

8- SLCI modèles de comportement

Contenu

8.1 Etude de la gouverne de profondeur d'un airbus :	3
I Présentation :	3
II Travail demandé :	3
8.2 Réducteur :	4
I Présentation : Mise en équation de la fonction de transfert.	4
II Travail demandé :	4
8.3 Réseau passif R1, R2, C.	5
I Présentation :	5
II Travail demandé :	5
8.4 Système d'impression :	6
I Présentation :	6
II Travail demandé :	7
8.5 Second ordre : Application 1	8
I Présentation :	8
II Travail demandé :	8
8.6 Second ordre : Application 2	8
I Présentation :	8
II Travail demandé :	8
III Annexes :	8
8.7 Robot :	9
I Présentation :	9
II Travail demandé :	9
1) Modélisation du moteur chargé.	9
2) Asservissement de position.	10
8.8 Motoréducteur :	11
I Présentation :	11
II Travail demandé :	11
8.9 Amortisseur automobile :	13
I Principe :	13
II Travail demandé :	13
8.10 Asservissement d'une unité dentaire :	14
I Présentation :	14
II Travail demandé :	15

8.11 Bode initiation :	15
I diagramme de Bode d'un premier ordre :	15
II Tracés des diagrammes de Bode d'une fonction de transfert du 2 nd ordre à pôles réels $a \geq 1$...	16
8.12 Etude de la motorisation de la direction d'un chariot filoguidé :	19
I Présentation :	19
II Travail demandé :	19
Document réponse à la question Q4.2.....	20
8.13 Masse-ressort études temporelle et fréquentielle :	21
I Présentation :	21
II Travail demandé :	21
8.14 Étude de la motorisation d'un robot d'exploration de la planète Mars :	22
I Présentation :	22
II travail demandé :	22
Feuille réponse dédiée à la question Q6.	24

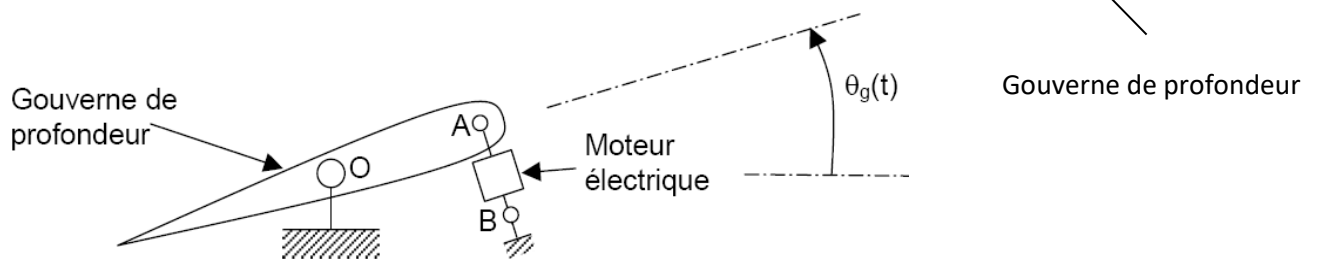
8.1 Etude de la gouverne de profondeur d'un airbus :

I Présentation :

On s'intéresse à la commande asservie de la gouverne de profondeur d'un avion de ligne long courrier de type Airbus A-380. La gouverne de profondeur de cet avion est la petite aile située à l'arrière, qui permet au pilote de cabrer ou piquer le nez de l'avion.



Le système mécanique est le suivant :



Le pilote donne une consigne d'angle $\theta_p(t)$ par l'intermédiaire du manche de pilotage. Si l'angle de la gouverne de profondeur $\theta_g(t)$ est différent de $\theta_p(t)$, le moteur électrique reçoit en entrée une tension $u_M(t)$, et il se met à tourner d'un angle $\theta_M(t)$, ce qui provoque un allongement de la distance (AB), inclinant la gouverne de profondeur, jusqu'à ce que $\theta_g(t)$ tende vers $\theta_p(t)$. Le fonctionnement du moteur est régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d\theta_M(t)}{dt} + 10 \cdot \theta_M(t) = 20 \cdot u_M(t)$$

II Travail demandé :

Q1. Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\theta_M(p)}{U_M(p)}$.

Q2. Déterminer le type et les paramètres caractéristiques de $H(p)$.

Q3. Calculer $\theta_M(t)$ pour une entrée en échelon unitaire $u_M(t)$.

Q4. Tracer, sur un même graphique, $u_M(t)$ et $\theta_M(t)$ en précisant les valeurs particulières des courbes.

8.2 Réducteur :

I Présentation : Mise en équation de la fonction de transfert.

On considère un réducteur de rendement η dont le schéma de principe est donné à la figure 1.

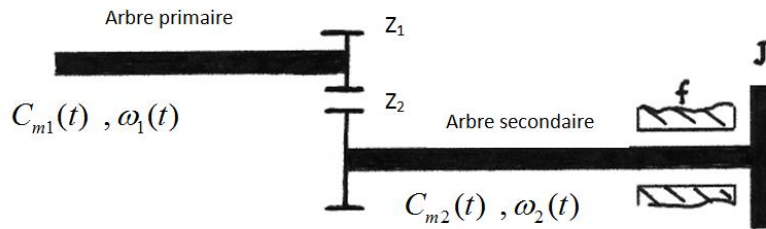


Figure 1 : schéma de principe du réducteur

Le rapport de réduction de ce réducteur est noté r . Il est défini comme étant le rapport de la vitesse angulaire $\omega_2(t)$ de l'arbre secondaire sur la vitesse angulaire $\omega_1(t)$ de l'arbre primaire :

$$r = \frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)}.$$

D'autre part dans le cas de ce réducteur à engrenage r se calcule de la manière suivante :

$$r = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

Avec z_1 et z_2 respectivement le nombre de dents de l'arbre primaire et de l'arbre secondaire.

$C_{m1}(t)$ et $C_{m2}(t)$ représentent respectivement les couples présents sur l'arbre primaire et sur l'arbre secondaire. L'arbre primaire entraîne l'arbre secondaire.

II Travail demandé :

Q1. Donner l'expression des puissances instantanées $P_1(t)$ et $P_2(t)$, respectivement appliquées aux arbres primaire et secondaire.

Q2. Exprimer le rapport $\eta = \frac{P_2(t)}{P_1(t)}$ en fonction de $C_{m1}(t)$, $\omega_1(t)$ et de $C_{m2}(t)$, $\omega_2(t)$

Q3. En déduire l'expression de $C_{m2}(t)$ en fonction de $C_{m1}(t)$ de η et de r .

Pour les conditions de Heaviside passer l'équation obtenue dans le domaine de Laplace.

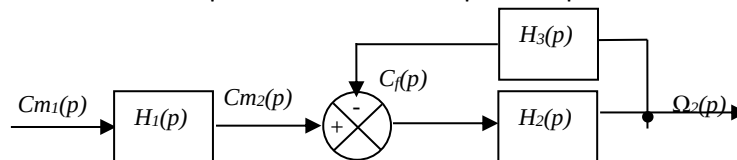
Q4. Le moment d'inertie de toutes les pièces, ramené sur l'arbre secondaire est J .

- Le moment de frottement est : $C_f(t) = f \cdot \omega_2(t)$ (1)
- L'étude dynamique de l'arbre 2 donne la relation :

$$C_{m2}(t) - C_f(t) = J \cdot \frac{d\omega_2(t)}{dt} \quad (2)$$

Pour les conditions de Heaviside passer les équations (1) et (2) dans le domaine de Laplace.

Reproduire et compléter le schéma blocs ci-dessous, en identifiant $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$, à l'aide des équations symboliques obtenues et de l'équation obtenue à la question précédente.



Q5. Déterminer l'expression de la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Omega_2(p)}{C_{m1}(p)}$ et donner les expressions de la constante de temps et du gain statique du système. Effectuer l'Application Numérique avec :

$$J = 8.10^{-3} \text{ kg.m}^2 ; f = 0,01 \text{ N.m.s} ; \eta = 0,9 ; r = 1/4.$$

Q6. Donner l'expression de la vitesse de régime permanent $\omega_2(\infty)$ à vide, si l'entrée est égale à :

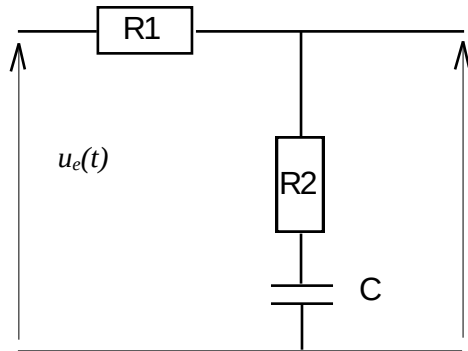
$$C_{m1}(t) = 0,1.u(t) \quad [\text{N.m}]$$

Q7. Donner le temps de réponse du système à 5% (temps au bout duquel le régime permanent est atteint à 5% près).

8.3 Réseau passif R1, R2, C.

I Présentation :

On donne le circuit électrique ci-contre :



On donne les équations suivantes :

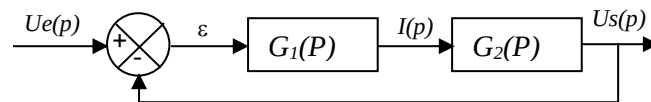
- $u_{R1}(t) = R1 \cdot i(t),$
- $u_{R2}(t) = R2 \cdot i(t),$
- $u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt,$
- $u_e(t) = u_{R1}(t) + u_{R2}(t) + u_C(t),$
- $u_s(t) = u_{R2}(t) + u_C(t)$

II Travail demandé :

Q1. Pour les conditions de Heaviside, écrire les images de ces équations dans le domaine de Laplace.

Q2. Exprimer la fonction transfert $H_1(p) = \frac{U_s(p)}{U_e(p)}$

On précise que le système peut se mettre sous la forme du schéma bloc suivant :



Q3. Exprimer $G1(p)$ et $G2(p)$ en fonction $R1, R2, C$ et p

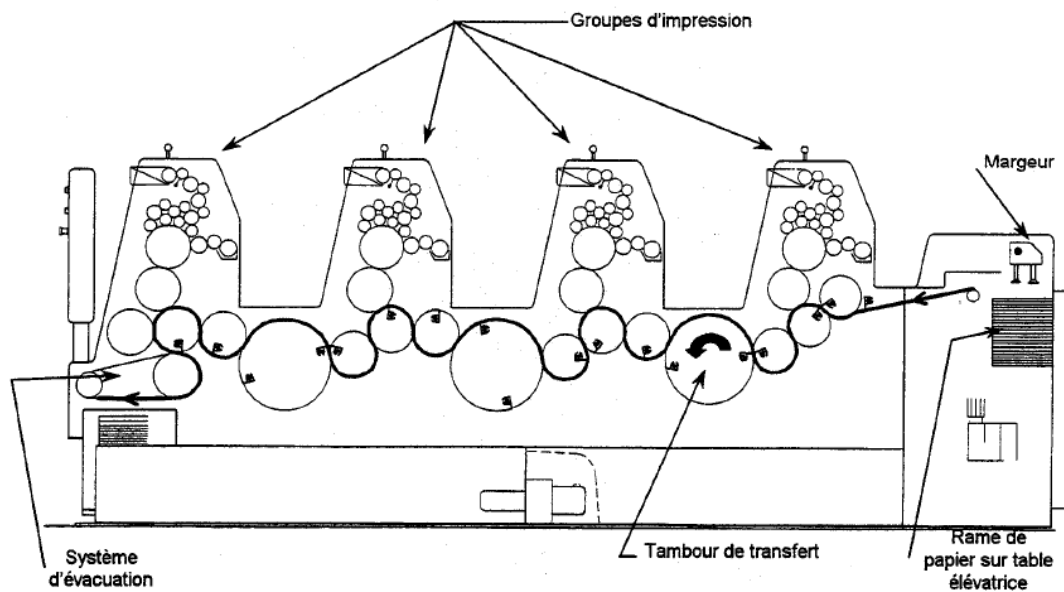
Q4. Donner l'expression numérique de $H_1(p)$. On donne $\tau_1 = R2.C = 1 \text{ ms}$; $\tau_2 = (R1+R2).C = 5 \text{ ms}$

A l'instant $t = 0 \text{ s}$, on applique au réseau un échelon de tension de 10 V ($u_e(t)=10.u(t)$)

Q5. En appliquant les théorèmes aux valeurs limites, calculer les valeurs initiale et finale de $U_s(t)$.

8.4 Système d'impression :

I Présentation : On s'intéresse à un système d'impression dont le schéma ci-dessous indique le trajet du papier.



Trajet du papier

Asservissement de vitesse du moteur à courant continu :

On souhaite pouvoir maintenir la cadence d'impression quelles que soient les perturbations. On cherche donc à asservir en vitesse la chaîne de puissance de la presse. La chaîne de puissance est composée d'un moteur à courant continu, d'un variateur et de trains d'engrenages. Dans l'étude suivante, le variateur et les trains d'engrenages ne sont pas pris en compte. L'objectif de l'étude est la vérification des performances du moteur.

Le moteur principal du système est un moteur de la société Leroy Somer type MS1322M dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Puissance Nominale	Vitesse Nominale	Couple Nominal	Tension Nominale	Intensité Nominale	Résistance d'induit
12 kW	2320 tr/min	49 N.m	460 V	25,9 A	1,32 Ω

L'étude classique du moteur à courant continu commandé par l'induit donne les équations suivantes :

- Equation électrique : $u(t) = R \cdot i(t) + e(t)$ (L'inductance d'induit est négligée)
- Equation mécanique : $C_m(t) - C_r(t) = J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt}$ avec $J = 26 \text{ Kg.m}^2$.
- Equations de couplage : $C_m(t) = K \cdot i(t)$ et $e(t) = K \cdot \omega(t)$

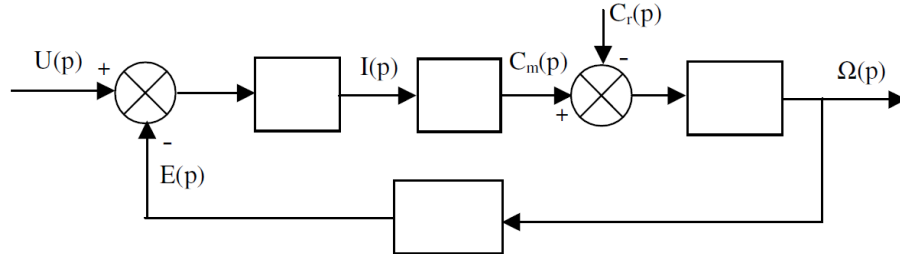
Nota : les constantes de couple et de force contre-électromotrice sont confondues :

$K = 1,89 \text{ V/(rad.s}^{-1})$ ou N.m.A^{-1} .

II Travail demandé :

Q1. A l'aide du tableau des caractéristiques du moteur, retrouver la valeur de la constante K

Q2. En appliquant la transformation de Laplace, mettre le système d'équations sous la forme du schéma bloc suivant (à recopier sur votre copie) :



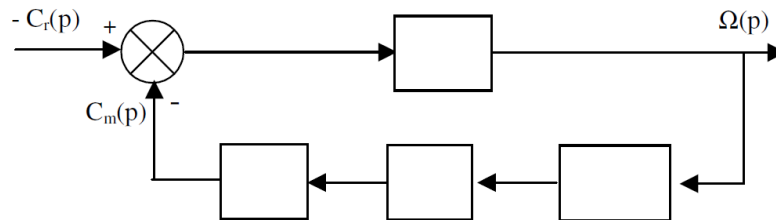
Q3. On considère dans un premier temps qu'il n'y a pas de perturbation ($C_r(p)=0$). Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert en boucle fermée du moteur : $F_u(p) = \Omega(p)/U(p)$. On exprimera $F_u(p)$ sous forme canonique :

$$F_u(p) = \frac{K_u}{1 + \tau_m \cdot p}$$

Donner l'expression littérale du gain statique et de la constante de temps. Faire l'application numérique.

Q4. Modèle simplifié de mise en énergie : on applique un échelon de tension d'amplitude $U_0=460$ V aux bornes du moteur. Vérifier que la vitesse atteinte en régime permanent est bien la vitesse nominale N_0 annoncée par le constructeur.

Q5. En considérant que $U(p)=0$, on peut mettre le schéma bloc sous la forme ci-dessous pour faciliter le calcul de la fonction de transfert en boucle fermée $F_r(p) = \Omega(p)/C_r(p)$:



Recopier et compléter ce schéma bloc en précisant les fonctions de transfert. Déterminer alors l'expression littérale de la fonction de transfert $F_r(p)$. On exprimera $F_r(p)$ sous forme canonique :

$$F_r(p) = \frac{K_r}{1 + \tau_m \cdot p}$$

Donner l'expression littérale du gain statique et de la constante de temps. Faire l'application numérique.

Q6. Le système étant linéaire, on peut écrire (théorème de superposition) :

$$\Omega(p) = F_u(p) \cdot U(p) + F_r(p) \cdot C_r(p).$$

On applique toujours un échelon de tension d'amplitude 460 V aux bornes du moteur. Celui-ci ayant atteint la vitesse nominale de 2320 tr/min, les cylindres presseurs se plaquent contre les cylindres blanchets provoquant un couple résistant pouvant être modélisé par un échelon d'amplitude $C_{r0}=25$ N.m. Calculer alors la vitesse de rotation N_{r0} (en tr/min) atteinte en régime permanent. En déduire l'erreur statique $\varepsilon_s = N_0 - N_{r0}$.

8.5 Second ordre : Application 1

I Présentation :

Un système est défini par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,5}{20 + 4 \cdot p + 0,1 \cdot p^2}$$

II Travail demandé :

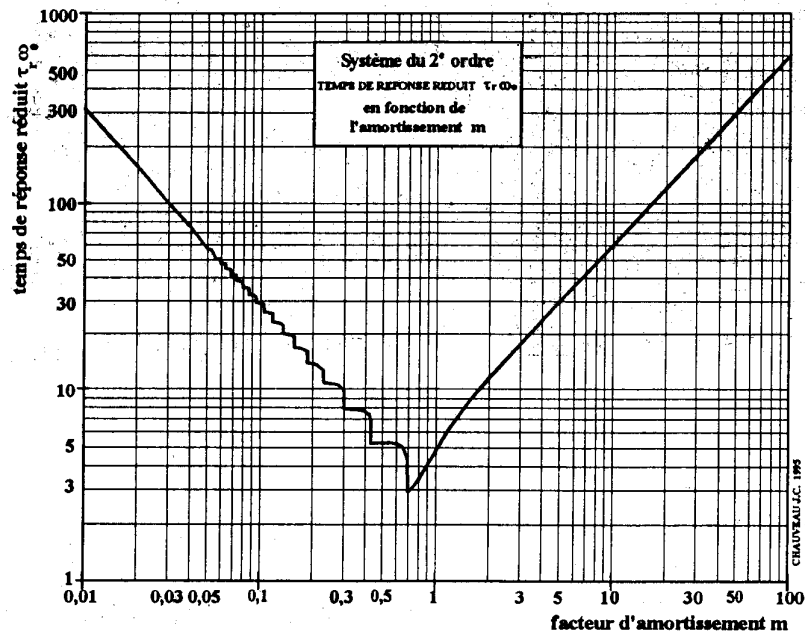
Q1. Identifier l'ordre de $H(p)$

Q2. Déterminer les paramètres caractéristiques de la fonction de transfert de ce système.

Q3. Déterminer l'équation de la réponse à une entrée échelon unitaire, y aura-t-il des dépassements de la valeur finale ?

Q4. Estimer le temps de réponse à 5 % de ce système.

- ABAQUE DU TEMPS DE REPONSE REDUIT



8.6 Second ordre : Application 2

I Présentation :

Un système est défini par la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{0,5}{20 + 0,8 \cdot p + 0,1 \cdot p^2}$$

II Travail demandé :

Q1. Identifier l'ordre de $G(p)$

Q2. Déterminer les paramètres caractéristiques de la fonction de transfert de ce système.

Q3. Déterminer l'équation de la réponse à une entrée échelon unitaire.

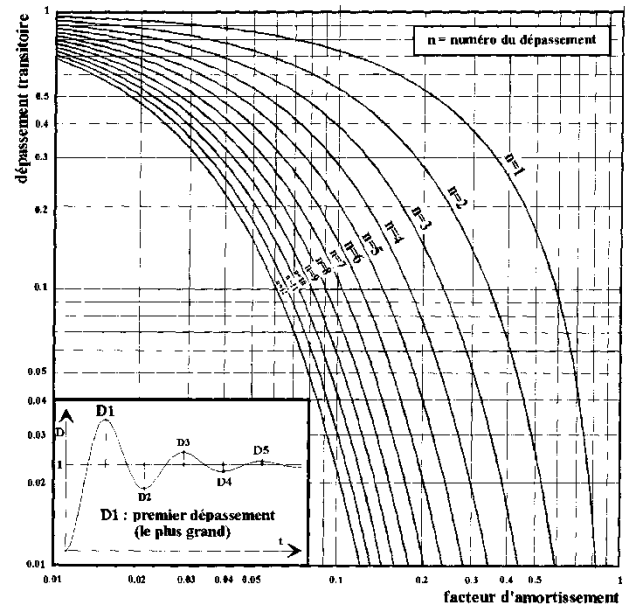
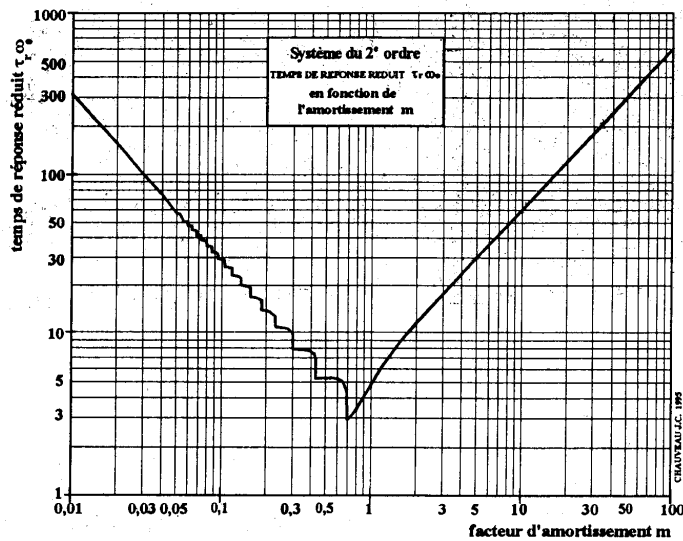
Q4. Combien y aura-t-il de dépassements ? Calculer la valeur du premier dépassement :

$D_{1\%} = e^{\frac{-\pi \cdot a}{\sqrt{1-a^2}}}$, puis déterminer l'instant où ce premier dépassement se produit : $t_{D1} = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-a^2}}$

Q5. Estimer le temps de réponse à 5 % de ce système.

III Annexes :

- ABAQUE DU TEMPS DE REPONSE REDUIT



8.7 Robot :

I Présentation :

Le robot de conditionnement, défini partiellement par les dessins de la figure 0 ci-contre, est construit en utilisant le réducteur REDEX - ACBAR dont les particularités de construction répondent aux exigences de la robotique et de la commande des axes des machines à commandes numériques.

II Travail demandé :

1) Modélisation du moteur chargé

La modélisation de la commande en vitesse de l'ensemble mécanique est obtenue en utilisant les équations différentielles suivantes, numérotées de 1 à 4 :

$$\textcircled{1} \quad u(t) = e(t) + R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad \text{Equation électrique de l'induit}$$

$$\textcircled{2} \quad C_m(t) - f \cdot \omega(t) = J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} \quad \text{Equation traduisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'induit}$$

$$\textcircled{3} \quad e(t) = K_e \cdot \omega(t) \quad \text{Loi de Lenz}$$

$$\textcircled{4} \quad C_m(t) = K_T \cdot i(t) \quad \text{Loi de conversion électromagnétique}$$

Dans lesquelles :

$u(t)$: tension aux bornes de l'induit

$i(t)$: courant dans l'induit

$e(t)$: force contre électromotrice

K_T : constante de couple

K_e : constante de f.e.m.

$\omega(t)$: vitesse angulaire de rotation du moteur

$C_m(t)$: couple moteur

J : moment d'inertie équivalent de l'ensemble mécanique ramené sur l'arbre moteur.

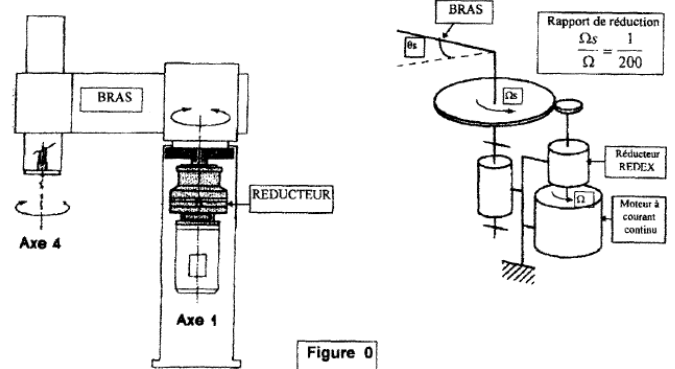
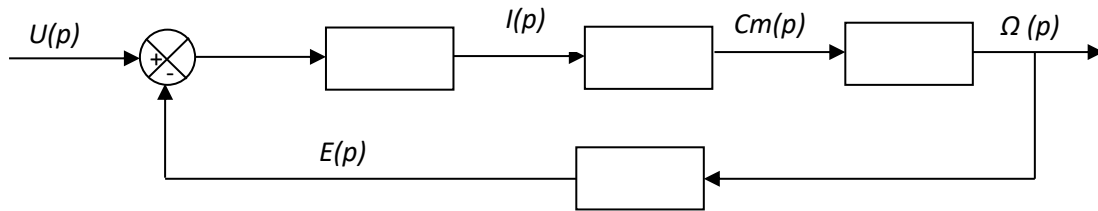


Figure 0

Q1. Exprimer ces quatre équations différentielles dans le domaine de Laplace. Conditions initiales nulles.

Q2. Sachant que f et L sont négligeables, compléter le schéma fonctionnel identique à celui ci-dessous, sur feuille de copie, en notant la fonction transfert élémentaire de chaque bloc.

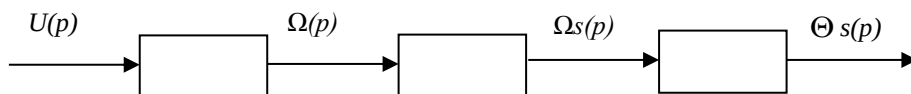


Q3. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée : $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$

Mettre $H(p)$ sous forme canonique, préciser l'ordre de $H(p)$ et calculer les paramètres correspondants sachant que : $R = 1 \text{ Ohm}$; $J = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$; $K_e = 0,1 \text{ V/rad/s}$; $K_T = 0,1 \text{ N.m / A}$

2) Asservissement de position

Q4. Le système est matérialisé par le schéma bloc ci-dessous :

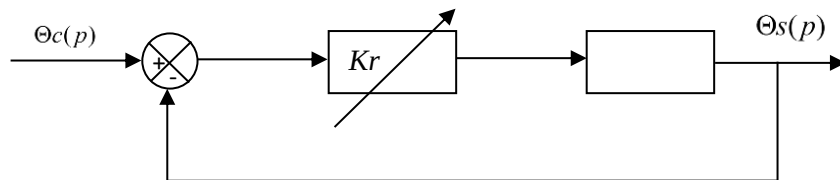


- $\Omega(p)$: Image de Laplace de la vitesse de rotation $\omega(t)$ du moteur.
- $\Omega_s(p)$: Image de Laplace de la vitesse de rotation $\omega_s(t)$ du bras du robot.
- $\Theta_s(p)$: Image de Laplace de la position angulaire $\theta_s(t)$ du bras du robot.

Compléter le schéma fonctionnel présenté ci-dessus (sur feuille de copie) en notant la fonction transfert élémentaire de chaque bloc sous forme numérique.

2.1) Asservissement de position angulaire du robot :

2.2.1) Soit le schéma fonctionnel à retour unitaire ci-dessous :



- Kr : Gain pur réglable
- $\Theta_s(p)$: Position angulaire réelle du bras du robot
- $\Theta_c(p)$: Position angulaire de consigne du bras

Q5. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $G(p) = \frac{\theta_s(p)}{\theta_c(p)}$

Q6. Mettre sous forme canonique et préciser l'ordre de $G(p)$.

Q7. Déterminer, en fonction de Kr , les paramètres correspondants : Gain, Pulsation propre non amortie ω_0 , Coefficient d'amortissement m .

2.2.2) Déplacement du bras :

On veut déplacer le bras d'une valeur angulaire de consigne $\theta_c = 30^\circ$ par une excitation en échelon de position ; le temps de réponse à 5% doit être minimal.

Q8. Calculer K_r .

Q9. Calculer la position réelle du bras θ_s en régime permanent, préciser le théorème utilisé.

Q10. Quelle est l'erreur statique ?

8.8 Motoréducteur :

I Présentation :

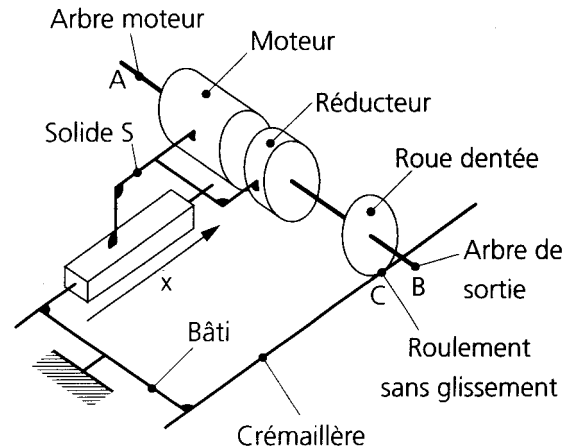
Etude de la mise en position d'un solide S suivant une direction x par rapport au bâti.

Le schéma ci-contre présente le mécanisme de mise en mouvement de S.

Le solide S est lié au bâti par une liaison glissière d'axe x .

Le moteur est encastré dans le solide S, l'arbre moteur entraîne l'arbre de sortie au travers d'un réducteur de rapport R .

L'arbre de sortie du réducteur est muni d'une roue dentée (de diamètre Φ), qui roule sans glisser sur une crémaillère encastrée dans le bâti.



Le moteur est à courant continu, il se modélise, ici, par une fonction de transfert du premier ordre de gain statique K_m et de constante de temps τ_m .

Données :

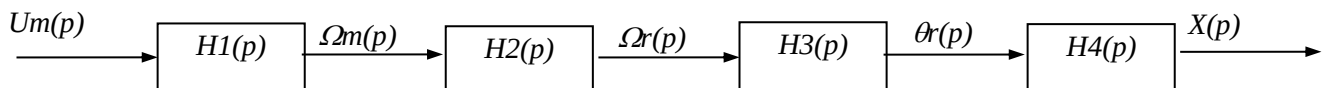
- $u_m(t)$: la tension de l'induit du moteur $L(u_m(t)) = U_m(p)$
- $\omega_m(t)$: la vitesse angulaire de l'arbre moteur $L(\omega_m(t)) = \Omega_m(p)$
- $\omega_r(t)$: la vitesse angulaire de l'arbre de sortie du réducteur $L(\omega_r(t)) = \Omega_r(p)$
- $\theta_r(t)$: la position angulaire de l'arbre de sortie du réducteur $L(\theta_r(t)) = \theta_r(p)$
- $x(t)$: la position linéaire de la crémaillère $L(x(t)) = X(p)$

On pose :

- $R = 0.2$
- $\Phi = 200 \text{ mm}$
- $K_m = 0.3 \text{ rad/s/V}$
- $\tau_m = 0.2 \text{ s}$

II Travail demandé :

On donne le schéma bloc suivant :



Q1. Exprimer les fonctions de transfert $H1(p)$, $H2(p)$, $H3(p)$, $H4(p)$.

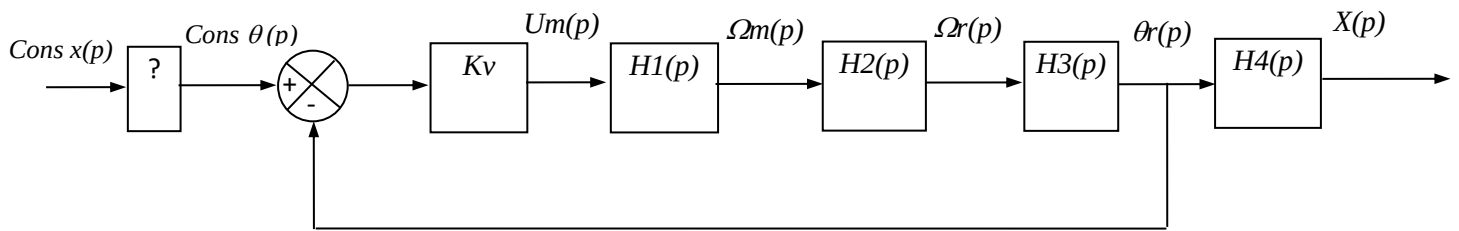
Q2. Exprimer la fonction transfert $H(p)$ telle que $H(p) = \frac{X(p)}{U_m(p)}$

Q3. Calculer, puis tracer la réponse à un échelon unitaire de tension de cette commande de position.

Q4. Le concepteur choisit d'asservir cette commande de position.

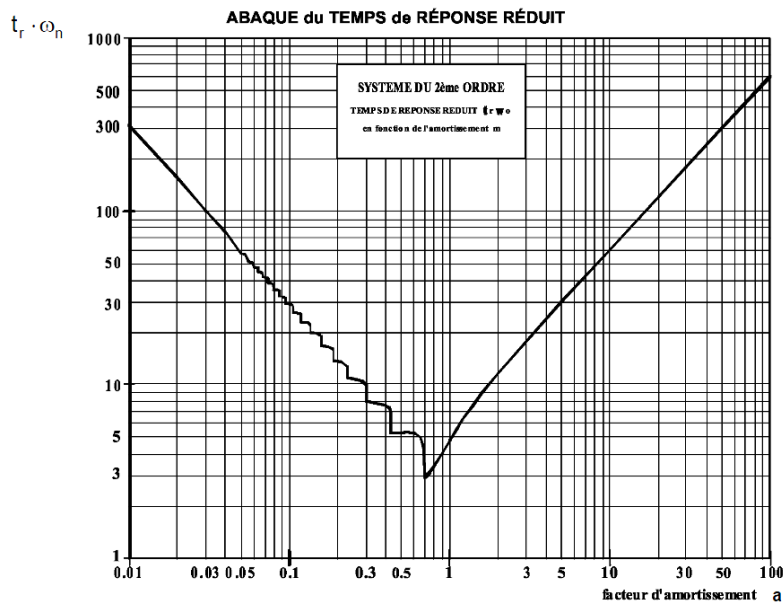
Un capteur de position angulaire est alors placé en position B. La fonction transfert de ce capteur sera prise égale à l'unité.

Compléter le nouveau schéma bloc représenté ci-dessous (garder l'expression littérale des fonctions de transfert).



Q5. Calculer pour $K_v = 1$ les performances temporelles suivantes de ce système (toujours pour une entrée indicielle).

- précision statique.
- temps de réponse par l'intermédiaire de l'abaque ci-dessous.



D'après (Chauveau ; Systèmes asservis Linéaires ;educalivre)

8.9 Amortisseur automobile :

I Principe :

Un amortisseur est constitué d'un ressort et d'un vérin amortisseur (dash pot). Le ressort tend à ramener le véhicule en position stable, le dash pot régule le retour à cette position.

Le premier réflexe pour tester un amortisseur est d'exercer une force instantanée sur l'axe du véhicule et d'observer le mouvement qui en résulte. C'est l'objet de l'étude de cet exercice.

On étudie ici le comportement d'un amortisseur d'automobile lors d'un effort brutal instantané. Ce contact brutal correspond à une impulsion brève du type impulsion de Dirac définie par :

$$f(t) = 500 \delta(t).$$

Il s'agit de connaître le déplacement $y(t)$ du véhicule en fonction de la force de contact instantanée $f(t)$.

On donne l'équation mécanique régissant le comportement de l'amortisseur :

$$\vec{f}(t) + \vec{F}_R + \vec{F}_{VA} = m \cdot \vec{a}$$

Avec :

- $\vec{f}(t) = -500 \cdot \delta(t) \vec{y}$
- $\vec{F}_R = -k \cdot y(t) \vec{y}$
- $\vec{F}_{VA} = -C \cdot \dot{y}(t) \vec{y}$
- $\vec{a} = \ddot{y}(t) \vec{y}$

Les conditions initiales sont celles de l'état statique défini par la figure ci-dessus :

$$A t = 0s, y=0 \text{ et } \dot{y}=0 \text{ et } \vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$$

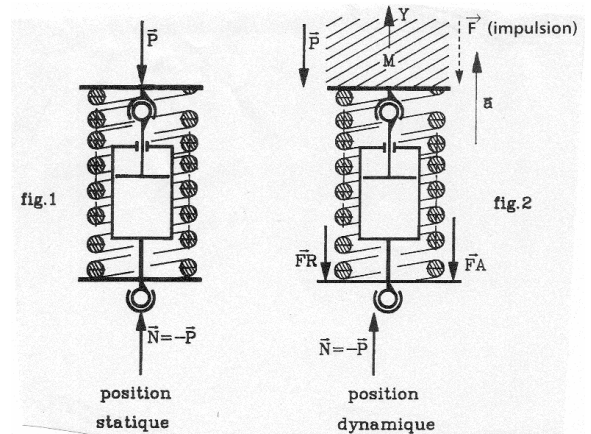
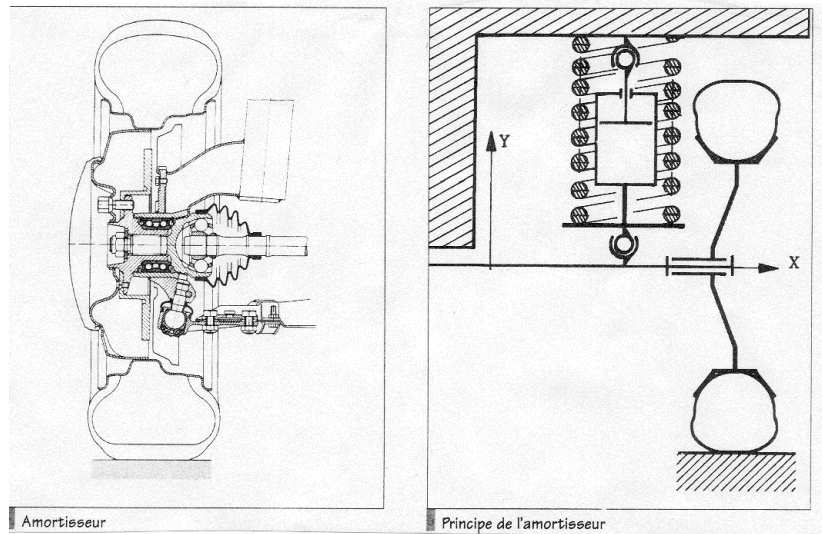
II Travail demandé :

Q1. Après avoir écrit l'équation mécanique en projection sur l'axe y définir $Y(p)$, ($Y(p)=L(y(t))$), dans le domaine de Laplace en fonction de l'image de l'impulsion $F(p)$, ($F(p)=L(f(t))$). On prendra soin de l'écrire sous la forme canonique de la fonction transfert d'un système du deuxième ordre soit :

$$G(p) = \frac{G_0}{1 + \frac{2 \cdot z \cdot p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}} = \frac{Y(p)}{F(p)}$$

Q2. Après avoir déterminé les expressions littérales de G_0 , ω_n et z , donner leurs valeurs numériques pour : $M = 300 \text{ kg}$; $k = 17055 \text{ N/m}$ et $C = 5500 \text{ N/m/s}$

Q3. Déterminer les pôles¹ de la fonction transfert $G(p)$, en déduire les constantes de temps τ_1 et τ_2 du système.



¹ Un pôle est une valeur qui annule le dénominateur de $G(p)$

Q4. L'étude est proposée avec une entrée définie par une impulsion de Dirac. Exprimer $Y(p)$ sous la forme de transformées de Laplace connue, déterminer $y(t)$ et tracer la pour $t \in [0; 2]$ en prenant une trentaine de points.

Q5. On réalise le même test sur un véhicule identique, mais d'un millésime différent. On constate que seule la caractéristique du vérin amortisseur est différente en effet $C_1 = 2000 \text{ N/m/s}$.

On demande :

Q5.1. De calculer la nouvelle fonction transfert $G_1(p)$ et de rechercher ses pôles.

Q5.2. De trouver la forme de la nouvelle réponse $y_1(t)$ dans l'annexe 1 du cours.

(On donne la même impulsion de Dirac que pour le premier véhicule)

Q5.3. D'exprimer numériquement cette réponse et de la tracer en superposition avec la première.

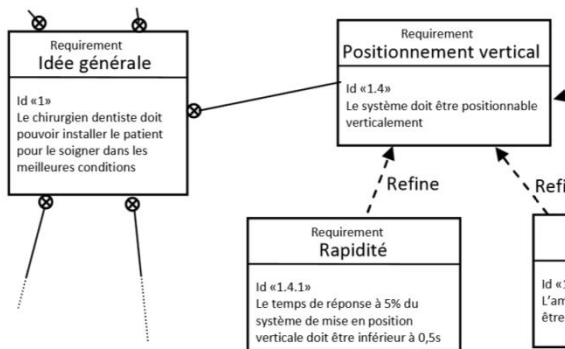
Comparaison :

Q6. On demande d'analyser le comportement des deux réponses $y(t)$ et $y_1(t)$ et d'en déduire quel est le véhicule qui possède les meilleurs amortisseurs.

8.10 Asservissement d'une unité dentaire :

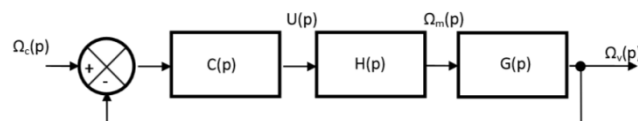
I Présentation :

Le support de l'étude est une « unité dentaire » donne un extrait partiel du diagramme des exigences de son modèle ainsi qu'une description structurale du système. Cet équipement a été conçu et réalisé dans le but d'une adaptabilité maximale aux différentes méthodes de travail des chirurgiens-dentistes. Le chirurgien-dentiste possède une pédale et un pupitre de commande qui lui permet de monter ou descendre verticalement le corps du patient, de l'incliner plus ou moins, et de positionner sa tête. Grâce à cela, le patient peut prendre une position spatiale pertinente pour que le chirurgien puisse réaliser tous les actes médicaux.



On s'intéresse dans ce sujet au critère de l'exigence 1.4.1 concernant le temps de réponse du système permettant de mettre en position verticale le patient.

Pour régler le patient en position verticale, le chirurgien-dentiste appuie sur une pédale, plus ou moins fort. Un moteur électrique se met en route, sa vitesse de rotation dépendant de l'appuie plus ou moins profond du chirurgien-dentiste sur la pédale. La vitesse de rotation du moteur est réduite par un réducteur à engrenages. En sortie du réducteur à engrenages se trouve une vis, dont la rotation $\Omega_v(p)$ entraîne, par un système vis écrou, la translation du siège en hauteur. L'ensemble peut se représenter par le schéma bloc suivant (le composant de fonction de transfert $C(p)$ est un correcteur) :



II Travail demandé :

Q1. Donner le nom des composants qui correspondent aux fonctions de transfert $H(p)$ et $G(p)$.

Q2. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du système : $\frac{\Omega_v(p)}{\Omega_c(p)}$

Les équations du moteur utilisé sont les suivantes :

$$u(t) = e(t) + R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}; C_m(t) - f \cdot \omega(t) = J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt}; e(t) = K_e \cdot \omega(t); C_m(t) = K_m \cdot i(t)$$

Avec : $u(t)$ = tension du moteur ; $e(t)$ = force contre électromotrice du moteur ; $i(t)$ = intensité dans le moteur ; $C_m(t)$ = couple exercé par le moteur ; $\omega(t)$ = vitesse angulaire du moteur. Les grandeurs physiques R, L, K_e, J, f et K_m sont des constantes.

Q3. En supposant les conditions initiales nulles (ce qui sera également supposé dans tout le reste de l'exercice), exprimer ces équations dans le domaine de Laplace.

Q4. Montrer que, dans le domaine de Laplace, la relation entre $\Omega_m(p)$ et $U(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot a}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}$$

Où K, a et ω_n sont trois constantes à déterminer.

Si on utilise un correcteur proportionnel, l'application numérique des grandeurs physiques permet de trouver la fonction suivante : $\frac{\Omega_v(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{K_T}{1 + T_T \cdot p}$, avec $K_T = 0,9$ et $T_T = 0,1s$

Q5. Déterminer $\omega_v(t)$ lorsque le chirurgien-dentiste demande un échelon de rotation

$\omega_c(t) = \omega_{c0} \cdot u(t)$. Exprimer le résultat en fonction de ω_{c0}, K_T et T_T .

Q6. Déterminer le temps de réponse à 5% du système et effectuer l'application numérique. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Le patient, initialement immobile, bouge verticalement selon le déplacement $x_v(t)$ tel que : $\frac{dx_v(t)}{dt} = b \cdot \omega_v(t)$

Où b = constante qui représente le pas réduit de la vis.

Q7. Déterminer la transformée de Laplace $X_v(p)$ de $x_v(t)$.

Q8. Déterminer $x_v(t)$ en fonction de b, K_T, T_T et ω_{c0} .

Si on utilise un correcteur proportionnel, dérivé et intégral, l'application numérique des grandeurs physiques permet de trouver la fonction suivante :

$$\frac{\Omega_v(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{1}{1 + 2 \cdot p + p^2}$$

Q9. Déterminer $\omega_v(t)$ lorsque le chirurgien-dentiste demande un échelon de rotation

$\omega_c(t) = \omega_{c0} \cdot u(t)$.

Q10. Déterminer si le temps de réponse à 5 % est plus faible ou plus grand que dans le cas précédent. Conclure vis-à-vis du cahier de charges.

8.11 Bode initiation :

I diagramme de Bode d'un premier ordre :

Q1. Démontrer que pour une fonction de transfert du 1^{er} ordre, la chute de gain à la pulsation de cassure est de $-3dB$

Q2. Tracer sur les diagrammes logarithmiques du document réponse, les diagrammes de Bode asymptotiques puis l'allure des diagrammes de Bode des fonctions de transfert suivantes :

Q2.1 Les fonctions : $F_1(p) = \frac{1}{1+p}, F_2(p) = \frac{10}{1+p}, F_3(p) = \frac{1}{1+10 \cdot p}$.

Nota : Pour mettre en forme vos résultats avant les tracés, vous pouvez vous aider du tableau représenté à la fin de l'exercice.

Q2.2. Les fonctions : $F_1(p) = 3 \cdot p, F_2(p) = \frac{3}{p}$.

Q3. Analyse des résultats obtenus :

Q3.1. A la lumière des résultats obtenus à la **Q2.1** que se passe-t-il graphiquement lorsque l'on change le gain d'une fonction transfert ? Lorsque l'on change la constante de temps ?

Q3.2. A la lumière des résultats obtenus à la **Q2.2** que se passe-t-il graphiquement lorsqu'on introduit un dérivateur ? un intégrateur ?

II Tracés des diagrammes de Bode d'une fonction de transfert du 2nd ordre à pôles réels $a \geq 1$

Soit la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{200}{100 + 60 \cdot p + 5 \cdot p^2}$$

Q4. Mettre cette fonction de transfert sous la forme d'un produit de 2 premiers ordres $H_1(p)$ et $H_2(p)$.

Nota : Pour mettre en forme vos résultats avant les tracés, vous pouvez vous aider du tableau représenté en annexe à la fin de cet exercice.

Q5. Tracer les diagrammes de Bode de cette fonction de transfert (inutile de refaire la démo pour les tracés du 1^{er} ordre : vous pouvez exploiter directement les résultats du cours).

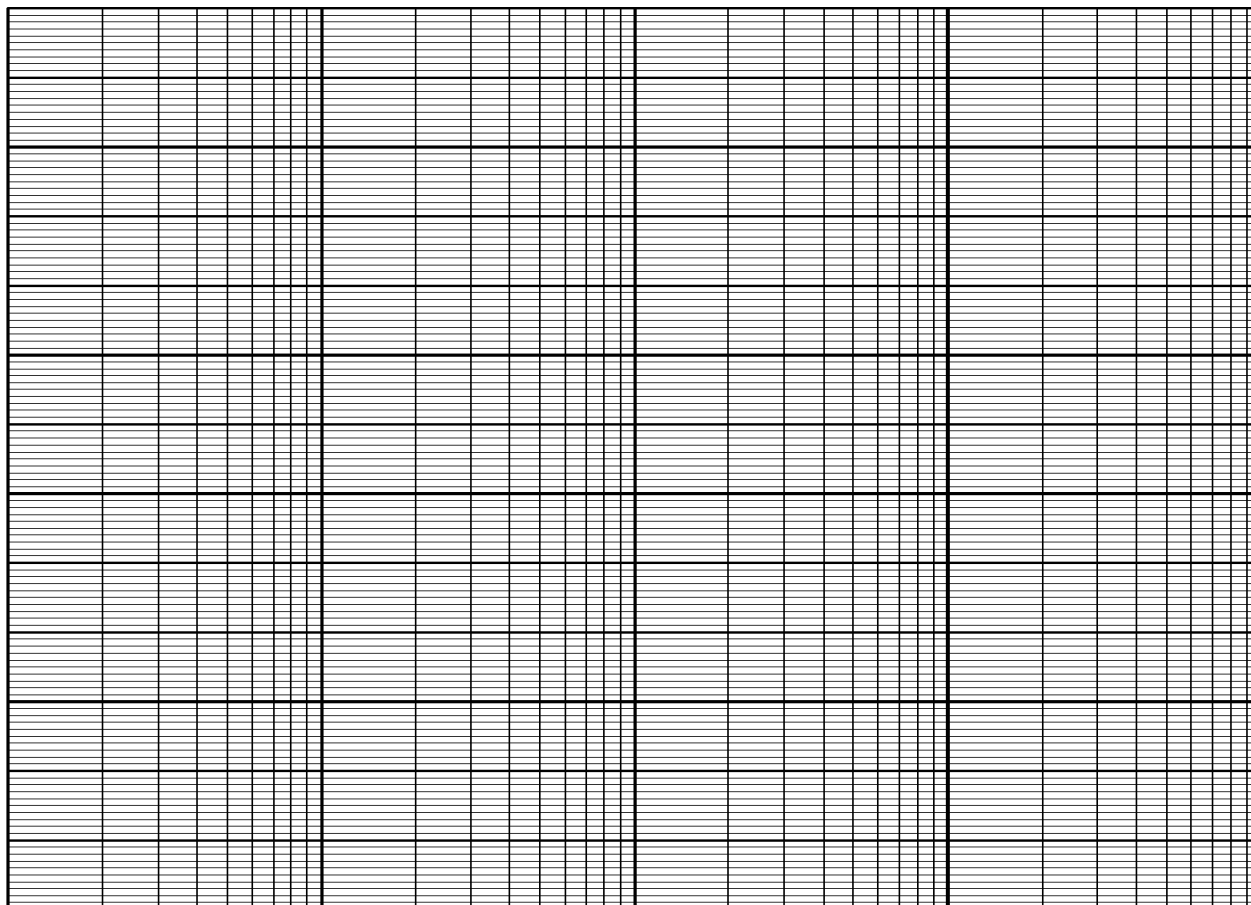
Réponses à la question Q2.1.

[illegible]

Réponses à la question Q2.2.

[illegible]

Réponses à la question Q5.

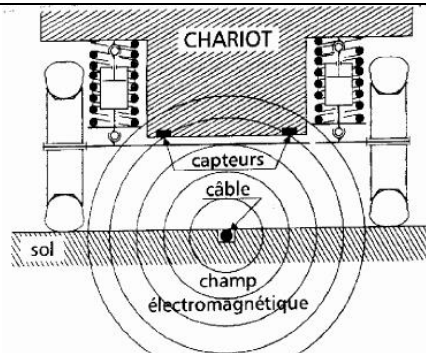


	Fonction transfert $H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$		Fonction complexe $\underline{H} = \frac{K}{1 + j \cdot \tau \cdot \omega}$	Diagramme de gain			Diagramme de phase		
	K =	$\tau =$		Puls. Basses $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ Asymptote : $20 \cdot \log(K)$	Puls. Hautes $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ Asymptote : $-20dB/dec.$	coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$	Puls. Basses $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ Asymptote =	Puls. Hautes $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ Asymptote =	coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau} \varphi(\omega_c)$
$F_1(p)$									
$F_2(p)$									
$F_3(p)$									
$H_1(p)$									
$H_2(p)$									

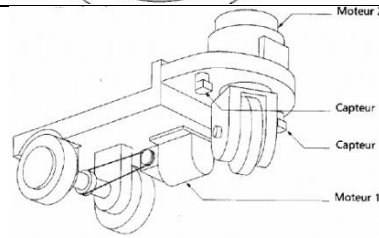
8.12 Etude de la motorisation de la direction d'un chariot filoguidé :

I Présentation :

Les chariots filoguidés sont des chariots guidés par un système électromagnétique. Un câble positionné juste sous le sol crée un champ électromagnétique. Le chariot porte deux capteurs disposés symétriquement qui le guident en détectant la différence de champ magnétique provoquée lorsque ce chariot s'éloigne de sa trajectoire définie par le câble. Ces deux capteurs agissent de telle sorte que cette différence soit nulle.

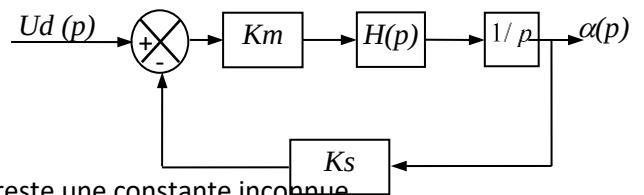


La perspective ci-contre permet de visualiser, par dessous les éléments du système moteur du chariot (moteur 1) et dans l'axe vertical de la roue directrice avant on distingue le moteur 2.



En première hypothèse, on estime que le schéma fonctionnel de l'asservissement de direction est le suivant :

Avec : $H(p) = \frac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$;
 K_m et K_s sont des constantes.



On donne : $\tau_1 = 0,5 \text{ s}$; $\tau_2 = 0,02 \text{ s}$; $K_s = 10 \text{ V/rad}$; K_m reste une constante inconnue.

II Travail demandé :

Q1. Déterminer les paramètres caractéristiques de $H(p)$.

Q2. Exprimer la Fonction transfert en boucle ouverte du système (la mettre sous forme littérale puis numérique).

Q3. Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée du système (la mettre sous forme littérale puis numérique).

Q4. On étudie ce moteur dans le domaine fréquentiel sans tenir compte de K_m , c'est à dire $K_m=1$

Q4.1. Exprimer sous forme numérique le gain et la phase de la fonction transfert en boucle ouverte

Q4.2. Tracer² les diagrammes de Bode du gain et de la phase en étudiant tout d'abord les diagrammes asymptotiques puis en traçant les courbes.

Nota : En remarquant que votre $FTBO(p)$ est un produit de fonctions du premier ordre, je vous recommande ici d'utiliser la propriété d'additivité des systèmes linéaires.

Vous disposez en dernière page d'un exemple de tableau que vous pourrez utiliser pour formaliser votre recherche.

²Sur la feuille réponse prévue à cet effet

Document réponse à la question Q4.2

Diagramme de gain :

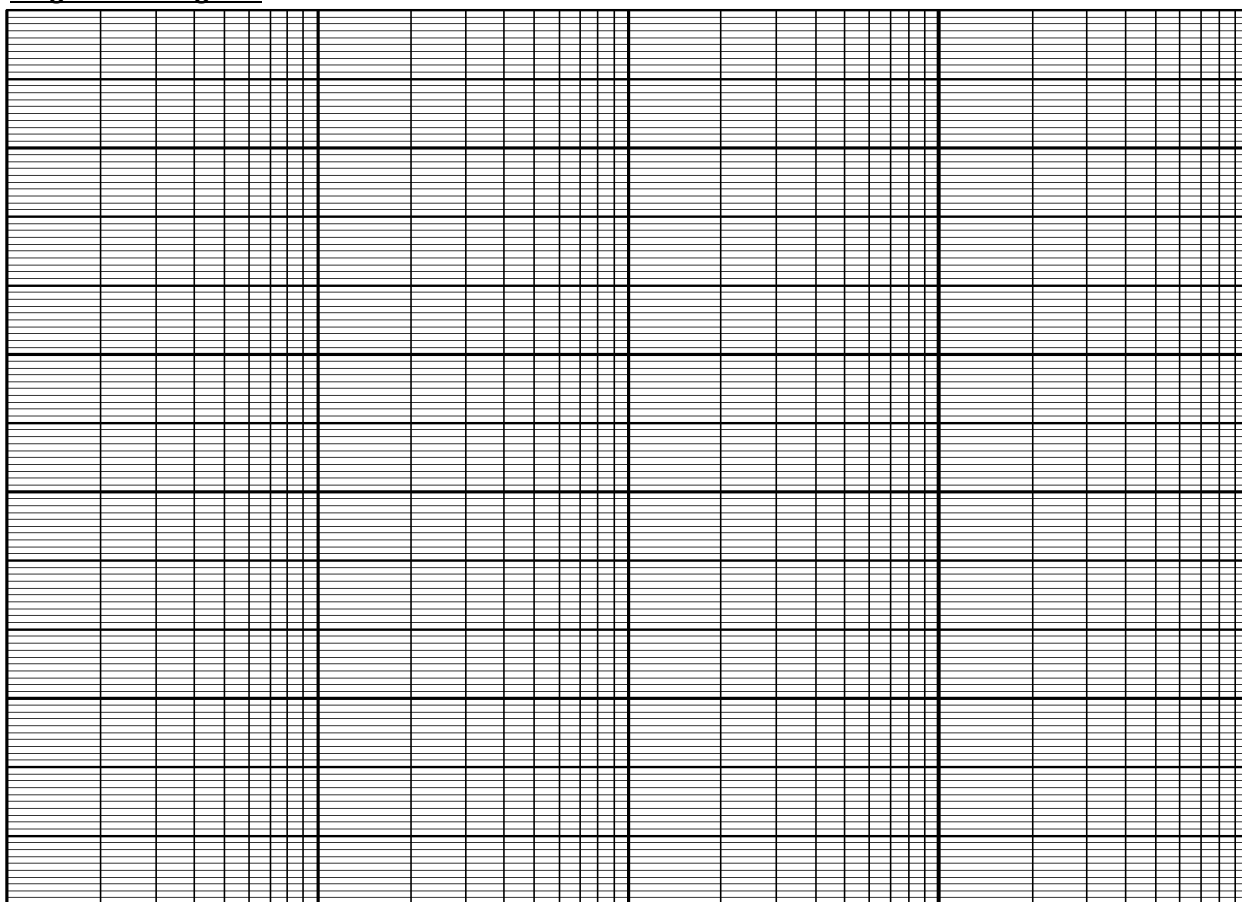
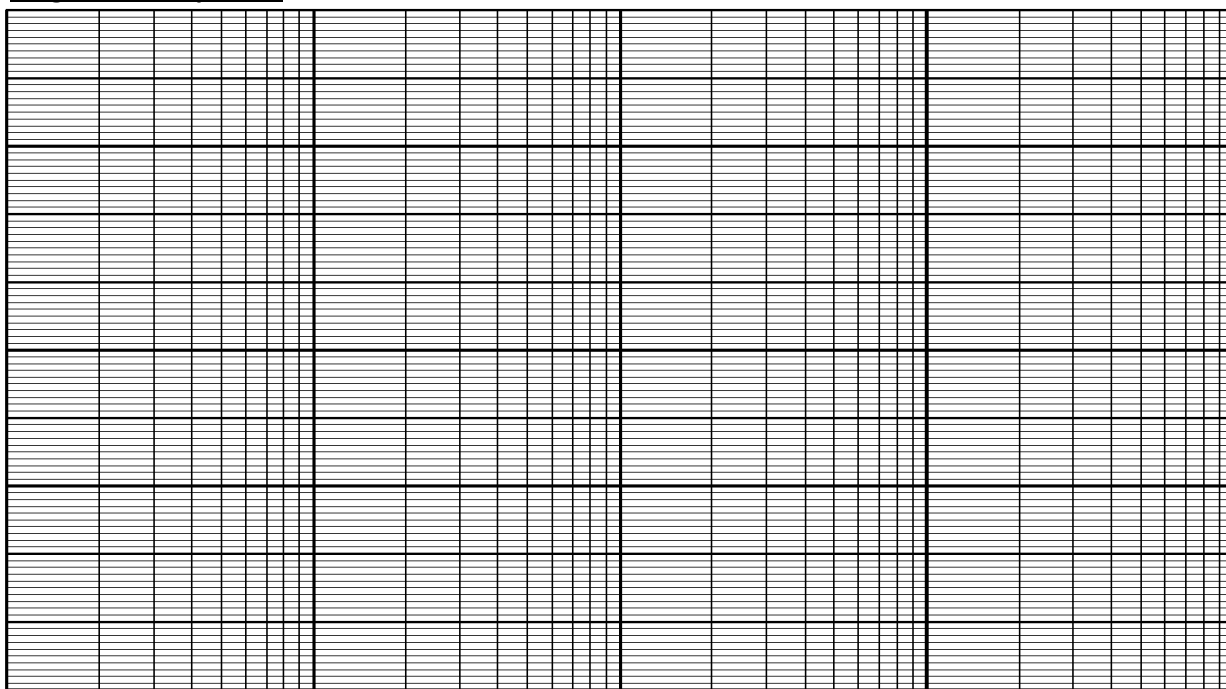


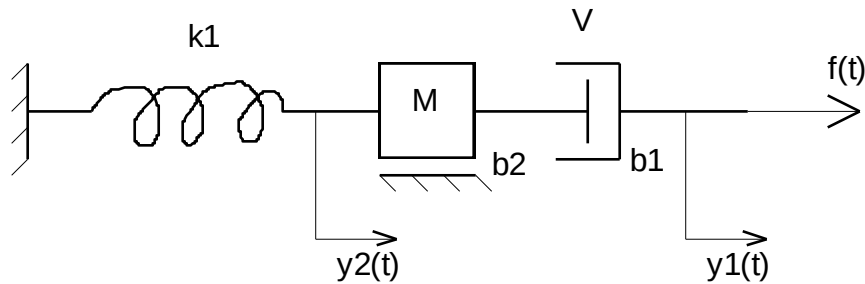
Diagramme de phase :



8.13 Masse-ressort études temporelle et fréquentielle :

I Présentation :

Soit le système mécanique modélisé par le schéma suivant :



Ce système est constitué :

- d'un ressort de raideur $k1$
- d'un solide de masse M
- d'un élément V exerçant un frottement visqueux de constante $b1$

La masse est posée sur une table qui exerce un frottement visqueux de constante $b2$. Une force $f(t)$ est appliquée sur l'élément V .

$$M \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} = -k1 \cdot y_2(t) - b2 \cdot \frac{dy_2(t)}{dt} - b1 \cdot \frac{d(y_2(t) - y_1(t))}{dt}$$

avec $f(t) = -b1 \cdot \frac{d(y_2(t) - y_1(t))}{dt}$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse M en projection sur l'axe horizontal donne l'équation ci-contre :

II Travail demandé :

Q1. Pour les conditions initiales nulles, donner la fonction transfert du système : $H(p) = \frac{Y_2(p)}{F(p)}$

Q2. Identifier de quel ordre est la fonction transfert et exprimer ses paramètres caractéristiques en fonction de $k1$, M , $b2$.

Q3. Déterminer les valeurs numériques des paramètres caractéristiques exprimés littéralement ci-dessus. On donne $M = 250 \text{ Kg}$, $k1 = 25\,000 \text{ N/m}$, $b2 = 1000 \text{ N/m/s}$

Q4. Donner la valeur numérique de $H(p)$.

Q5. On suppose que $f(t)$ est de la forme $f(t) = 250 \cdot \delta(t)$ ($f = 250 \text{ N}$). Déterminer l'expression de la réponse $y_2(t)$ et la tracer.

Q6. Etude fréquentielle :

Q6.1. Diagramme de Gain :

- Déterminer l'expression de $Y_2(j\omega)$
- Déterminer le gain $G \text{ (dB)}$ en Décibel de $Y_2(j\omega)$
- Faire une étude aux limites et donner la valeur de ω_c la pulsation de coupure.

En consultant les résultats numériques de la question Q3 pensez-vous qu'il y a résonance ? Si oui, déterminer la valeur numérique de ω_r la pulsation de résonance. Indiquer la valeur de $G \text{ (dB)}$ pour cette pulsation. Tracer le diagramme.

Q6.2. Diagramme de phase :

- Déterminer la phase $\phi(\omega)$
- Faire une étude aux limites et donner la valeur de $\phi(\omega_c)$ la pulsation de coupure.
- Tracer le diagramme.

Q7. On décide d'optimiser la réponse du système en posant $a=0.7$.

Calculer alors la nouvelle valeur $b'2$ de $b2$, puis calculer la nouvelle valeur $H'2(p)$ de la fonction de transfert $H2(p)$ et tracer sur le même schéma que $y_2(t)$ la nouvelle réponse $y'2(t)$.

Comparer les deux courbes et indiquer en quoi la réponse du système est optimisée.

8.14 Étude de la motorisation d'un robot d'exploration de la planète Mars :

I Présentation :

Dans le cadre de l'exploration du système planétaire, le CNES (Centre National d'études Spatiales) a développé un prototype de robot. L'étude proposée ici concerne la régulation de vitesse d'une des roues motrices de ce robot.

Modélisation du moteur :

Le comportement du moteur est modélisé par les quatre équations suivantes :

$$u(t) = R \cdot i(t) + e(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}; e(t) = k_e \cdot \omega_m(t); J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t); C_m(t) = k_m \cdot i(t)$$

Avec :

$u(t)$: tension du moteur ; $e(t)$: force contre électromotrice du moteur ; $i(t)$: intensité dans le moteur ; $C_m(t)$: couple exercé par le moteur ; $\omega_m(t)$: vitesse angulaire du moteur.

Nota : les conditions initiales sont nulles.

II travail demandé :

1 Etude préliminaire :

Q1. Déterminer sous forme canonique la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$, (le gain sera noté K_c).

Sachant que l'on a :

$$R = 1.1 \, \Omega; L = 0.5 \, \text{mH}; k_m = 0.0259 \, \text{Nm/A}; k_e = 2.7 \, \text{V/1000 tr/min (attention à l'unité !)}; J = 3.32 \cdot 10^{-6} \, \text{kg.m}^2$$

Q2. Déterminer les valeurs littérales et numériques des paramètres caractéristiques de $H(p)$

Montrer que $H(p)$ peut se mettre sous la forme $H(p) = \frac{K_m}{(1+\tau_1 \cdot p) \cdot (1+\tau_2 \cdot p)}$. Déterminer les valeurs littérales et numériques de τ_1 et τ_2 .

Q3. Déterminer $\omega_m(t)$ lorsque $u(t)$ est un échelon de tension d'amplitude U_0 .

Exprimer le résultat en fonction de K_m , τ_1 , τ_2 et U_0 .

Préciser la valeur de $\omega_m(t)$ à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de $\omega_m(t)$ et la valeur finale, en fonction de U_0 , atteinte par $\omega_m(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

2 Asservissement en vitesse :

On désire asservir en vitesse la rotation du moteur.

Pour la boucle de mesure, la solution retenue est d'utiliser une génératrice tachymétrique, de gain $K_g = 0.1$, qui délivre une tension proportionnelle à $\omega_m(t)$ qui est comparée à la consigne.

Pour la chaîne directe, la solution retenue fait apparaître un correcteur représenté par $C(p)$, un amplificateur de puissance ($A = 5 \text{V/rad/s}$) et le moteur représenté par $H(p)$.

Voir schéma de la structure ci-dessous :

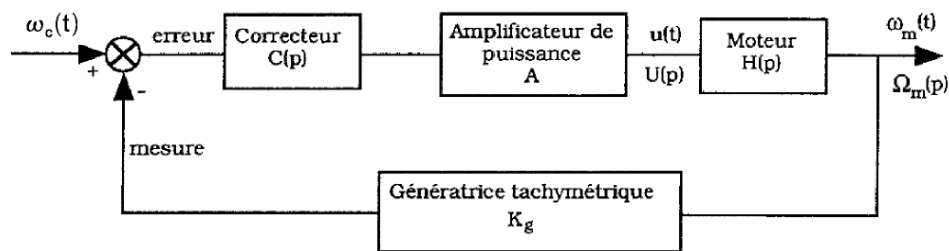


Figure 1

Dans la suite du problème, et indépendamment du résultat de la question 1.2, la fonction de transfert du moteur sera prise égale à :

$$H(p) = \frac{38.7}{(1 + 0.5 \cdot 10^{-3} \cdot p) \cdot (1 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot p)}$$

Dans un premier temps on prendra : $C(p) = K$

Q4. Déterminer littéralement $G_1(p)$, la fonction de transfert en boucle ouverte (F.T.B.O.), et $H_1(p)$ la fonction de transfert en boucle fermée (F.T.B.F.) de la boucle d'asservissement de la figure 1. Montrer que l'on peut écrire $H_1(p)$ sous la forme :

$$H_1(p) = \frac{K_S}{1 + 2 \cdot \frac{a}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}$$

Calculer les valeurs numériques de : K_S , a et ω_n en fonction de K .

Q5. Montrer que pour $K = K_0 = 0.27$ $a < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Déterminer les valeurs de K_S et de ω_n pour cette valeur K_0 .

Q6. Les diagrammes de Bode de la FTBO $G_1(j \cdot \omega)$, sont représentés dans le cas où $K = 1$, sur la figure page 24. Tracer, en superposition sur la figure du diagramme de gain, le *diagramme asymptotique* correspondant. Expliquer clairement la démarche adoptée sur votre copie.

Q7. Expliquer comment est modifié le diagramme de gain dans le cas où $K = K_0$. Qu'en est-il du diagramme de phase ?

3) Etude d'un critère de stabilité :

Un système à la limite de la stabilité est mal amorti. Son bon fonctionnement n'est pas assuré car une faible modification de ses caractéristiques peut le rendre instable. Par conséquent, on garantit la stabilité du système en prenant des marges de sécurité.

L'une de ses marges de sécurité s'appelle la marge de phase. Notée M_ϕ , elle est définie par :

$$M_\phi = 180^\circ + \arg(G_1(j\omega_1))$$

Avec : ω_1 pulsation pour laquelle $|G_1(j\omega_1)| = 1$ (donc $20 \cdot \log|G_1(j\omega_1)| = 0$)

Les marges de stabilité mesurent la distance au point critique de stabilité des lieux de Black, Nyquist ou Bode de la **fonction transfert en boucle ouverte**.

Une marge de phase petite entraîne un faible degré de stabilité.

On utilise couramment une marge de phase de **45°** qui garantit un fonctionnement correct de la plupart des systèmes.

Q8.1. Pour $K = 1$, Relever sur le diagramme de Gain, la pulsation ω_1 pour laquelle $|G_1(j\omega_1)| = 1$.

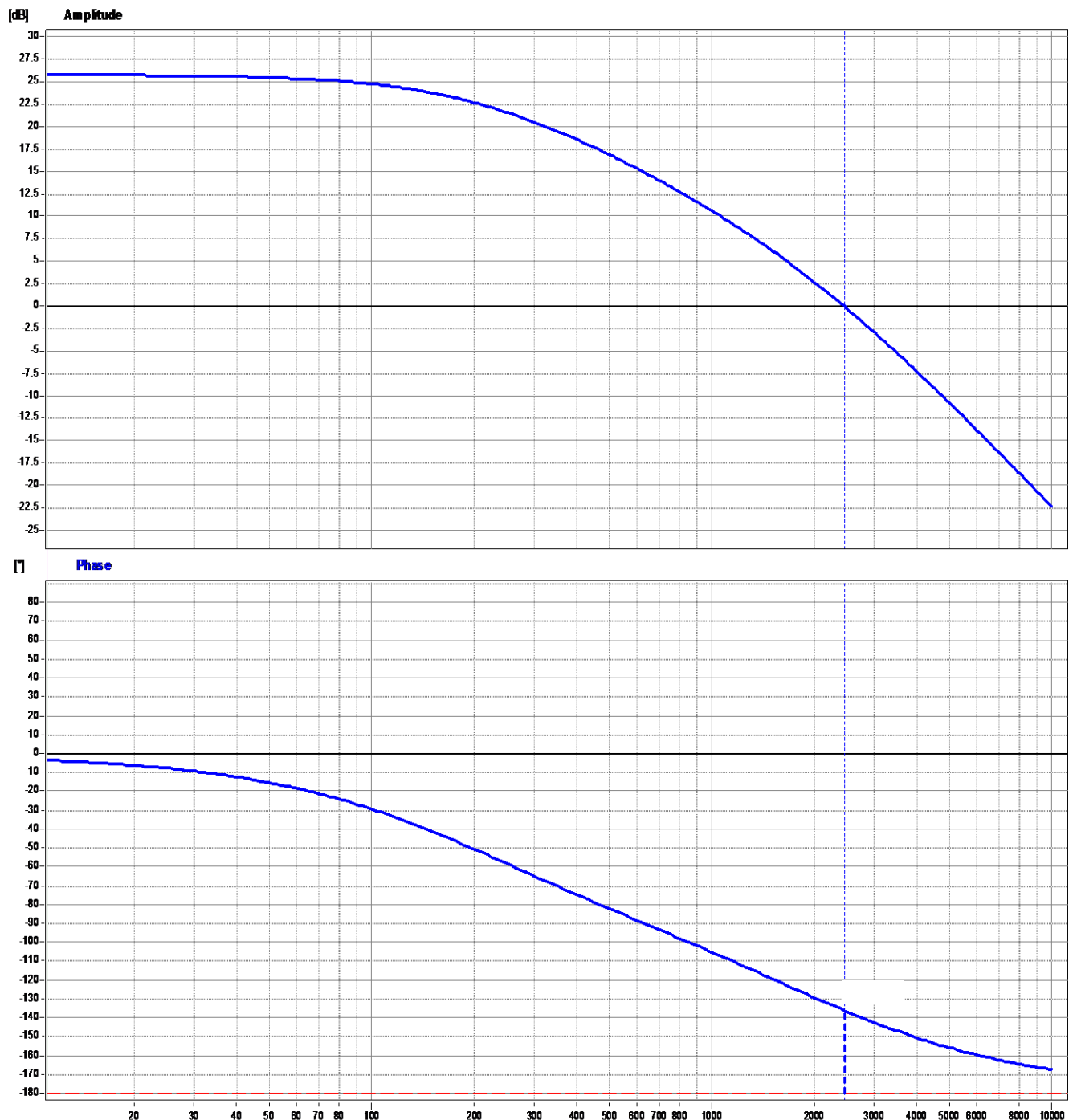
Quelle est alors la valeur mesurée de la marge de phase ? Conclusion ?

Q8.2. Pour $K = K_0$, Déterminer, à l'aide du diagramme de Gain modifié, la pulsation ω_1 pour laquelle $|G_1(j\omega_1)| = 1$.

Quelle est alors la valeur mesurée de la marge de phase ? Conclusion ?

Feuille réponse dédiée à la question Q6.

Q6. Les diagrammes de Bode de la FTBO $G_1(j \cdot \omega)$, sont représentés dans le cas où $K = 1$, sur la figure page suivante. Tracer, en superposition sur la figure du diagramme de gain, *le diagramme asymptotique* correspondant. Expliquer clairement la démarche adoptée sur votre copie.



Nom :