

## 2.6 Analyse fréquentielle 1

---

### Sommaire

1. Diagramme de Bode d'un second ordre : .....	2
1.1. Cas faiblement amorti : $a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .....	2
1.2. Amortissement intermédiaire : $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$ .....	3
1.3. Cas fortement amorti : $a \geq 1$ .....	3
2. Diagrammes de Bode asymptotiques : .....	3
3. Exploitation des diagrammes en ingénierie : .....	5
3.1. Bande passante d'un composant : .....	5
3.2. Bande passante à 0 dB d'une fonction de transfert en boucle ouverte : .....	6
3.3. Identification de modèle sur une mesure fréquentielle .....	6
3.4. Marges de stabilité : .....	7
3.4.1. Lieu de transfert de la FTBO et stabilité de la FTBF : .....	7
3.4.2. Marge de gain et marge de phase .....	8

## 1. Diagramme de Bode d'un second ordre :

Soit la fonction transfert du deuxième ordre :

$$H(p) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{\omega_n^2 + 2 \cdot a \cdot \omega_n \cdot p + p^2} \text{ d'où } H(j \cdot \omega) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j \cdot 2 \cdot a \cdot \omega_n \cdot \omega}$$

Entre les valeurs asymptotiques la forme de la courbe dépend de la valeur de l'amortissement :

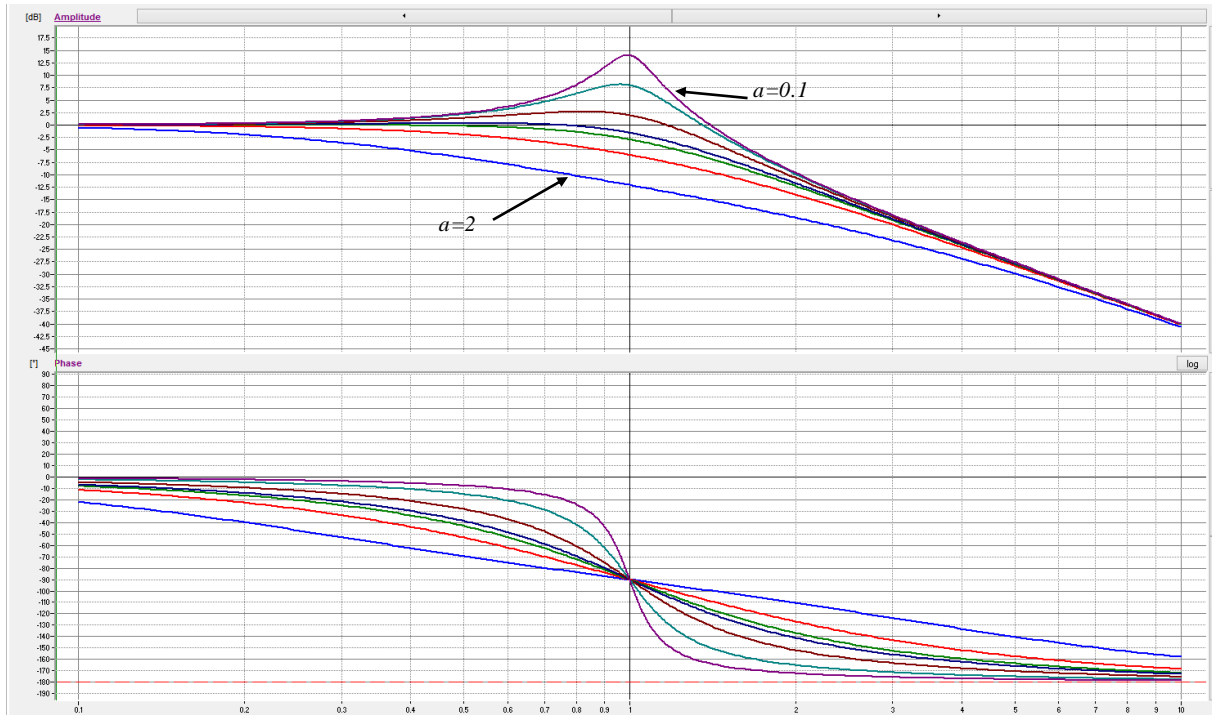


Figure 1

### 1.1. Cas faiblement amorti : $a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Il est possible de montrer que si  $a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$  (faiblement amorti), alors la dérivée du

dénominateur de l'expression du gain  $G(\omega)$  s'annule pour  $\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot a^2}$ . Il y a donc un maximum en  $\omega_r$ , pulsation dite pulsation de resonance, et :

$$G(\omega_r) = 20 \cdot \log \frac{K}{2 \cdot a \cdot \sqrt{1 - a^2}}$$

Il faut noter que dès que la résonance est marquée ( $a < 0.2$  environ), la valeur du maximum est très proche de la valeur en  $\omega_n$  (voir figure 1). Or la valeur en  $\omega_n$  se détermine très facilement en fonction de  $a$  (quel que soit  $a$ )

$$|H(j \cdot \omega_n)| = \frac{|K|}{\left| 1 + j \cdot \frac{2 \cdot a}{\omega_n} \cdot \omega_n - \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \omega_n^2 \right|} = \frac{K}{2 \cdot a} = K \cdot Q \text{ où } Q = \frac{1}{2 \cdot a} \text{ est le facteur de qualité}$$

Cette propriété permet d'identifier l'amortissement sur une courbe expérimentale ou, à l'inverse, d'obtenir une approximation du maximum de résonance lorsque l'amortissement est faible en vue de tracer la courbe.

## 1.2. Amortissement intermédiaire : $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$

Si  $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$ , le diagramme de Bode de gain ne présente pas de résonance.

## 1.3. Cas fortement amorti : $a \geq 1$

Si  $a \geq 1$ , il n'y a pas de résonance et les deux pôles sont réels si bien que la fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$H(j \cdot \omega) = \frac{K}{(1 + j \cdot \tau_1 \cdot \omega) \cdot (1 + j \cdot \tau_2 \cdot \omega)} \text{ avec par exemple } \tau_2 < \tau_1 \left( \omega_{c2} = \frac{1}{\tau_2} > \omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1} \right)$$

La fonction de transfert est la multiplication de deux premiers ordres d'où :

$$G(\omega) = 20 \cdot \log K - \underbrace{20 \cdot \log(1 + j \cdot \tau_1 \cdot \omega_1)}_{\text{Première pente à } -20\text{dB/dec}} - \underbrace{20 \cdot \log(1 + j \cdot \tau_2 \cdot \omega_2)}_{\text{Deuxième pente à } -20\text{dB/dec}}$$

Le diagramme de Bode de module présente alors deux cassures, à  $-20 \text{ dB/dec}$  en  $\omega_{c1}$  puis à  $-40 \text{ dB/dec}$  en  $\omega_{c2}$ . De même la phase présente deux cassures, à  $-45^\circ$  en  $\omega_{c1}$  puis à  $-135^\circ$  en  $\omega_{c2}$ .

Il s'agit d'un premier pas vers la construction de diagrammes de Bode asymptotiques. 2.4. Diagrammes de Bode asymptotiques

## 2. Diagrammes de Bode asymptotiques :

A l'exception des résonances, le tracé asymptotique met en évidence la plupart des caractéristiques des fonctions de transfert. Par ailleurs, il est facile de tracer la réponse asymptotique d'un système d'ordre  $n$  après décomposition en produits de polynômes du premier et de polynômes du deuxième ordre (d'amortissement inférieur à 1), appelés fonctions élémentaires.

Une fonction de transfert quelconque  $H(p)$  peut se factoriser sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{\prod(1 + \tau_i \cdot p) \cdot \prod \left( 1 + \frac{2 \cdot a_j}{\omega_{nj}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{nj}^2} \cdot p^2 \right)}{\prod(1 + \tau_k \cdot p) \cdot \prod \left( 1 + \frac{2 \cdot a_l}{\omega_{nl}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{nl}^2} \cdot p^2 \right)}$$

Les diagrammes de Bode de chaque fonction élémentaire sont donnés sur la figure 2. La fonction de transfert  $H(p)$  est la multiplication des fonctions élémentaires ce qui se traduit par une somme dans le diagramme de Bode (la fonction logarithme transforme le produit en somme, la fonction argument de même).

Fonction	Diagramme de Gain	Diagramme de phase
$H(p) = \frac{1}{p}$		
$H(p) = p$		
$H(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p}$		
$H(p) = 1 + \tau \cdot p$		
$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot a}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}$		
$H(p) = 1 + \frac{2 \cdot a}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2$		

Figure 2

Le diagramme de Bode asymptotique se construit par la méthode suivante :

1. Factoriser la fonction de transfert de façon à faire apparaître les fonctions élémentaires.
2. Tracer le diagramme asymptotique de chaque fonction élémentaire en spécifiant les caractéristiques (pentes, pulsations de cassure).
3. Tracer l'allure du diagramme asymptotique final à basse fréquence (avant toutes les pulsations de cassure).
4. Poursuivre le tracé en tenant compte progressivement de chaque cassure, dans l'ordre croissant des pulsations.

Exemples: (voir TD)

### 3. Exploitation des diagrammes en ingénierie :

#### 3.1. Bande passante d'un composant :

La bande passante à  $-3\text{ dB}$  est l'intervalle de fréquence (ou de pulsation) pour lequel le module  $G(\omega)$  de la fonction de transfert est supérieur à  $G_{\text{Max}}(\omega)-3\text{ dB}$ , où  $G_{\text{Max}}(\omega)$  est la valeur maximale du module.

**La valeur de  $3\text{ dB}$  correspond à une amplitude diminuée de  $\sqrt{2}$  par rapport à la valeur maximale.**

Dans certains cas, la bande passante à  $-6\text{ dB}$  est utilisée, correspondant à une amplitude diminuée d'un facteur 2.

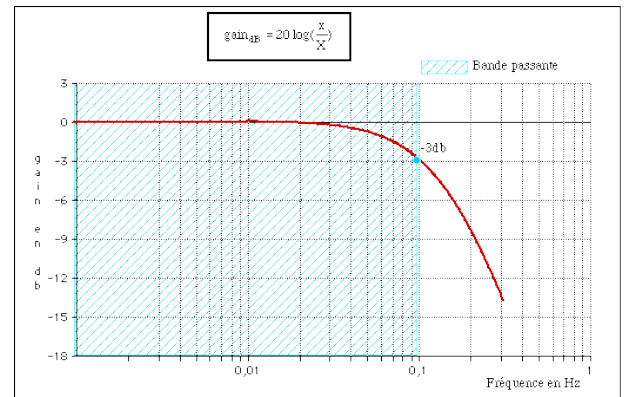
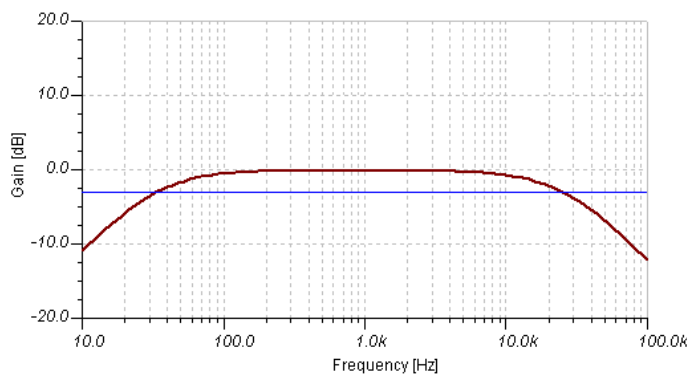


Figure 3

La figure 3 montre le tracé de la bande passante à  $-3\text{ dB}$  pour les cas d'un système « passe-bande » et d'un système « passe-bas ». La majorité des systèmes asservis se comportent comme des « passe-bas », c'est-à-dire qu'ils réagissent conformément aux consignes à basse fréquence et ne parviennent plus à suivre les mouvements rapides à haute fréquence. La bande passante s'étend alors de « 0 » à la pulsation de coupure, caractérisée par la limite à  $-3\text{ dB}$ .

**Dans le cas d'un système passe-bas peu ou pas oscillant, la bande passante est directement liée à la rapidité du système : plus la pulsation de coupure est élevée, plus le système est rapide.**

Cela se comprend facilement car pour qu'un système soit rapide, il faut que la sortie soit constituée de sinusoides hautes fréquences !

Cette observation peut être quantifiée sur les cas des premier et deuxième ordres :

- Pour un premier ordre, la pulsation de coupure à  $-3\text{ dB}$  vaut  $\frac{1}{\tau}$  et le temps de réponse à 5 % vaut  $3\tau$ .
- Pour un deuxième ordre d'amortissement  $a = 0.7$  (situation de rapidité optimale), la pulsation de coupure à  $-3\text{ dB}$  vaut  $\omega_n$  et le temps de réponse à 5 % vaut  $3/\omega_n$ .

### 3.2. Bande passante à 0 dB d'une fonction de transfert en boucle ouverte :

La bande passante d'un système asservi (en boucle fermée) est étroitement liée à la pulsation de coupure à 0 dB de sa fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO). En effet, en considérant un système à retour unitaire, la FTBF s'écrit :

$$FTBF(j \cdot \omega) = \frac{FTBO(j \cdot \omega)}{1 + FTBO(j \cdot \omega)}$$

Pour la pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO ( $\omega_{0dB}$ ), le module de la FTBO vaut 1 par définition. Pour des raisons de marges de stabilité (voir paragraphe 4.3.), la phase de la FTBO n'est jamais très éloignée de  $-90^\circ$  si bien que le module de la FTBF est proche de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**La pulsation de coupure à -3 dB de la FTBF ( $\omega_{-3dB}$ ) est donc proche de la pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO :  $\omega_{0dB} \approx \omega_{-3dB}$ .**

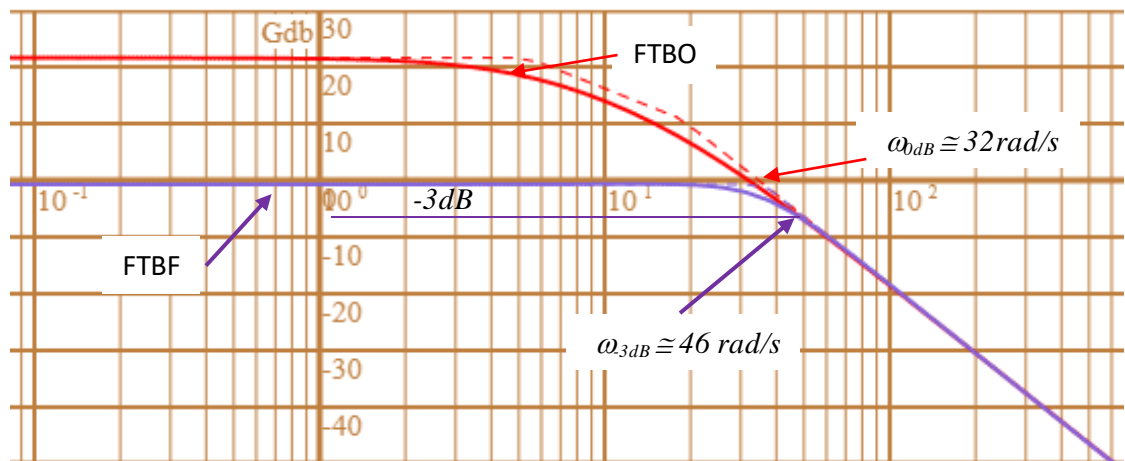


Figure 4

La figure 4 montre les diagrammes de Bode de gain d'une FTBF et de la FTBO associée. On remarque que  $\omega_{0dB} \approx \omega_{-3dB}$  et qu'au-delà de ces fréquences, la FTBF tend vers la FTBO, ce qui est tout à fait logique car :

$$FTBF = \frac{FTBO}{1 + FTBO} \xrightarrow{FTBO \rightarrow 0} FTBO.$$

### 3.3. Identification de modèle sur une mesure fréquentielle

De même qu'il est possible d'identifier un modèle sur la réponse temporelle indicielle mesurée sur un système, il est aussi possible d'identifier un modèle sur un diagramme de Bode expérimental.

Souvent, le diagramme de Bode de gain est relativement simple à mesurer à partir du rapport des amplitudes des sinusoïdes d'entrée et de sortie. La phase par contre n'est pas toujours mesurée car elle nécessite plus d'instrumentation (il faut déterminer le temps de décalage entre les deux sinusoïdes).

L'identification porte généralement sur des modèles du premier ou du deuxième ordre.

Dans le cas classique d'un système de type passe-bas, la présence d'une résonance ou pas, et la valeur de la phase (si elle a été mesurée) permet de choisir entre un module de premier ou deuxième ordre.

- La valeur du gain statique  $K$  est lue à basse fréquence, où le module sur le diagramme de Bode vaut  $20 \cdot \log K$ .
- La pulsation de cassure peut se mesurer sur la phase (si elle est mesurée :  $\phi(1/\tau) = -45^\circ$  pour un premier ordre et  $\phi(\omega_n) = -90^\circ$  pour un deuxième ordre) ou par l'intersection des asymptotes si la phase n'est pas disponible.
- le calcul de l'amortissement  $a$  peut se faire à partir de la valeur du module à la pulsation propre  $\omega_n$  :

$$|H(j \cdot \omega_n)| = \left| \frac{K \cdot \omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega_n^2 + j \cdot 2 \cdot a \cdot \omega_n \cdot \omega_n} \right| = \frac{K}{2 \cdot a}$$

### 3.4. Marges de stabilité :

#### 3.4.1. Lieu de transfert de la FTBO et stabilité de la FTBF :

Sans entrer dans aucune démonstration rigoureuse (cela sera fait plus tard), il est clairement visible sur la formule de Black<sup>2</sup> que le point  $-1$  pour la FTBO joue un rôle particulier pour la stabilité de la FTBF...

$$FTBF = \frac{FTCD}{1 + FTBO}$$

Si la FTBO s'approche près du point  $-1$  dans une certaine gamme de fréquence, le dénominateur de la FTBF tend vers zéro, donc le module de la FTBF devient très grand dans cette gamme de fréquence (résonance de la FTBF).

La qualité de la stabilité de la FTBF peut donc être mesurée par la distance de la FTBO au point complexe  $-1$  :

$$\begin{cases} x = \phi(\omega) = \arg(-1) = -\pi \\ y = G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log|-1| = 0 \text{ dB} \end{cases}$$

---

<sup>2</sup>  $FTBF = \frac{FTCD}{1 + FTBO} = \frac{H(p)}{1 + G(p) \cdot H(p)}$

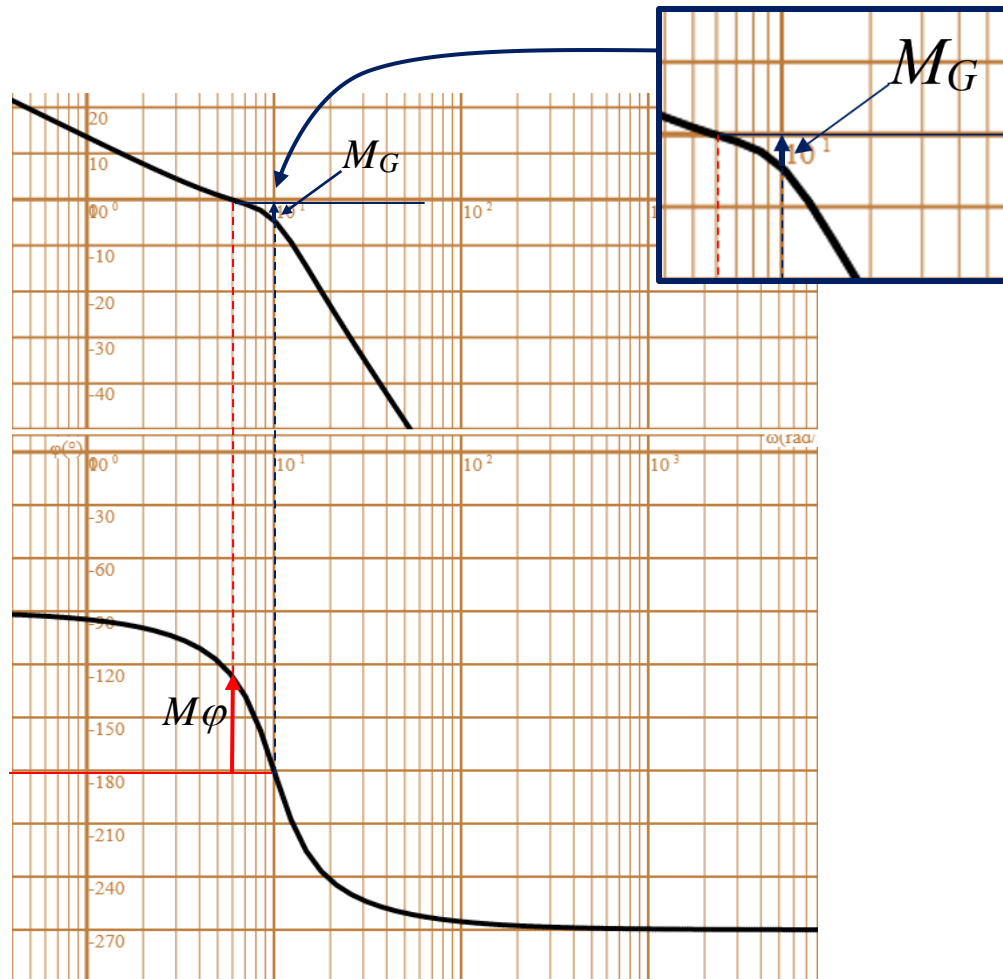


Figure 3

### 3.4.2. Marge de gain et marge de phase

Mesurer la distance à la courbe du point  $-1$  n'est pas simple car les abscisses et les ordonnées ne sont pas dans la même unité. Il est alors plus simple de mesurer les distances parallèlement aux axes, qui seront appelées marges de gain et de phase. Les définitions suivantes se limitent au cas des systèmes dont la FTBO est stable.

#### Définitions :

- La marge de gain  $M_G$  est la distance de la courbe à l'image du point  $-1$  mesurée parallèlement à l'axe du module.
- La marge de phase  $M_\phi$  est la distance de l'image du point  $-1$  à la courbe mesurée parallèlement à l'axe des phases.
- Ces marges peuvent facilement se retrouver sur le diagramme de Bode (figure 3) :
- La marge de phase se mesure en  $\omega_{M_\phi}$ , telle que  $G_{dB}(\omega_{M_\phi}) = 0 \text{ dB}$  et  $M_\phi$  est la distance de la droite à  $-180^\circ$  à la courbe.
- La marge de gain se mesure en  $\omega_{M_G}$  telle que  $\phi(\omega_{M_G}) = -180^\circ$  et  $M_G$  est la distance de la courbe à l'axe à  $0 \text{ dB}$ .
- La caractérisation de ces marges de stabilité est l'une des motivations principales de l'analyse fréquentielle des systèmes asservis. Les ordres de grandeur usuels sont de  $45^\circ$  à  $60^\circ$  pour la marge de phase et environ  $10 \text{ dB}$  pour la marge de gain.