}}{dt} \text{ et des paramètres géométriques utiles }.$
- $\overrightarrow{V_{A\epsilon 3/5}}$ en fonction de $\frac{dx_{35}}{dt}$ et des paramètres géométriques utiles .

Q2. Déterminer les énergies cinétiques suivantes :

- (a) énergie cinétique galiléenne du solide I dans son mouvement par rapport à N, $T_{1/N}$, en fonction de $\frac{d\theta_1}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles ;
- (b) énergie cinétique galiléenne du solide 2 dans son mouvement par rapport à N, $T_{2/N}$, en fonction de $\frac{d\theta_2}{dt}$, $\frac{dx_{24}}{dt}$, x_{24} et des paramètres géométriques utiles ;
- (c) énergie cinétique galiléenne du solide 4 dans son mouvement par rapport à N, $T_{4/N}$, en fonction de $\frac{d\theta_2}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles ;

4 Évaluer des puissances développées par les actions mécaniques :

On note E l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5. On note $P_{i \leftrightarrow j}$ la puissance intérieure développée par les actions entre les solides i et j (par exemple : $P_{5\leftrightarrow 3}$ est la puissance développée l'action visqueuse entre 3 et 5).

Q3. Recenser les différentes puissances intérieures à E en utilisant la notation ci-dessus, et les exprimer en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

On note $P_{ext o i/N}$ la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à E sur le solide i.

Q4. Recenser puis exprimer les puissances galiléennes développées par les actions mécaniques extérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

5 Déterminer la puissance motrice nécessaire :

Dans la phase de vie étudiée, lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que $Fh_2 > 0$ et $Fh_3 = 0$ (voir Figure 5). Le vérin 2-4 est alors moteur et le vérin 3-5 est libre.

Q5. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à E dans son mouvement par rapport à N. Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer, dans ces conditions, la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction des autres puissances et de la variation d'énergie cinétique de l'ensemble des solides par rapport à N.