

2.5 SLCI diagrammes de Bode

C2 Procéder à la mise en œuvre d'une démarche de résolution analytique	
Connaissances :	Savoir-faire :
Évaluation des performances : - diagrammes de Bode	Prévoir la réponse fréquentielle dans le plan de Bode

Sommaire

2.5.1 Initiation :	2
I diagramme de Bode d'un premier ordre :	2
II Tracés des diagrammes de Bode d'une fonction de transfert du 2 nd ordre à pôles réels $a \geq 1$...	2
2.5.2 Etude de la motorisation de la direction d'un chariot filoguidé :	5
I Présentation :	5
II Travail demandé :	5
Document réponse à la question Q4.2.....	6
2.5.3 Masse-ressort études temporelle et fréquentielle	7
I Présentation :	7
II Travail demandé :	7
2.5.4. Étude de la motorisation d'un robot d'exploration de la planète Mars	8
I Présentation :	8
II travail demande :	8
1 Préliminaires :	8
2 Asservissement en vitesse :	9
Feuille réponse dédiée à la question Q6.....	11
Annexe.....	12
Tableau permettant de formaliser votre recherche.	12

2.5.1 Initiation :

I diagramme de Bode d'un premier ordre :

Q1. Démontrer que pour une fonction de transfert du 1^{er} ordre, la chute de gain à la pulsation de cassure est de $-3dB$

Q2. Tracer sur les diagrammes logarithmiques du document réponse, les diagrammes de Bode asymptotiques puis l'allure des diagrammes de Bode des fonctions de transfert suivantes :

Q2.1 Les fonctions : $F_1(p) = \frac{1}{1+p}$, $F_2(p) = \frac{10}{1+p}$, $F_3(p) = \frac{1}{1+10 \cdot p}$.

Nota : Pour mettre en forme vos résultats avant les tracés, vous pouvez vous aider du tableau représenté à la fin du TD.

Q2.2. Les fonctions : $F_1(p) = 3 \cdot p$, $F_2(p) = \frac{3}{p}$.

Q3. Analyse des résultats obtenus :

Q3.1. A la lumière des résultats obtenus à la **Q2.1.** que se passe-t-il graphiquement lorsque l'on change le gain d'une fonction transfert ? Lorsque l'on change la constante de temps ?

Q3.2. A la lumière des résultats obtenus à la **Q2.2.** que se passe-t-il graphiquement lorsqu'on introduit un dérivateur ? un intégrateur ?

II Tracés des diagrammes de Bode d'une fonction de transfert du 2nd ordre à pôles réels $a \geq 1$

Soit la fonction de transfert suivante :

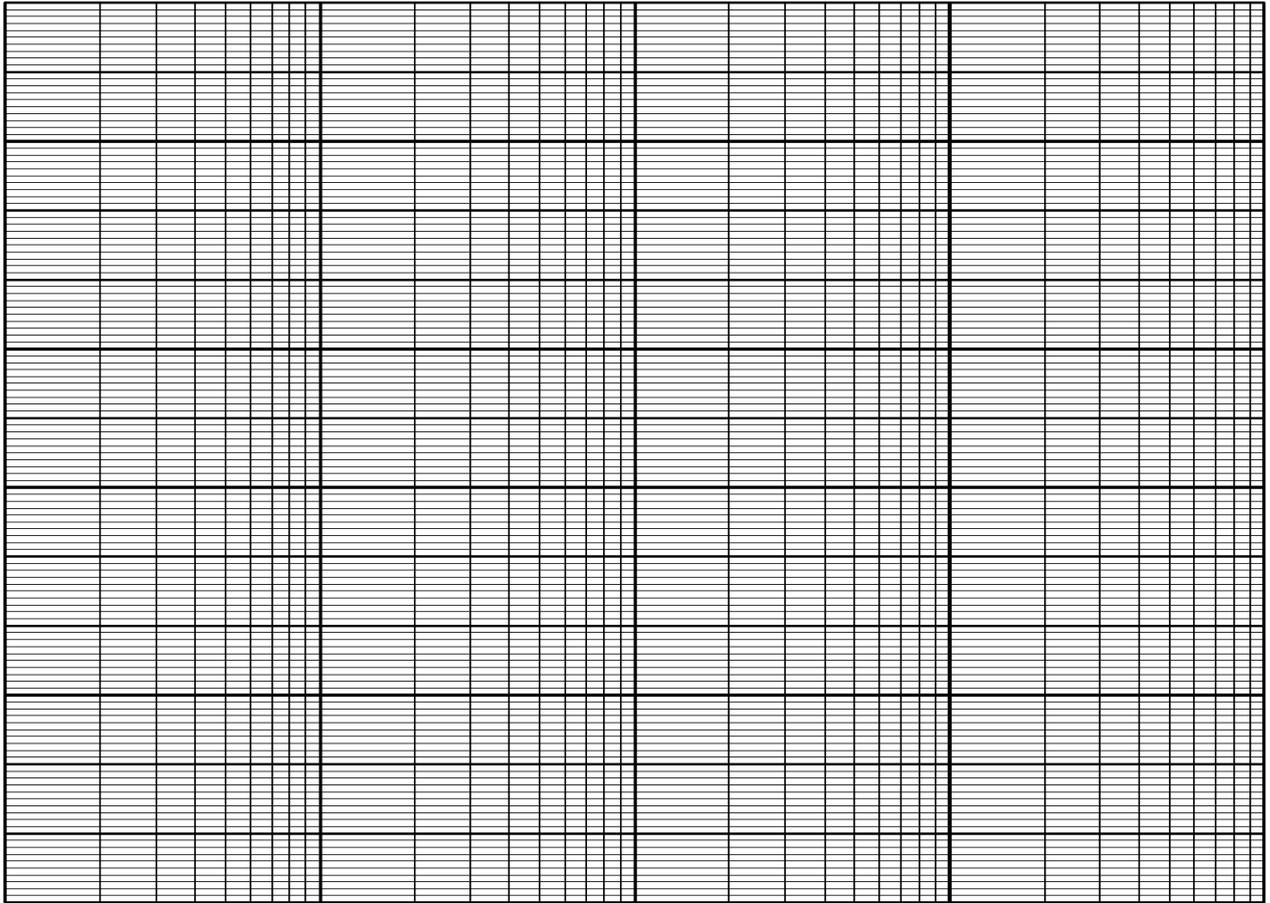
$$H(p) = \frac{200}{100 + 60 \cdot p + 5 \cdot p^2}$$

Q4. Mettre cette fonction de transfert sous la forme d'un produit de 2 premiers ordres $H_1(p)$ et $H_2(p)$.

Nota : Pour mettre en forme vos résultats avant les tracés, vous pouvez vous aider du tableau représenté en annexe à la fin de ce document.

Q5. Tracer les diagrammes de Bode de cette fonction de transfert (inutile de refaire la démo pour les tracés du 1^{er} ordre: vous pouvez exploiter directement les résultats du cours).

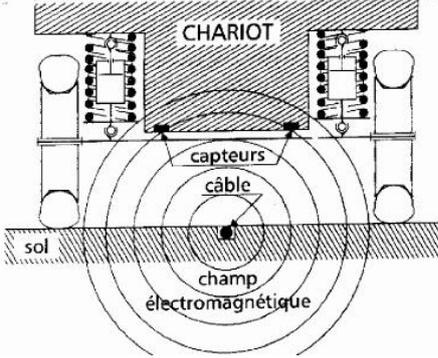
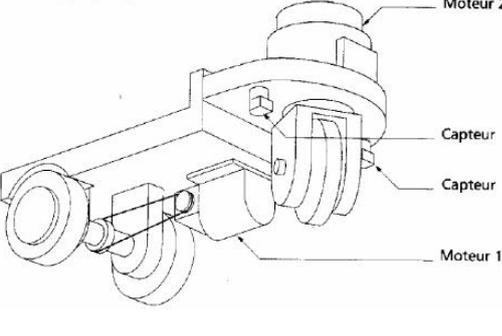
Réponses à la question Q5.



	Fonction transfert		Fonction complexe	Diagramme de gain			Diagramme de phase		
	$K =$	$\tau =$		Puls. Basses $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ Asymptote : $20 \cdot \log(K)$	Puls. Hautes $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ Asymptote : $-20dB/dec.$	coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$	Puls. Basses $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ Asymptote =	Puls. Hautes $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ Asymptote =	coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ $\phi(\omega_c) =$
$F_1(p)$									
$F_2(p)$									
$F_3(p)$									
$H_1(p)$									
$H_2(p)$									

2.5.2 Etude de la motorisation de la direction d'un chariot filoguidé :

I Présentation :

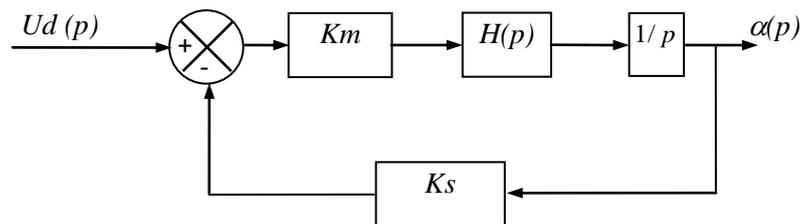
<p>Les chariots filoguidés sont des chariots guidés par un système électromagnétique. Un câble positionné juste sous le sol crée un champ électromagnétique. Le chariot porte deux capteurs disposés symétriquement qui le guident en détectant la différence de champ magnétique provoquée lorsque ce chariot s'éloigne de sa trajectoire définie par le câble. Ces deux capteurs agissent de telle sorte que cette différence soit nulle.</p>	
<p>La perspective ci-contre permet de visualiser, par dessous les éléments du système moteur du chariot (moteur 1) et dans l'axe vertical de la roue directrice avant on distingue le moteur 2.</p>	

En première hypothèse, on estime que le schéma fonctionnel de l'asservissement de direction est le suivant :

Avec :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + \tau_1 \cdot p)(1 + \tau_2 \cdot p)} ;$$

K_m et K_s sont des constantes.



On donne : $\tau_1 = 0.5 \text{ s}$; $\tau_2 = 0.02 \text{ s}$; $K_s = 10 \text{ V/rad}$; K_m reste une constante inconnue.

II Travail demandé :

- Q1. Déterminer les paramètres caractéristiques de $H(p)$.
- Q2. Exprimer la Fonction transfert en boucle ouverte du système (la mettre sous forme littérale puis numérique).
- Q3. Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée du système (la mettre sous forme littérale puis numérique).
- Q4. On étudie ce moteur dans le domaine fréquentiel sans tenir compte de K_m , c'est à dire $K_m=1$
 - Q4.1. Exprimer sous forme numérique le gain et la phase de la fonction transfert en boucle ouverte
 - Q4.2. Tracer¹ les diagrammes de Bode du gain et de la phase en étudiant tout d'abord les diagrammes asymptotiques puis en traçant les courbes.

Nota : En remarquant que votre $FTBO(p)$ est un produit de fonctions du premier ordre, je vous recommande ici d'utiliser la propriété d'additivité des systèmes linéaires.

Vous disposez en dernière page d'un exemple de tableau que vous pourrez utiliser pour formaliser votre recherche.

¹sur la feuille réponse prévue à cet effet

Document réponse à la question Q4.2

Diagramme de gain :

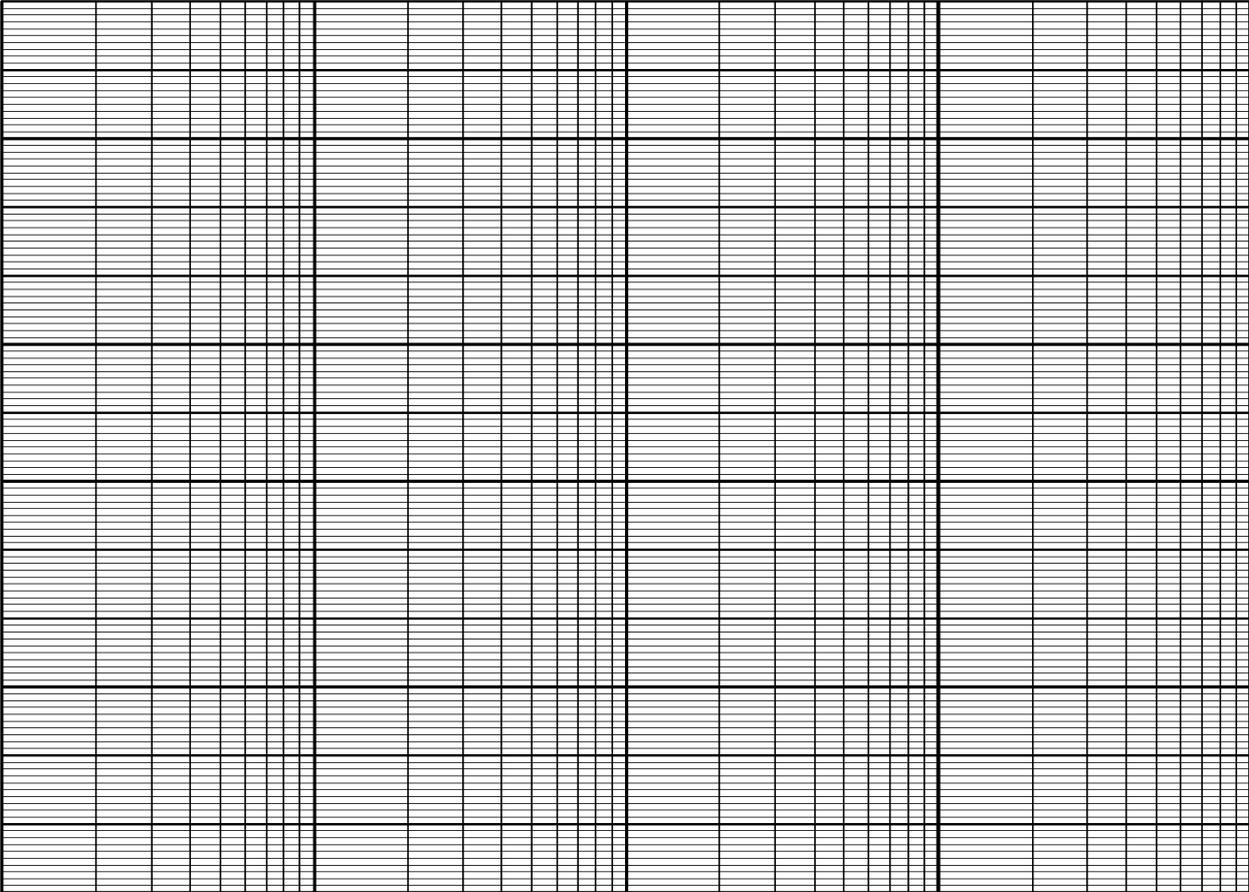
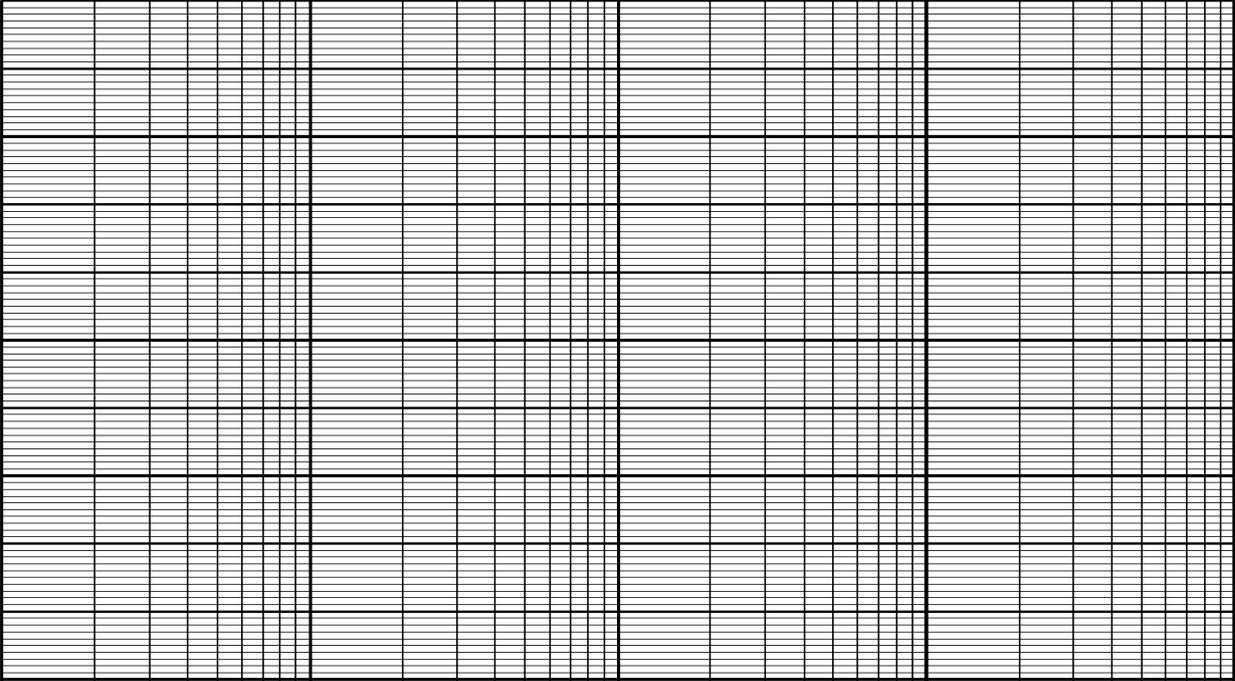


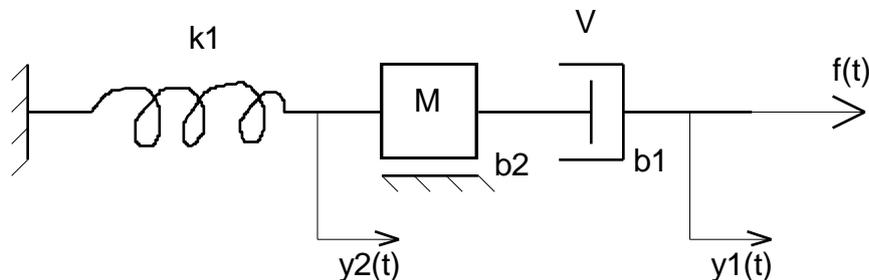
Diagramme de phase :



2.5.3 Masse-ressort études temporelle et fréquentielle

I Présentation :

Soit le système mécanique modélisé par le schéma suivant :



Ce système est constitué :

- d'un ressort de raideur $k1$
- d'un solide de masse M
- d'un élément V exerçant un frottement visqueux de constante $b1$

La masse est posée sur une table qui exerce un frottement visqueux de constante $b2$. Une force $f(t)$ est appliquée sur l'élément V .

$$M \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} = -k1 \cdot y_2(t) - b2 \cdot \frac{dy_2(t)}{dt} - b1 \cdot \frac{d(y_2(t) - y_1(t))}{dt}$$

$$\text{avec } f(t) = - b1 \cdot \frac{d(y_2(t) - y_1(t))}{dt}$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse M en projection sur l'axe horizontal donne l'équation ci-contre :

II Travail demandé :

Q1. Pour les conditions initiales nulles, donner la fonction transfert du système : $H(p) = \frac{Y_2(p)}{F(p)}$

Q2. Identifier de quel ordre est la fonction transfert et exprimer ses paramètres caractéristiques en fonction de $k1$, M , $b2$.

Q3. Déterminer les valeurs numériques des paramètres caractéristiques exprimés littéralement ci-dessus. On donne $M = 250 \text{ Kg}$, $k1 = 25\,000 \text{ N/m}$, $b2 = 1000 \text{ N/m/s}$

Q4. Donner la valeur numérique de $H(p)$.

Q5. On suppose que $f(t)$ est de la forme $f(t) = 250 \cdot \delta(t)$ ($f = 250 \text{ N}$). Déterminer l'expression de la réponse $y_2(t)$ et la tracer.

Q6. Etude fréquentielle :

Q6.1. Diagramme de Gain :

- Déterminer l'expression de $Y_2(j\omega)$
- Déterminer le gain $G \text{ (dB)}$ en Décibel de $Y_2(j\omega)$
- Faire une étude aux limites et donner la valeur de ω_c la pulsation de coupure.

- En consultant les résultats numériques de la question Q3 pensez-vous qu'il y a résonance ? Si oui, déterminer la valeur numérique de ω_r la pulsation de résonance. Indiquer la valeur de G (dB) pour cette pulsation.
- Tracer le diagramme.

Q6.2. Diagramme de phase :

- Déterminer la phase $\phi(\omega)$
- Faire une étude aux limites et donner la valeur de $\phi(\omega_c)$ la pulsation de coupure.
- Tracer le diagramme.

Q7. On décide d'optimiser la réponse du système en posant $a=0.7$.

Calculer alors la nouvelle valeur $b'2$ de $b2$, puis calculer la nouvelle valeur $H'2(p)$ de la fonction de transfert $H2(p)$ et tracer sur le même schéma que $y2(t)$ la nouvelle réponse $y'2(t)$.

Comparer les deux courbes et indiquer en quoi la réponse du système est optimisée.

2.5.4. Étude de la motorisation d'un robot d'exploration de la planète Mars

I Présentation :

Dans le cadre de l'exploration du système planétaire, le CNES (Centre National d'études Spatiales) a développé un prototype de robot. L'étude proposée ici concerne la régulation de vitesse d'une des roues motrices de ce robot.

Modélisation du moteur :

Le comportement du moteur est modélisé par les quatre équations suivantes :

$$u(t) = R \cdot i(t) + e(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} ; e(t) = k_e \cdot \omega_m(t) ; J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) ; C_m(t) = k_m \cdot i(t)$$

Avec :

$u(t)$: tension du moteur ; $e(t)$: force contre électromotrice du moteur ; $i(t)$: intensité dans le moteur ; $C_m(t)$: couple exercé par le moteur ; $\omega_m(t)$: vitesse angulaire du moteur.

Nota : les conditions initiales sont nulles.

II travail demande :

1 Préliminaires :

Q1. Déterminer sous forme canonique la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$, (le gain sera noté K_c).

Q2. Sachant que l'on a : $R = 1.1 \Omega$; $L = 0.5 \text{ mH}$; $k_m = 0.0259 \text{ Nm/A}$;

$k_e = 2.7 \text{ V/1000tr/min}$ (attention à l'unité !) ; $J = 3.32 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2$

- Déterminer les valeurs littérales et numériques des paramètres caractéristiques de $H(p)$
- Montrer que $H(p)$ peut se mettre sous la forme $H(p) = \frac{K_m}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$
- Déterminer les valeurs littérales et numériques de τ_1 et τ_2 .

Q3. Déterminer $\omega_m(t)$ lorsque $u(t)$ est un échelon de tension d'amplitude U_0 .

Exprimer le résultat en fonction de K_m , τ_1 , τ_2 et U_0 .

Préciser la valeur de $\omega_m(t)$ à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de $\omega_m(t)$ et la valeur finale, en fonction de U_0 , atteinte par $\omega_m(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

2 Asservissement en vitesse :

On désire asservir en vitesse la rotation du moteur.

Pour la boucle de mesure, la solution retenue est d'utiliser une génératrice tachymétrique, de gain $K_g = 0.1$, qui délivre une tension proportionnelle à $\omega_m(t)$ qui est comparée à la consigne..

Pour la chaîne directe, la solution retenue fait apparaître un correcteur représenté par $C(p)$, un amplificateur de puissance ($A = 5V / rad / s$) et le moteur représenté par $H(p)$.

Voir schéma de la structure ci-dessous :

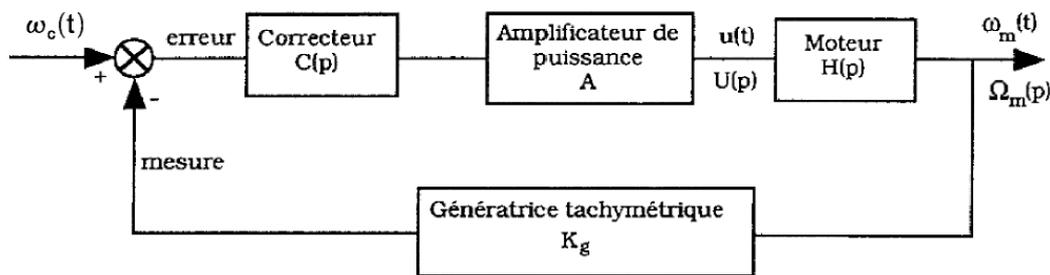


Figure 1

Dans la suite du problème, et indépendamment du résultat de la question 1.2, la fonction de transfert du moteur sera prise égale à :

$$H(p) = \frac{38.7}{(1 + 0.5 \cdot 10^{-3} \cdot p) \cdot (1 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot p)}$$

Dans un premier temps on prendra : $C(p) = K$

Q4. Déterminer littéralement $G_1(p)$, la fonction de transfert en boucle ouverte (F.T.B.O.), et $H_1(p)$ la fonction de transfert en boucle fermée (F.T.B.F.) de la boucle d'asservissement de la figure 1. Montrer que l'on peut écrire $H_1(p)$ sous la forme :

$$H_1(p) = \frac{K_s}{1 + 2 \cdot \frac{a}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}$$

Calculer les valeurs numériques de : K_s , a et ω_n en fonction de K .

Q5. Montrer que pour $K = K_0 = 0.27$ $a < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Déterminer les valeurs de K_s et de ω_n pour cette valeur K_0 .

Q6. Les diagrammes de Bode de la FTBO $G_1(j \cdot \omega)$, sont représentés dans le cas où $K = 1$, sur la figure page 11. Tracer, en superposition sur la figure du diagramme de gain, le diagramme asymptotique correspondant. Expliquer clairement la démarche adoptée sur votre copie.

Q7. Expliquer comment est modifié le diagramme de gain dans le cas où $K = K_0$. Qu'en est-il du diagramme de phase ?

Q8. Etude d'un critère de stabilité :

Un système à la limite de la stabilité est mal amorti. Son bon fonctionnement n'est pas assuré car une faible modification de ses caractéristiques peut le rendre instable. Par conséquent, on garantit la stabilité du système en prenant des marges de sécurité.

L'une de ses marges de sécurité s'appelle la marge de phase. Notée M_φ , elle est définie par :

$$M_\varphi = 180^\circ + \arg(G_1(j\omega_1))$$

avec : ω_1 pulsation pour laquelle $|G_1(j\omega_1)| = 1$ (donc $20 \cdot \log|G_1(j\omega_1)| = 0$)

Les marges de stabilité mesurent la distance au point critique de stabilité des lieux de Black, Nyquist ou Bode de la **fonction transfert en boucle ouverte**.

Une marge de phase petite entraîne un degré de stabilité petit. On utilise couramment une marge de phase de 45° qui garantit un fonctionnement correct de la plupart des systèmes.

Q8.1. Pour $K = 1$, Relever sur le diagramme de Gain, la pulsation ω_1 pour laquelle

$$|G_1(j\omega_1)| = 1.$$

Quelle est alors la valeur mesurée de la marge de phase? Conclusion ?

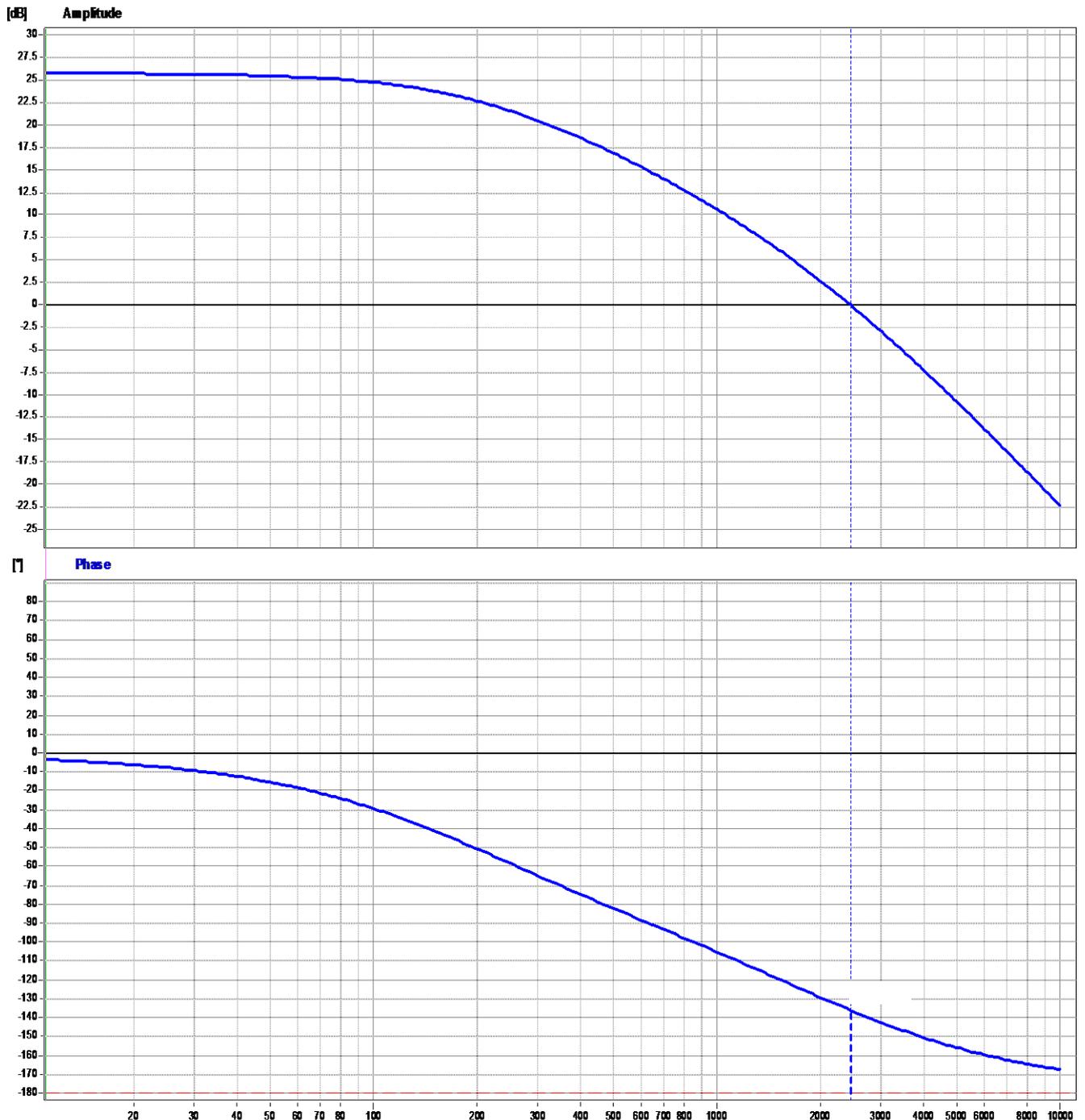
Q8.2. Pour $K = K_0$, Déterminer, à l'aide du diagramme de Gain modifié (voir 2.4),

la pulsation ω_1 pour laquelle $|G_1(j\omega_1)| = 1$.

Quelle est alors la valeur mesurée de la marge de phase ? Conclusion ?

Feuille réponse dédiée à la question Q6.

Q6. Les diagrammes de Bode de la FTBO $G_1(j \cdot \omega)$, sont représentés dans le cas où $K = 1$, sur la figure page suivante. Tracer, en superposition sur la figure du diagramme de gain, le diagramme asymptotique correspondant. Expliquer clairement la démarche adoptée sur votre copie.



Nom :

Annexe

Tableau permettant de formaliser votre recherche.

Nota : le nombre de lignes proposées ici est arbitraire et ne correspond pas forcément à l'exercice. C'est un exemple.

	Fonction transfert		Fonction complexe	Diagramme de gain			Diagramme de phase		
	K =	τ =		Puls. Basses $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ Asymptote : $20 \cdot \log(K)$	Puls. Hautes $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ Asymptote : $-20dB/dec.$	coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$	Puls. Basses $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ Asymptote =	Puls. Hautes $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ Asymptote =	coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ $\phi(\omega_c) =$
$H(p)$			$H = \frac{1}{1 + j \cdot \tau \cdot \omega}$						