AUTOMATIQUE : TRANSFORMEE DE LAPLACE

<u>But</u> : En automatique on utilise cette méthode de calcul pour résoudre des équations différentielles sans connaître les méthodes mathématiques usuelles

1)DEFINITION :

On appelle transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, supposée nulle pour t<0, la fonction $F(p)$ définie par :

$$\boxed{L(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = F(p)}$$

$L(f(t))$ se lit « Laplacien de la fonction $f(t)$ ».

2) PRINCIPALES PROPRIETES :

Transformée d'une dérivée :

$$L\left(\frac{d\ f(t)}{dt}\right) = p \cdot F(p) - f(0^+)$$

$$L\left(\frac{d^2\ f(t)}{dt^2}\right) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0^+) - \frac{d\ f(0^+)}{dt}$$

Nota : $f(0^+)$ et $\frac{d\ f(0^+)}{dt}$ sont les conditions initiales associées à la fonction $f(t)$. Lorsque les conditions initiales sont nulles on parle de conditions de Heaviside alors :

$$L\left(\frac{d\ f(t)}{dt}\right) = p \cdot F(p) \quad \text{et} \quad L\left(\frac{d^2\ f(t)}{dt^2}\right) = p^2 \cdot F(p)$$

Transformée d'une intégrale :

$$F(p) = L(f(t)) \text{ si } f(t) = \frac{dg(t)}{dt},\ L\left(\frac{dg(t)}{dt}\right) = p \cdot G(p) - g(0^+)$$

$$G(p) = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$$

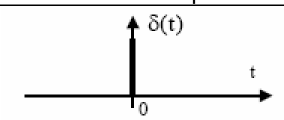
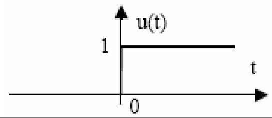
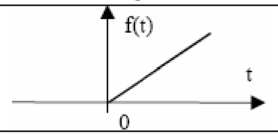
Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p \cdot F(p)$$

Théorème du retard :

$$L(f(t-\tau)) = e^{-\tau \cdot p} \cdot F(p)$$

3) LES TRANSFORMEES DE LAPLACE DES ENTREES TYPE :

Entrée type	Caractéristique	Transformée de Laplace
Impulsion de Dirac : $e(t) = \delta(t)$		$L(e(t)) = E(p) = 1$
Echelon unité : $e(t) = u(t)$		$L(e(t)) = E(p) = \frac{1}{p}$
Rampe : $e(t) = A.t.u(t)$		$L(e(t)) = E(p) = \frac{A}{p^2}$

4) TABLEAU DE CONVERSION DE TRANSFORMEES USUELLES :

Fonctions temporelles (nulles pour t<0s)		Transformées de Laplace	Fonctions temporelles (nulles pour t<0s)		Transformées de Laplace
$A \cdot t^n$	$\xrightarrow{L(f(t))}$ $\xleftarrow[L^{-1}(F(p))]{}$	$A \cdot \frac{n!}{p^{n+1}}$	$\sin(\omega \cdot t)$	$\xrightarrow{L(f(t))}$ $\xleftarrow[L^{-1}(F(p))]{}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-a \cdot t}$	$\xrightarrow{L(f(t))}$ $\xleftarrow[L^{-1}(F(p))]{}$	$\frac{1}{p+a}$	$\cos(\omega \cdot t)$	$\xrightarrow{L(f(t))}$ $\xleftarrow[L^{-1}(F(p))]{}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$e^{a \cdot t} \cdot t^n$	$\xrightarrow{L(f(t))}$ $\xleftarrow[L^{-1}(F(p))]{}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$\xrightarrow{L(f(t))}$ $\xleftarrow[L^{-1}(F(p))]{}$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{t}{\tau^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\xrightarrow{L(f(t))}$ $\xleftarrow[L^{-1}(F(p))]{}$	$\frac{1}{(1+\tau \cdot p)^2}$	$e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$\xrightarrow{L(f(t))}$ $\xleftarrow[L^{-1}(F(p))]{}$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$