

3 Exercices Dynamique (théorèmes généraux)

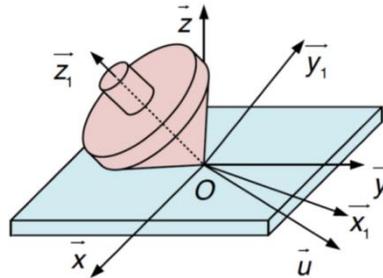
Connaissances B2	Savoir-faire
<ul style="list-style-type: none"> • Centre d'inertie • Opérateur d'inertie • Matrice d'inertie • Torseur cinétique • Torseur dynamique • Energie cinétique 	<p>Déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide.</p> <p>Déterminer l'énergie cinétique d'un solide ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide.</p>
Connaissances C1	Savoir-faire
<p>Chaines de solides :</p> <ul style="list-style-type: none"> • principe fondamental de la dynamique • théorème de l'énergie cinétique 	<p>Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement</p> <p>Proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison</p> <p>Choisir une méthode pour déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre</p>

Sommaire

4.1 Toupie :	2
4.2 Pendule double :	3
4.3 Couple gyroscopique :	4
4.4 Porte outil affuteuse :	5
4.5 Machine à vibrer :	6
4.6 Bâti vibrant :	8
4.7 Cheville Nao :	9
1 Présentation de l'axe de tangage	9
2 Condition d'équilibre global du robot	10
3 Modélisation du guidage par paliers :	10
4 Etude dynamique	11

4.1 Toupie :

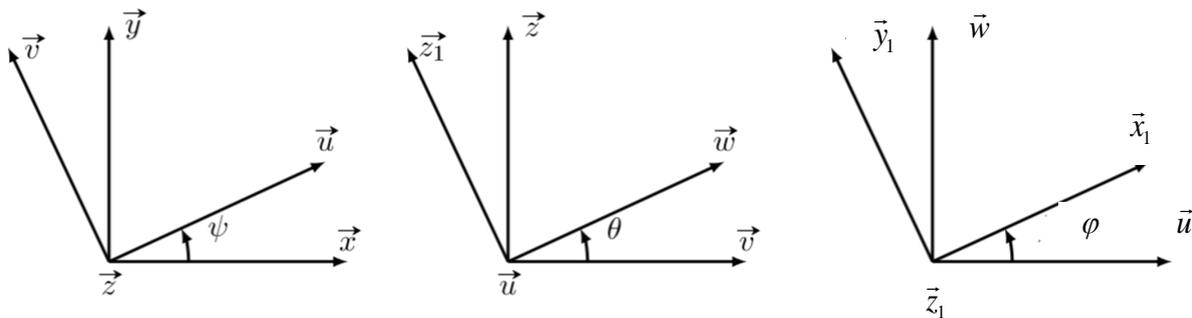
Considérons une toupie S d'axe de symétrie matérielle $(O; \vec{z}_1)$ dont la pointe O reste immobile sur le plan $(O; \vec{x}, \vec{y})$.



Soit $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère considéré comme galiléen, lié au plan, l'axe $(O; \vec{z})$ étant dirigé suivant la verticale ascendante. Soit $R_1(O_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à S . La matrice d'inertie de S au point O est :

$$[I_{O,S}] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} (\dots, \vec{z}_1)$$

L'orientation de la base R_1 par rapport à la base R est définie par les trois angles d'Euler.



On note \vec{g} l'accélération de la pesanteur telle que $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}$. On pose $\vec{OG} = l \cdot \vec{z}_1$

La liaison entre S et le plan $(O; \vec{x}, \vec{y})$ est une liaison ponctuelle adhérente de normale $(O; \vec{z})$, on pose

$$\{T_{plan \rightarrow S}\} = O \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Q1. Déterminer les équations de mouvement de S par rapport au plan.

Q2. A quelles conditions existe-t-il des mouvements tels que $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = Cte$?

Q3. Considérons des mouvements où :

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = Cte$$

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}_0 = Cte$$

$$\theta = \theta_0 = Cte$$

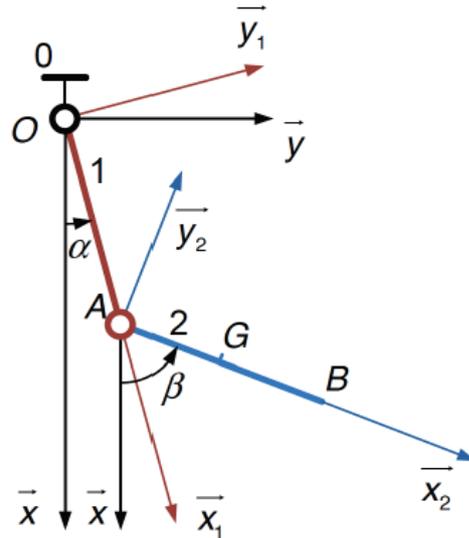
En admettant que la rotation propre $\dot{\phi}_0$ est très grande devant $\dot{\psi}_0$ et θ_0 , déterminer $\dot{\phi}_0$ en fonction de $\dot{\psi}_0$ (on supposera que C et A sont de même grandeur)

Application numérique :

- $m=30 \text{ g}$
- $g=10 \text{ m/s}^2$
- $l=3 \text{ cm}$
- $C=1.5 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^2$
- $\dot{\psi}_0 = \pi \text{ rad/s}$

4.2 Pendule double :

Un pendule double est constitué de deux tiges 1 et 2 identiques, homogènes de masse m , de longueur $2a$ et de dimensions transversales négligeables devant la longueur, oscillant dans le plan vertical $(O; \vec{x}, \vec{y})$ du repère $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ considéré comme galiléen, lié au bâti θ .



La tige 1, d'extrémités O et A est en liaison pivot d'axe $(O; \vec{z})$ avec le bâti θ . On note $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à 1 tel que $\vec{OA} = 2 \cdot a \cdot \vec{x}_1$ et on pose $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

La tige 2, d'extrémités A et B est en liaison pivot d'axe $(A; \vec{z})$ avec la tige 1. On note $R_2(A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié à 2 tel que $\vec{AB} = 2 \cdot a \cdot \vec{x}_2$ et on pose $\beta = (\vec{x}, \vec{x}_2)$.

On note G le centre d'inertie de la tige 2 situé au milieu du segment $[A; B]$.

On note \vec{g} l'accélération de la pesanteur telle que $\vec{g} = g \cdot \vec{x}$.

On donne :
$$[I_{G,2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}) \quad \text{avec } B = \frac{m \cdot a^2}{3}$$

Q1. Ecrire les deux équations de mouvement du pendule double par rapport au repère R .

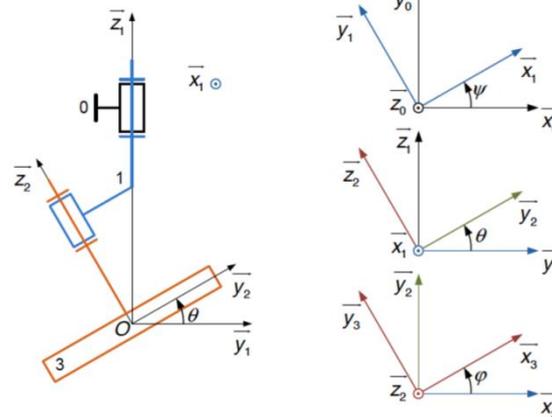
Q2. Afin d'étudier les petites oscillations du pendule double autour de sa position d'équilibre stable ($\alpha = 0, \beta = 0$), effectuer un développement limité au premier ordre des équations de mouvement précédentes en supposant que $\alpha, \dot{\alpha}, \beta$ et $\dot{\beta}$ sont des infiniment petits du premier ordre.

Q3. En recherchant la solution sous la forme $\alpha = \alpha_0 \cos(\Omega t + \phi)$ et $\beta = \beta_0 \cos(\Omega t + \phi)$, déterminer les pulsations propres du pendule double (valeurs de Ω).

4.3 Couple gyroscopique :

Le rotor 3, solide de révolution d'axe $(O; \vec{z})$ est guidé par rapport au bâti 0 par l'intermédiaire de deux liaisons pivots parfaites telles que $\theta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$.

Le repère $R_3(O; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est lié au solide 3.



Cas général

Q1. Donner la forme de la matrice d'inertie du solide 3 en O.

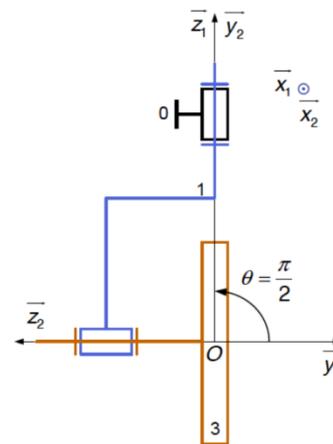
Q2. Déterminer le moment en O exercé par le palier 1 sur le solide 3 en projection sur l'axe $(O; \vec{x}_2)$ correspondant au couple gyroscopique, noté C_{gyr} . On supposera que la force exercée par le sol sur la roue avant passe par O.

Cas d'une roue de moto

Une roue avant de moto qui se déplace en translation rectiligne uniforme est soumise à l'action du pilote, qui tourne le guidon vers la gauche $\dot{\psi} > 0$.

Q3. En quoi l'hypothèse de mouvement de translation rectiligne uniforme est-elle intéressante?

Q4. Calculer C_{gyr} pour $\theta = \pi/2$.



Q5. Quel est le signe du couple gyroscopique? Quelle est son influence sur le comportement de la moto?

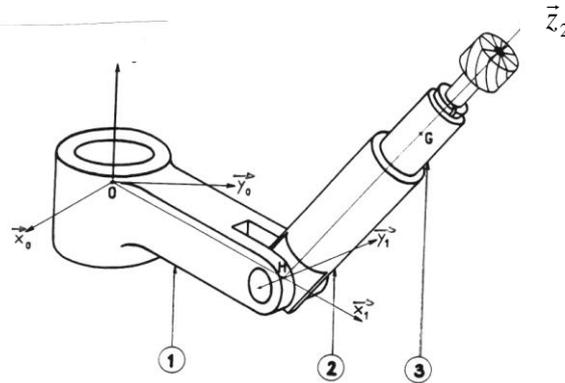
4.4 Porte outil affuteuse :

Le dispositif porte-outil d'une machine d'affûtage est schématisé par un système Σ de trois solides (1, 2, 3).

Le repère terrestre $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti B_0 (non représenté) de la machine. Il est supposé galiléen. $(O; \vec{z}_0)$ est vertical ascendant.

Les caractéristiques des différents solides sont énoncées ci-après :

1: Support tournant :	2: Bras pivotant :	3: Porte-outil :(avec l'outil à affûter tenu par le mandrin.)
<p>Repère lié $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$.</p> <p>Mouvement (1/$R_0$) : rotation autour de $(O; \vec{z}_0)$ commandée par l'actionneur M_{01} monté entre 0 et 1. Orientation de (1/R_0) repérée par $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \alpha$. On désigne par H le point de 1 défini par $O\vec{H} = h \cdot \vec{x}_1$. (h est une constante positive)</p> <p>le moment d'inertie par rapport à $(O; \vec{z}_0)$ est J_1</p>	<p>Repère lié $R_2(H; \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$.</p> <p>Mouvement (2/1) : rotation autour de $(H; \vec{y}_1)$ commandée par l'actionneur M_{12} monté entre 1 et 2. Orientation de (2/1) repérée par : $(\vec{z}_0, \vec{z}_2) = \beta$.</p> <p>la masse est m_2, pour simplifier le centre d'inertie est supposé en H.</p> $[I_{(H,2)}] = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2}$	<p>Repère lié $R_3(G; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$.</p> <p>Mouvement (3/2) rotation autour de $(H; \vec{z}_2)$ et translation de direction $(H; \vec{z}_2)$ (G se déplace sur $(H; \vec{z}_2)$) commandée par l'actionneur M_{23} monté entre 2 et 3.</p> <p>Position de (3/2) repérée par : $(\vec{y}_1, \vec{y}_3) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = \gamma$ et par $H\vec{G} = r \cdot \vec{z}_2$. (r est une fonction du temps)</p> <p>La masse est m_3</p> $[I_{(G,3)}] = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{-, -, \vec{z}_2}$



l'objectif est ici de déterminer le couple C_{12} que devra exercer le moteur M_{12} .

4.5 Machine à vibrer :

Les deux figures suivantes (fig 3.8, 3.9) représentent schématiquement une machine à vibrer des éléments préfabriqués en béton. Un châssis sur roues est solidaire du moule et du stator d'un moteur électrique destiné à générer les vibrations.

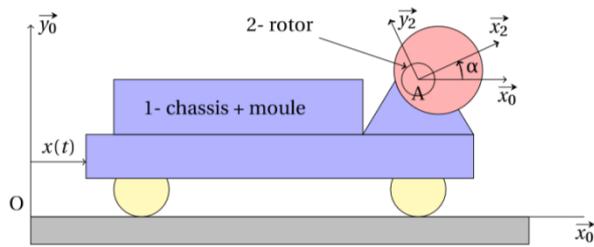


FIGURE 3.8 – Machine à vibrer le béton - modélisation

Données :

L'ensemble 1, de masse M_1 , en translation comprend la plate-forme, le moule, le béton et le stator du moteur électrique. Sa position par rapport au repère R_0 galiléen est définie par $x(t)$. La liaison équivalente par rapport au sol est une glissière de direction \vec{x}_0 .

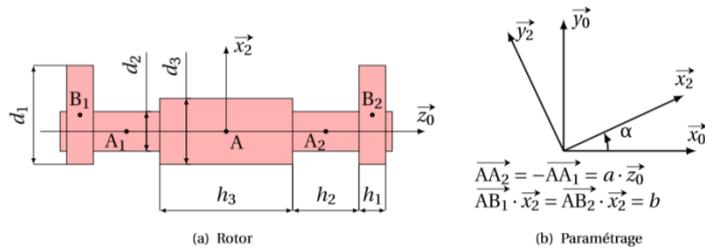


FIGURE 3.9 – Machine à vibrer le béton

L'ensemble 2, de masse M_2 , tournant par rapport à I autour de l'axe $(A; \vec{z}_0)$, comporte le rotor du moteur, son arbre et deux disques excentrés. On note :

- $\omega = \dot{\alpha}$ la vitesse de rotation constante de l'ensemble 2;
- G_2 le centre d'inertie de l'ensemble 2 avec $\overrightarrow{AG_2} = c \cdot \vec{x}_2$;
- La matrice d'inertie de l'ensemble 2 s'écrit en A dans la base $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$:

$$[I_{A,2}] = \begin{bmatrix} I_{Ax} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Az} \end{bmatrix} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

Les roues sont en liaison pivot, sans frottement, par rapport à I . La masse et l'inertie des roues sont négligeables.

Le moteur applique sur le rotor un couple noté : $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{z}_0$.

Le plan $(A; \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ est plan de symétrie du système.

Q1. Déterminer la vitesse et l'accélération du point G_2 , centre de gravité de l'ensemble 2, par rapport au repère R_0 .

Q2. On modélise l'ensemble 2 par :

- un cylindre de diamètre d_3 , de hauteur h_3 et de masse volumique ρ_1 pour le rotor du moteur;
- deux disques centrés respectivement en B_1 et B_2 de diamètre d_1 , de hauteur h_1 de masse volumique ρ_1 ;
- deux arbres cylindriques centrés respectivement en A_1 et A_2 de diamètre d_2 , de hauteur h_2 et de masse volumique ρ_1 reliant le rotor aux disques;
- les trois cylindres sont d'axe \vec{z}_0 .

2a. Justifiez la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble 2.

2b. Déterminer le moment d'inertie de l'ensemble 2 par rapport à l'axe $(A; \vec{z}_0)$, en fonction des h_i , d_i et ρ_i .

Q3. Déterminer $x(t) = f(M_1, M_2, c, \omega, t)$, l'équation du mouvement de l'ensemble $I+2$, par rapport au repère R_0 . On considérera que le moteur électrique tourne à vitesse constante ($\omega = \dot{\alpha} = Cte$) et qu'à l'instant $t=0$, $x(0)=0$. Pour cela :

3a. Tracer le graphe de structure du mécanisme et établir l'inventaire des efforts sur I et 2 .

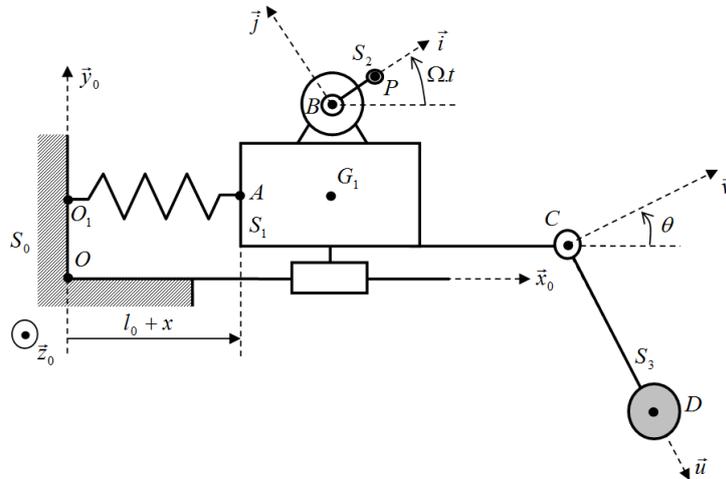
3b. Appliquer le PFD sur l'ensemble $\{I+2\}$.

3c. En déduire l'équation de mouvement. Limiter l'étude aux équations nécessaires pour résoudre le problème posé.

Q4. Déterminer l'expression du moment du couple moteur C_m du stator sur le rotor, en fonction de M_1 , M_2 , g , ω , c et t . On modélise la liaison en A_1 entre le rotor et le châssis par une liaison sphérique et celle en A_2 par une liaison sphère cylindre.

Q5. Déterminer les composantes du torseur des actions transmissibles pour les deux liaisons entre l'ensemble I et l'ensemble 2 en A_1 et A_2 .

4.6 Bâti vibrant :



Le bâti vibrant dont le schéma cinématique est donné ci-dessus est composé :

- Du bâti S_0 supposé galiléen,
- D'un chariot S_1 , de masse M et de centre d'inertie G_1 , en liaison glissière d'axe \vec{x}_0 par rapport au bâti,
- D'un balourd S_2 constitué d'une masse ponctuelle m_2 en P . Le solide S_2 est en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) par rapport au chariot. La rotation du solide S_2 permet d'exciter les vibrations du chariot du fait de l'excentration de la masse. Le balourd tourne à vitesse constante $\Omega \vec{z}_0$,
- D'un pendule S_3 constitué d'une masse m_3 . Le solide S_3 est en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_0) par rapport au chariot,
- Un ressort de raideur k relie le chariot au bâti aux points O_1 et A .

Les caractéristiques géométriques du mécanisme sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OO_1} = c\vec{t}, \quad \overrightarrow{AC} = c\vec{t}, \quad \overrightarrow{AG_1} = c\vec{t}, \quad \overrightarrow{AB} = c\vec{t} \\ \overrightarrow{O_1A} = (l_0 + x)\vec{x}_0 \qquad \overrightarrow{CD} = l\vec{u} \qquad \overrightarrow{BP} = r\vec{i} \end{aligned}$$

1. Isoler S_3 et en déduire une relation entre \ddot{x} et $\ddot{\theta}$.
2. Isoler $\Sigma = \{S_1, S_2, S_3\}$ et en déduire une deuxième relation entre \ddot{x} et $\ddot{\theta}$.
3. Analyser et résoudre le système d'équations obtenu. On supposera que les oscillations du pendule sont petites on négligera les termes d'ordre 2. On posera :

$$\begin{cases} x(t) = A \cdot \cos(\Omega t) \\ \theta(t) = B \cdot \cos(\Omega t) \end{cases}$$

En déduire la longueur l qui permet de compenser les vibrations induites par le balourd.

4.7 Cheville Nao :

Problématique : On se propose de vérifier le dimensionnement du guidage de l'axe de tangage de la cheville du robot ainsi que les effets dynamiques de la rotation des autres axes sur cette articulation.



Figure 1 : dénomination des axes

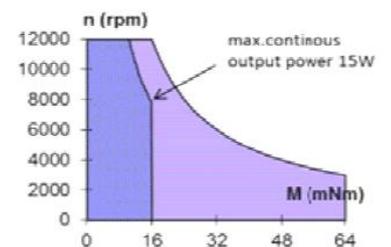
1 Présentation de l'axe de tangage

La motorisation de l'axe de tangage de la cheville du robot Nao est réalisée par :

- un moteur à courant continu,
- un réducteur à 4 engrenages cylindriques (trains simples).

Caractéristiques du moteur (marque Portescap / référence 22NT82 213P1001):

Couple maximum instantané	$C_M = 64 \text{ mNm}$
Couple maximum en continu	$C_{max} = 16 \text{ mNm}$
Couple de friction	$C_{fm} = 1 \text{ mNm}$
Vitesse sans charge	$N_o = 8300 \text{ tr/min}$



Caractéristiques du réducteur :

- Rapport de réduction : $k = \frac{1}{131}$
- Rendement global du réducteur $\eta_r = 0,8$
- L'action de la motorisation sur le tibia 1 (voir Figure 2) est assimilée à un couple dont le moment est noté C_r (l'opposé de ce couple s'exerce aussi par réaction sur le pied 2).

Hypothèses et notation de l'étude suivante :

- le repère fixe est noté $R_o(A; \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$
- le problème admet le plan $(A; \vec{x}_o, \vec{z}_o)$ comme plan de symétrie des actions mécaniques,
- le poids des pièces est négligeable devant celui du robot,
- les liaisons sont à priori parfaites,
- dans le cas des liaisons non parfaites signalées dans la suite de l'énoncé, le coefficient de frottement / adhérence est $f=0,1$.
- Palier de guidage entre le pied et le tibia en polyamide 66 (nylon 66 ou PA66) :
 - Valeurs de matage : $p_p = 7 \text{ MPa}$
 - $(P.V)_{adm} = 0,4 \text{ W/m}^2$

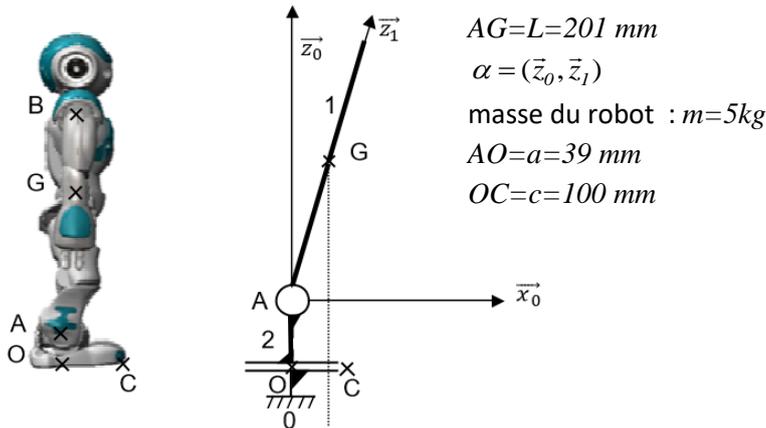


Figure 2 : Paramétrage pour l'angle de tangage

2 Condition d'équilibre global du robot

Q1. Tracer la figure plane illustrant l'angle α .

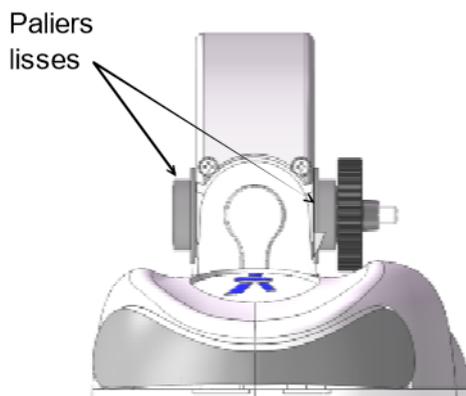
Q2. A la limite du basculement la répartition de pression surfacique entre 0 et 1 se réduit à un contact ponctuel en C. Définir les conditions d'équilibre du robot dans ce cas. Par écriture de la fermeture géométrique, en déduire l'angle maximum α_M à l'équilibre du robot (le blocage de l'articulation est assurée par les frottements et/ou par la motorisation).

Q3. En déduire le couple maximum C_M en A assurant l'équilibre généré par le poids dans cette configuration. On précisera le théorème utilisé.

Q4. Vérifier si la motorisation permet de maintenir la cheville bloquée dans la configuration la plus défavorable (un seul pied en appui et angle maximum d'inclinaison).

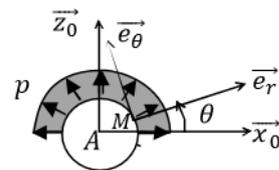
3 Modélisation du guidage par paliers :

Le guidage entre le tibia et le pied est assurée pour l'axe de tangage par 2 paliers lisses assurant au global une liaison pivot.



Dimensions des paliers lisses :

- longueur : $L_p=4 \text{ mm}$
- diamètre : $D=17 \text{ mm}$



Répartition de pression et paramétrage du point M.

Figure 3 : Vue de l'avant du pied gauche (le tibia sur lequel s'appuient les paliers n'est pas visible)

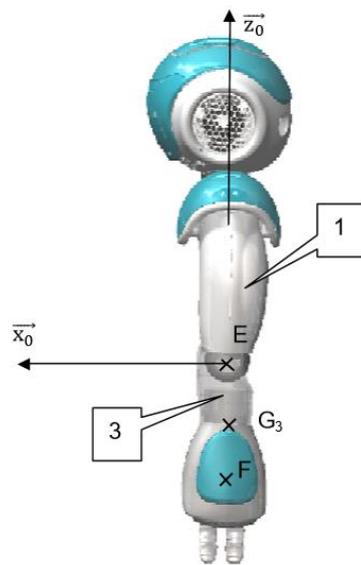
Q5. Par application du théorème de la résultante statique au tibia 1 (assimilé au corps du robot dans cette étude) , déterminer la résultante de l'action de 2 sur 1 (on supposera le robot en équilibre sur un seul pied).

Q6. En déduire si le palier est correctement dimensionné (on supposera le centre de gravité à la verticale d'un des 2 paliers : cas le plus défavorable).

Q7. En supposant la répartition de pression uniforme au contact, déterminer le couple C_f dû au frottement entre 2 et 1. Comparer ce couple à la friction de la motorisation en sortie de réducteur $C_{Afm} = 0,1 N.m$. En déduire l'angle α_0 assurant l'équilibre de la cheville sans sollicitation de la motorisation.

4 Etude dynamique

Afin d'optimiser l'autonomie du robot, on souhaite limiter l'alimentation de la motorisation. Dans ce sens, les frottements permettent de maintenir le robot dans la position où il se trouve. Dans le cas, où le robot actionne un de ses coudes le robot est susceptible d'être déséquilibré. On souhaite donc déterminer quelle est l'accélération maximale des coudes permettant d'éviter la mise en rotation des articulations de la cheville et savoir si le robot est capable de générer une telle accélération.



Notation :

$$AE = H = 280 \text{ mm}$$

$$\vec{EF} = 2.e.\vec{x}_2$$

$$e = 35 \text{ mm}$$

$$m_3 = 0.24 \text{ kg}$$

$$I_{Ey_3} = 3.2 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

$$\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$$

On assimile l'avant bras au segment de droite EF de masse m_3 , d'inertie I_{Ey_3} (autour de l'axe $E; \vec{y}_0$) et de centre de gravité G_3 tel que $EG_3 = e$.

Q8. Déterminer la vitesse et l'accélération du point G_3 du solide 3 par rapport à 1.

Q9. Déterminer le moment cinétique du robot $\vec{\sigma}_{E,3/1}$ ainsi que le moment dynamique $\vec{\delta}_{E,3/1}$ lorsque le bras tourne autour de l'axe de rotation $E; \vec{y}_0$

Q10. Déterminer l'expression du moment dynamique $\vec{\delta}_{A,3/1}$ en fonction de $\omega_{3/1}$

Déterminer la vitesse uniforme maximale ω_M du moteur pilotant le bras 3 du robot pour que la cheville reste à l'équilibre sous l'action seule des frottements de la question Q7 dans toutes les positions du bras et pour un centre de gravité parfaitement centré sur l'articulation en A. La vitesse maximale du coude étant 60 tr.min^{-1} , conclure sur les conditions de fonctionnement de l'articulation du coude sans motorisation de la cheville.