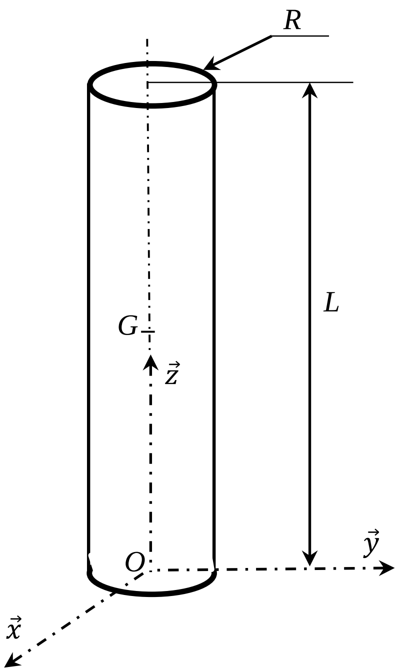
Détermination numérique (Inventor®) de la matrice d'inertie d'un solide

I. Etude du comportement du logiciel préalable à la recherche d'un opérateur d'inertie :

Cas d'un cylindre plein en acier ($\rho = 7{,}85\ kg \cdot dm^{-3}$) d'axe de révolution $(O;\vec{z})$ de rayon R=*10 mm* et de longueur L= *400 mm*.

Détermination par le calcul :



On donne la forme de l'opérateur d'inertie en G du cylindre :

L'opérateur d'inertie $\left[I_{G,cyl}\right] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$

Avec $A = m \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12}\right)$ et $C = m \cdot \frac{R^2}{2}$

Q1. On demande de calculer A et C.

On donne la forme de l'opérateur d'inertie en O du cylindre :

L'opérateur d'inertie $\left[I_{O,cyl}\right] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$

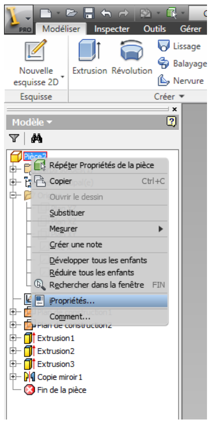
Avec $A = m \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{3}\right)$ et $C = m \cdot \frac{R^2}{2}$

Q2. On demande de calculer la nouvelle valeur de A

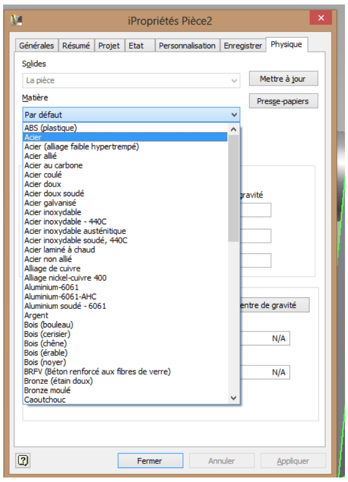
Vérification numérique :

Lancer le logiciel Inventor® et charger le fichier cylindre_acier_plein.ipt.

Le cylindre est réalisé en **acier**, il est nécessaire de définir le matériau dans le logiciel : ceci se réalise en suivant la procédure ci-après : clic droit sur le nom de la pièce dans l'arborescence crée dans la fenêtre de gauche de l'interface graphique, puis sélectionner le sous menu *iPropriétés*



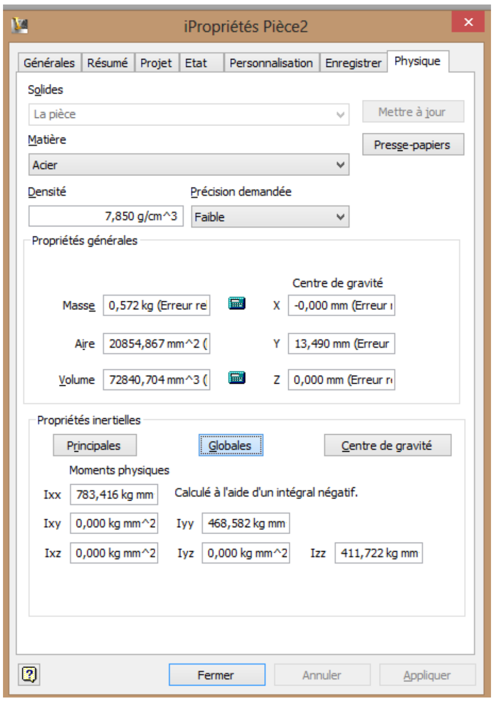
Choisir l'acier dans le menu matériaux de l'onglet *Physique*



Matrice d'inertie :

Il suffit de lire les résultats dans la partie basse de la fenêtre : "*Propriétés inertielles*"

- Les propriétés inertielles **__Principales__** correspondent à la matrice d'inertie au centre de gravité et dans la base principale d'inertie (Rx, Ry, Rz sont données pour définir l'orientation de la base principale d'inertie par rapport à la base de construction du solide).
- Les propriétés inertielles **__Globales__** correspondent à la matrice d'inertie **au point initial** de construction dans la base de construction.
- Les propriétés inertielles au **__Centre de gravité__** correspondent à la matrice d'inertie au centre de gravité et dans la base de construction du solide.

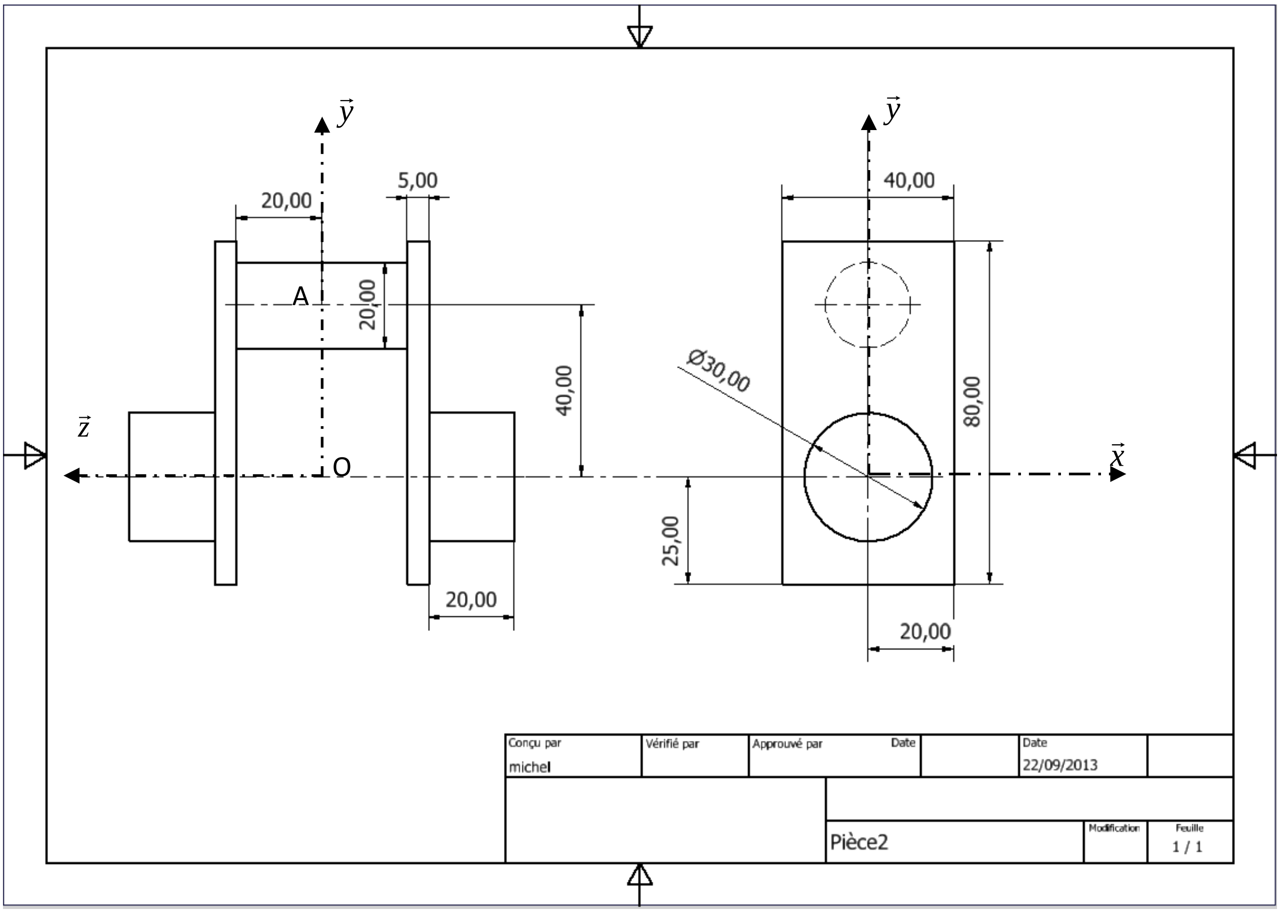


Q3. Vérifier les valeurs trouvées aux questions Q1 et Q2.

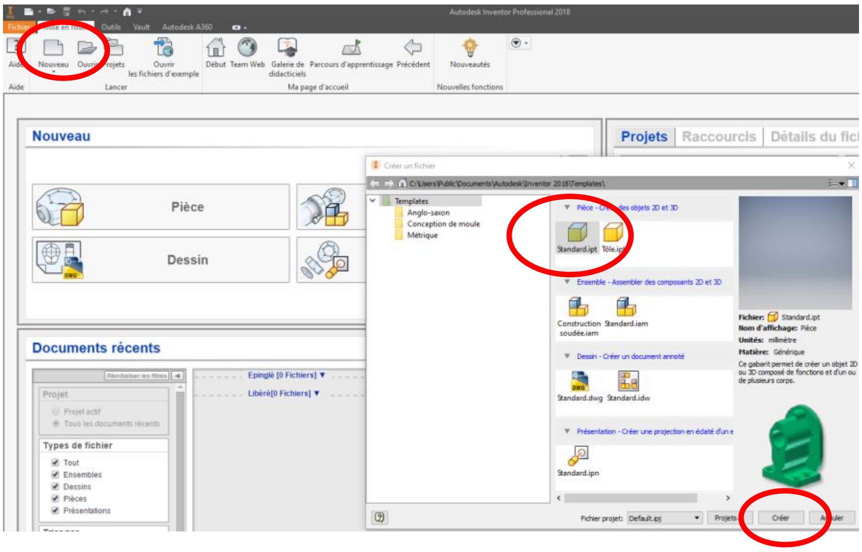
II. Détermination numérique de la matrice d'inertie d'un vilebrequin :

L'objet de cet exercice est de mettre en œuvre la démarche permettant de définir les caractéristiques de géométrie des masses d'un solide avec le logiciel Inventor®.

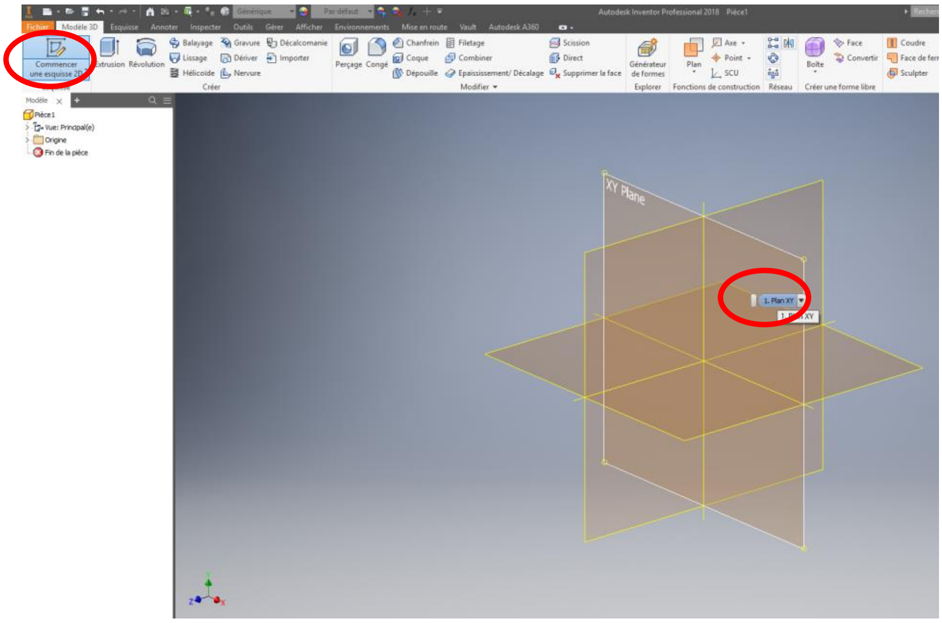
Le solide choisi pour illustrer l'exemple est un vilebrequin dont le dessin de définition est donné ci-dessous :



Lancer Inventor et créer une nouvelle étude :
Nouveau, Standard.ipt
Puis *Créer*



A : création du vilebrequin

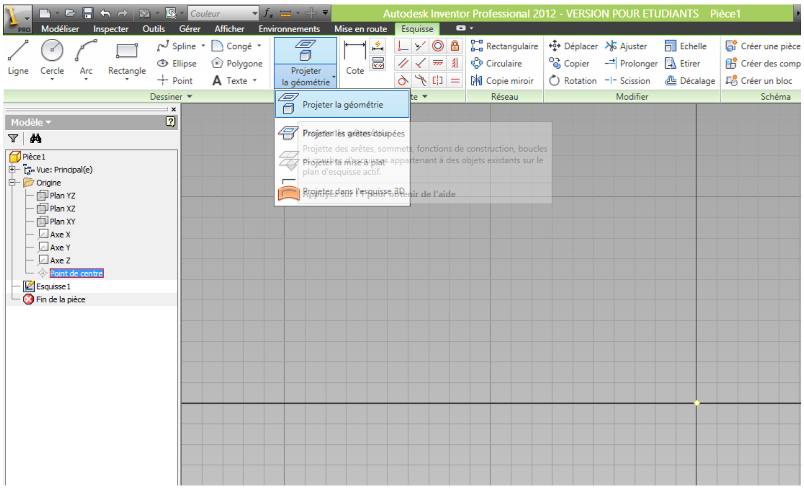


Commencer par créer une *esquisse 2D* puis faire un clic dans le plan XY

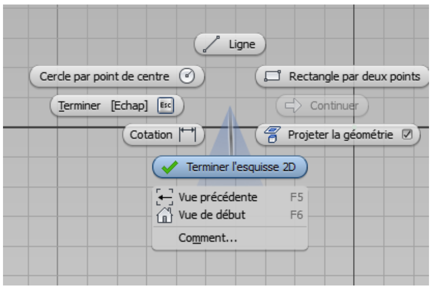
1. Origine de la matrice d'inertie.

Créer **l'origine de votre repère qui correspondra au point où sera calculée la matrice d'inertie** du vilebrequin :

Point de centre puis *Projeter la géométrie*



le point étant créé, fermer l'esquisse : clic droit : *Terminer l'esquisse 2D*

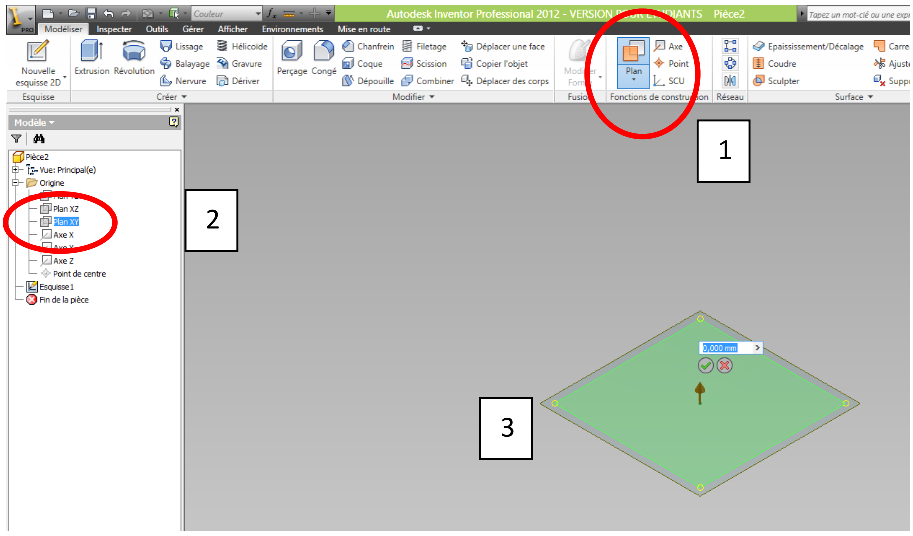


2. Création de la plaque de droite :

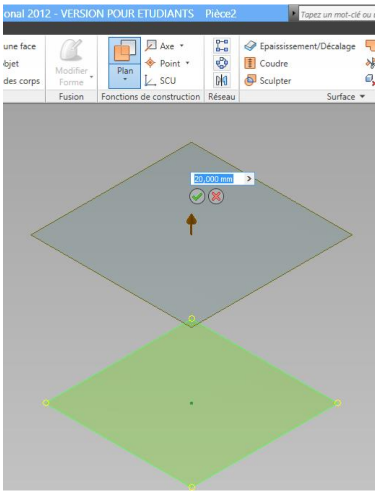
Créer un plan XY :

Ordonnée de la normale = 0

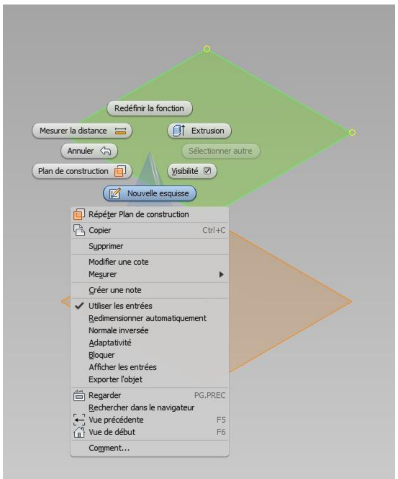
(Étape 3 : clic gauche sur le point projeté précédemment, puis clic gauche sur la coche verte)



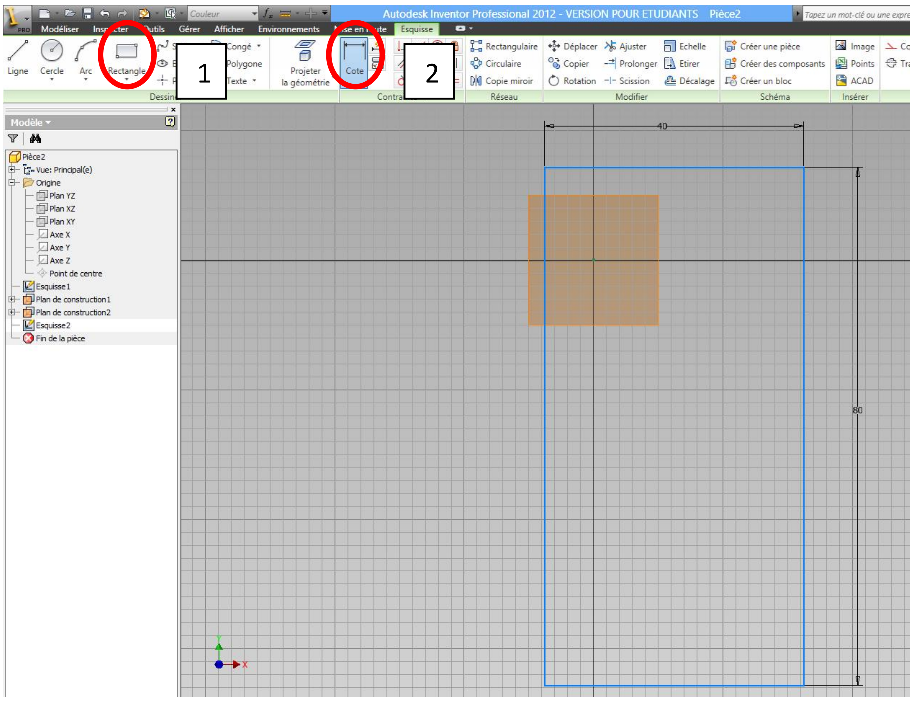
Créer un nouveau plan XY distant de 20 mm du premier :



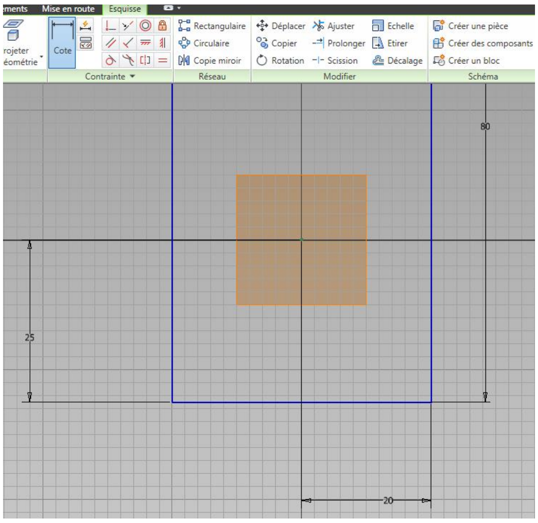
Créer une nouvelle esquisse sur ce plan servant de base à la création de la plaque de droite : clic droit, puis *Nouvelle esquisse*



Création d'un rectangle de 40 x 80 mm



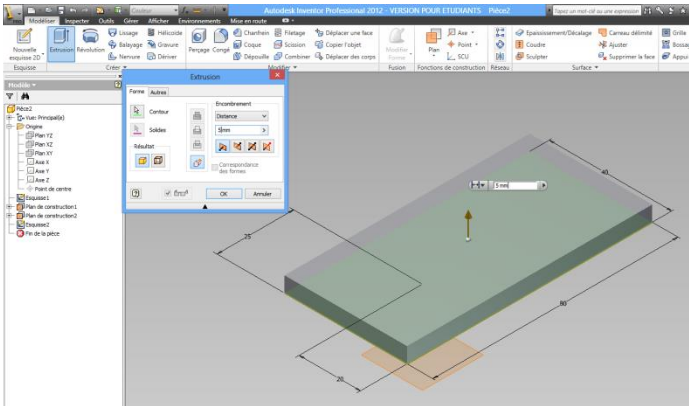
Localisation du rectangle :



Pour positionner convenablement le rectangle il est nécessaire:

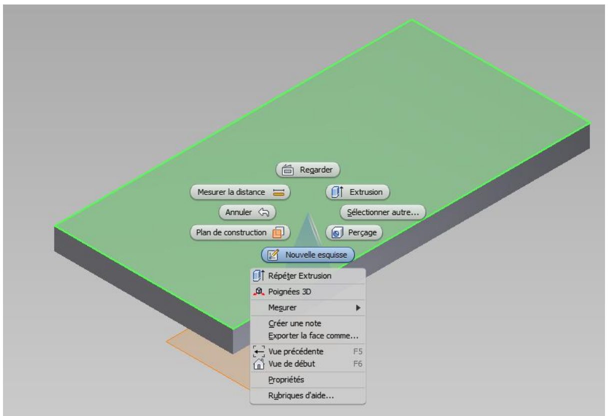
- d'établir une cote de 25mm entre le coté horizontal inférieur et le point de centre
- d'établir une cote de 20 entre un des deux côtés latéraux et le point de centre.

Terminer l'esquisse.



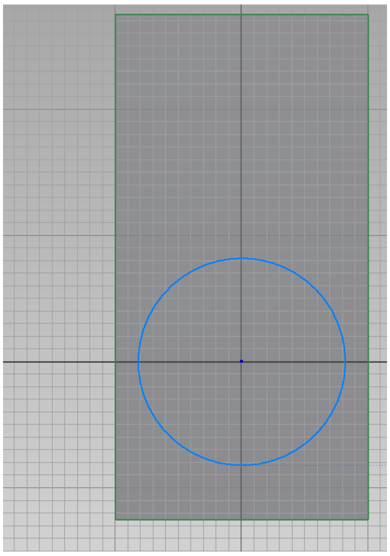
Mise en volume de la plaque :
Extruder la plaque sur 5 mm

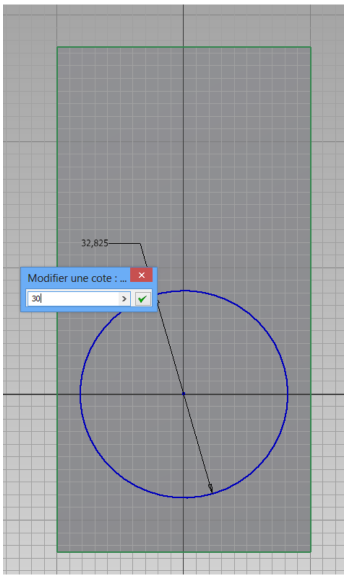
3 Création du cylindre inférieur droit :



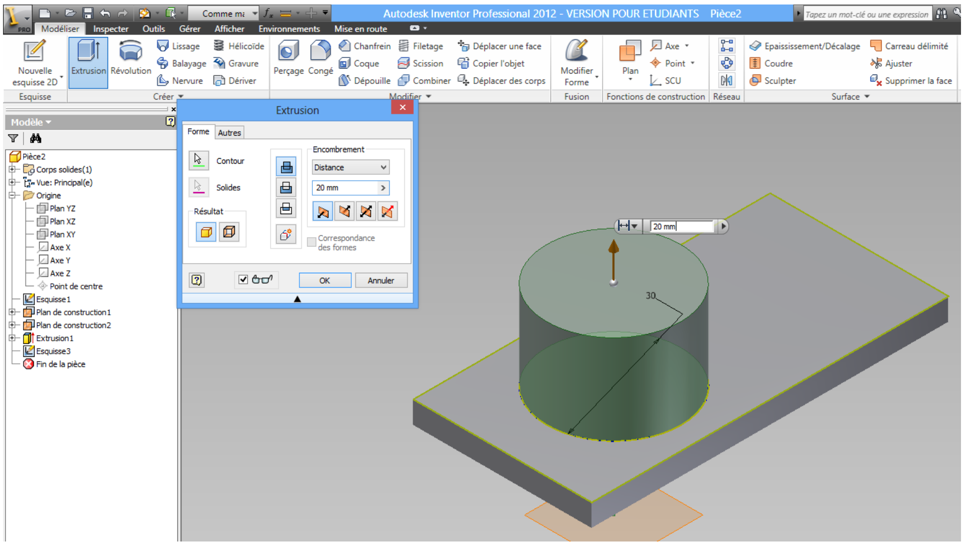
Création d'une esquisse sur la **face supérieure de la plaque**(face avant) : clic droit sur la face supérieure, puis choisir *Nouvelle esquisse*

Créer un cercle de centre le point origine de l'esquisse et de diamètre 30 mm

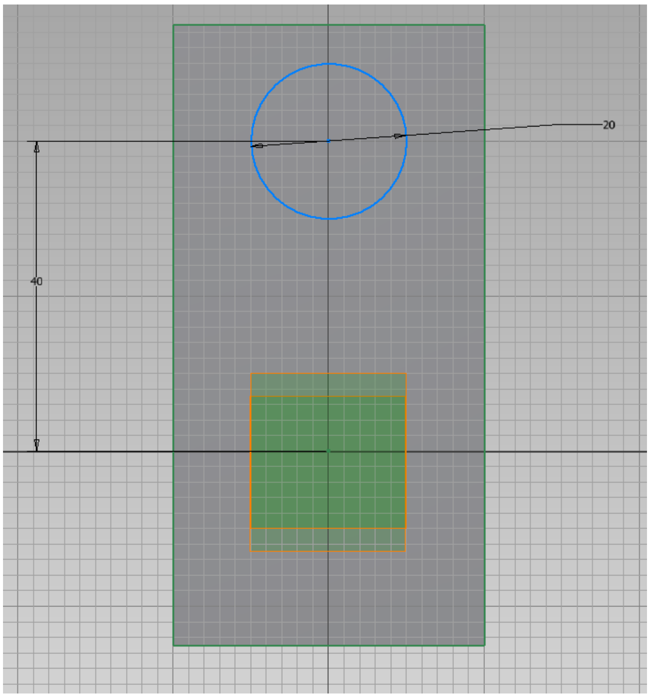




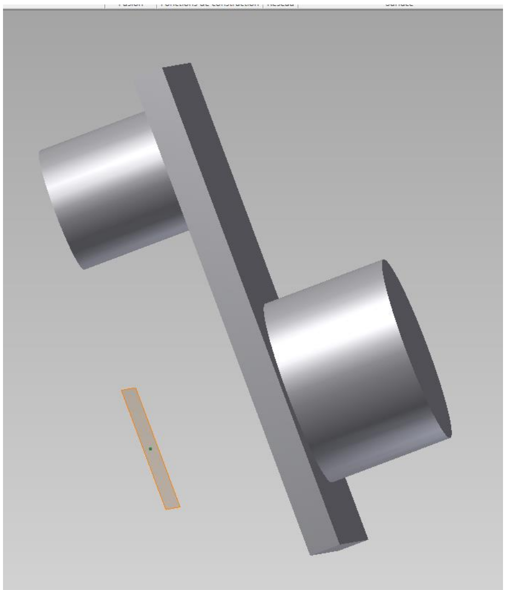
Terminer l'esquisse puis créer le cylindre en extrudant le cercle sur une hauteur de 20 mm



4 Création du demi-cylindre supérieur.



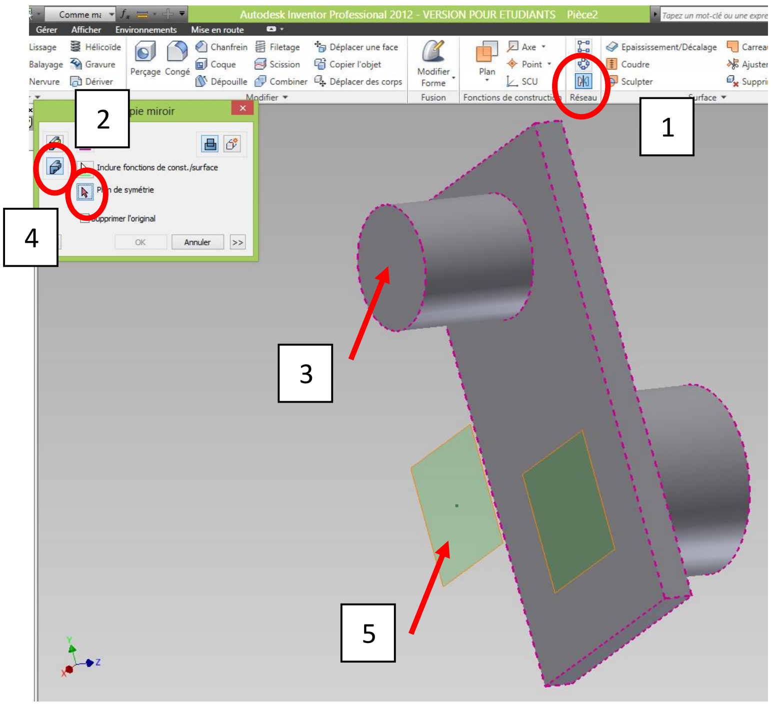
Créer une esquisse sur la **face arrière** de la plaque pour y définir la base du demi-cylindre dont le centre est éloigné de 40mm avec le centre de l'esquisse et dont le diamètre est de 20 mm



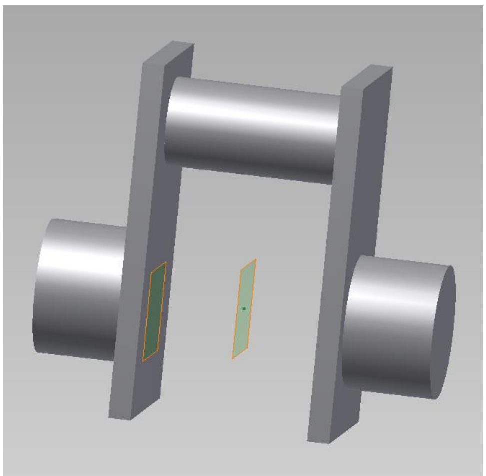
Terminer l'esquisse et extruder le cercle sur une hauteur de 20 mm

5 Création de la moitié manquante du vilebrequin par symétrie par rapport au premier plan XY créé :

Choisir la fonction "*Copie miroir*" puis sélectionner le solide à dupliquer (3) et le plan de symétrie (4)



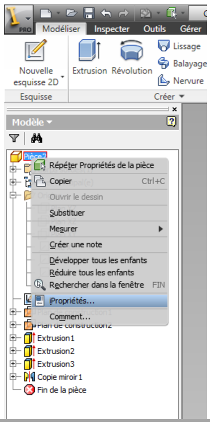
Résultat final :



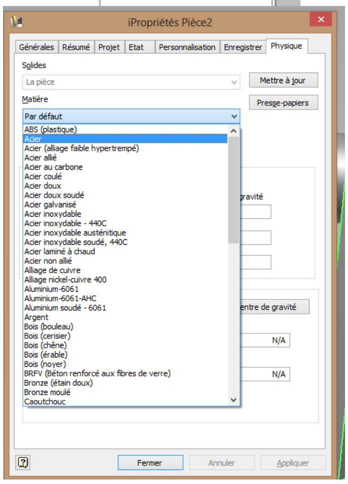
B : Calcul de la matrice d'inertie

1 Choix du matériau :

Le vilebrequin est réalisé en **acier**, il est nécessaire de définir le matériau dans le logiciel : ceci se réalise en suivant la procédure ci-après : clic droit sur le nom de la pièce dans l'arborescence crée dans la fenêtre de gauche de l'interface graphique, puis sélectionner le sous menu *iPropriétés*

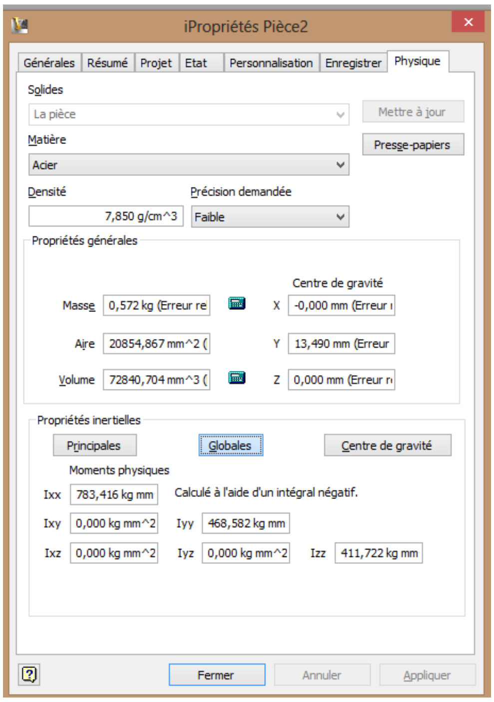


Choisir l'acier dans le menu matériaux de l'onglet *Physique*



2 Matrice d'inertie :

Il suffit de lire les résultats dans la partie basse de la fenêtre : "*Propriétés inertielles*"



- Les propriétés inertielles **Principales** correspondent à la matrice d'inertie au centre de gravité et dans la base principale d'inertie (Rx, Ry, Rz sont données pour définir l'orientation de la base principale d'inertie par rapport à la base de construction du solide).
- Les propriétés inertielles **Globales** correspondent à la matrice d'inertie **au point initial** de construction dans la base de construction.
- Les propriétés inertielles au **Centre de gravité** correspondent à la matrice d'inertie au centre de gravité et dans la base de construction du solide.

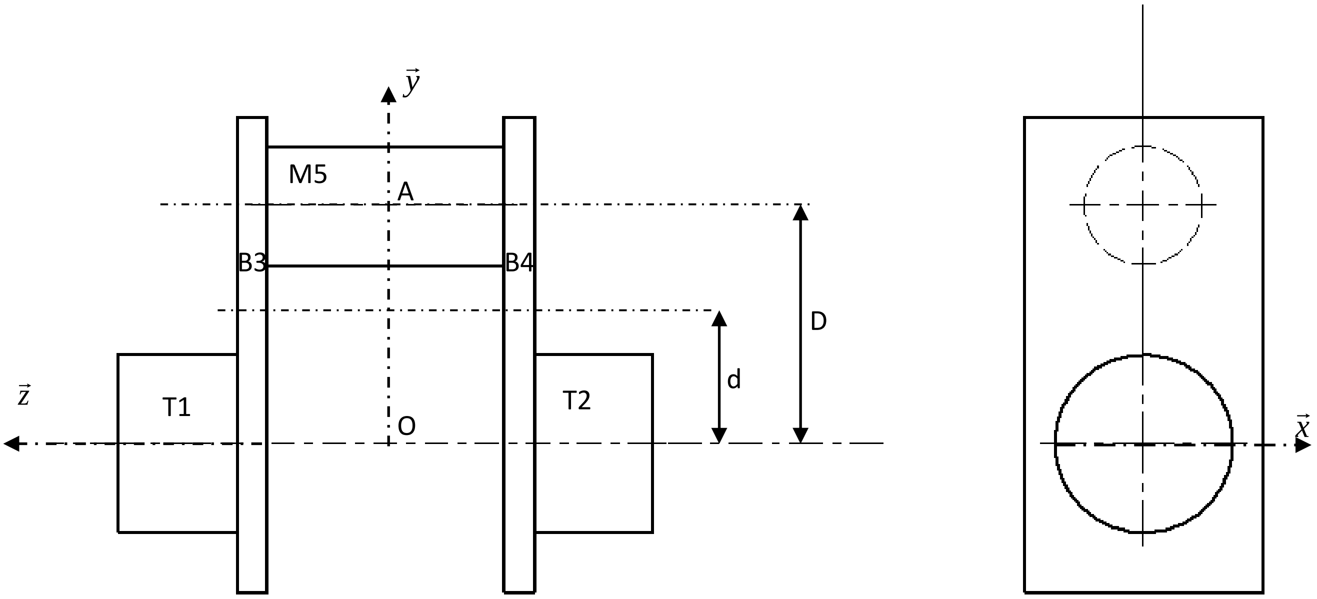
C : Pour aller plus loin :

On considère un coude de vilebrequin formé de 2 tourillons T1 et T2, de 2 bras B3 et B4, et d'un maneton M5 (voir schéma ci-dessous).Les masses respectives de ces éléments sont notées m1, m2, m3, m4 et m5. Leurs centres d'inertie respectifs sont notés G1, G2, G3, G4 et G5.

On suppose que :

- Les tourillons et le maneton sont des cylindres parfaits de section circulaire.
- Les bras sont des parallélépipèdes supposés parfaits.
- Les dimensions, points et axes sont précisés sur le schéma.

On note E l'ensemble {T1 ,T2, B3, B4, M5}.



Pour chacune des propositions ci-dessous :

- vous préciserez si elle est vraie, fausse,
- vous justifierez toutes les propositions vraies

1. La matrice d'inertie de l'ensemble E au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est de la forme :

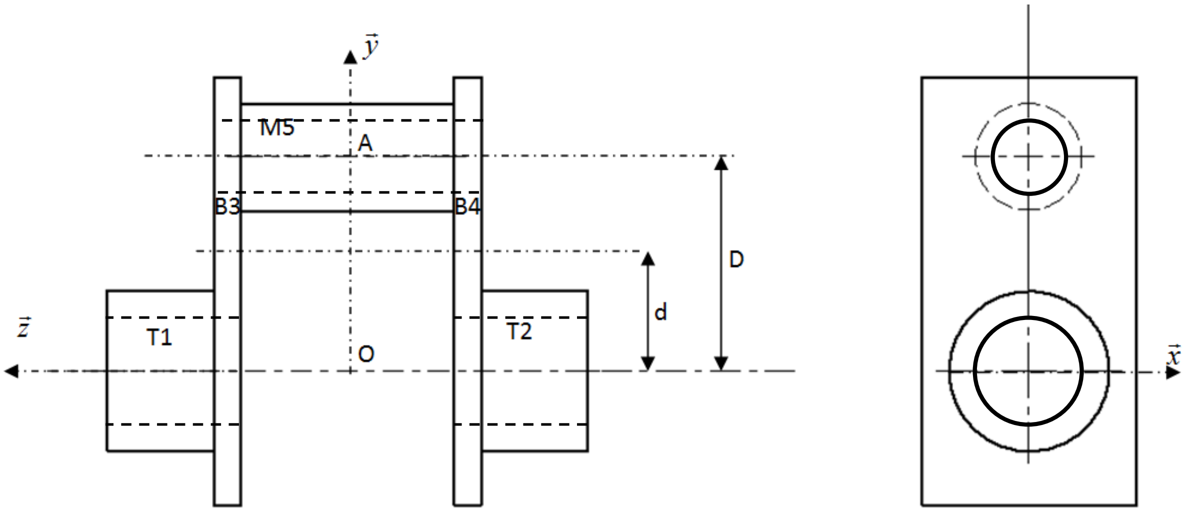
$$[I_{O,E}]=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

2. Le maneton M5 étant un cylindre de rayon R5, de hauteur h5, de masse m5, de centre d'inertie noté G5, son moment d'inertie par rapport à l'axe $(G_5,\vec{z})$ est : $I_{M5}(G_5,\vec{z})=\frac{m_5}{12}\cdot(3\cdot R_5^2+h_5^2)$
3. L'axe $(G_5,\vec{z})$ est axe principal d'inertie pour l'ensemble E.
4. Le moment d'inertie du maneton M5 par rapport à l'axe $(O,\vec{z})$ est :

$$I_{M5}(O,\vec{z})=\frac{m_5\cdot R_5^2}{2}+m_5\cdot D^2$$

5. Le centre d'inertie de l'ensemble E est le point G tel que : $\overrightarrow{OG} = \frac{m_3 \cdot d + m_4 \cdot d + m_5 \cdot D}{m_3 + m_4 + m_5} \cdot \vec{y}$

On considère maintenant un coude « allégé », où les tourillons, les bras et le maneton ont été alésés (voir schéma ci-dessous). On suppose les alésages parfaits, de rayons r1 et r2 pour les bras, et de rayon r5 pour le maneton.



1. Le centre d'inertie reste inchangé pour chacun des solides.

2. La forme de la matrice d'inertie du coude allégé au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est modifiée par rapport à celle du coude « plein ».

3. Le moment d'inertie du tourillon T1 par rapport à l'axe $(G_1, \vec{z})$ est maintenant : $I_{T1}(G_1; \vec{z}) = \frac{m_1}{2} \cdot (R_1^2 - r_1^2)$