

2.2- Modélisation des SLCI

Performances_ Entrées type

Exercices

Contenu

2.p.1. Portes rétractables.....	2
A-Analyse de la stabilité.....	2
B- Mesure de la rapidité	2
C- Mesure de la précision.....	2
D- Synthèse.....	2
2.p.2 Fosse de plongée Y-40 « The deep Joy ».....	3
2.p.3 Stabilité de différents modèles de système : critère algébrique.....	3
2.p.4 Etude des performances du système d'ouverture de porte automatique de TGV.	4
2.p.5 Robot humanoïde LOLA.....	6
1. Détermination du modèle de connaissance de l'asservissement en tangage.....	6
2. Etude des performances de l'asservissement :.....	7
Annexe 1 : Dépassements.....	9
Exemple :	9
Annexe 2 : Etude de la stabilité d'un système à partir de l'étude des pôles de sa fonction transfert.	10
Définition préalable :	10
Position du problème et définitions :.....	10
Critères de stabilité :	11
Annexe 3 : Détermination du temps de réponse d'un système du 1^{er} ou du 2nd ordre à partir de l'expression de sa fonction transfert.....	13
1. Cas d'un système du 1 ^{er} ordre	13
2. Cas d'un système du 2 nd ordre.....	13
Exercice 2.p.1 : DR1.....	14
Exercice 2.p.2 : DR2.....	15
Exercice 2.p.5 : DR3.....	16

2.p.1. Portes rétractables

Afin de valider un système de portes rétractables, des essais (correspondant à trois réglages différents) sont réalisés.

Pour chaque essai :

- La consigne de déplacement latéral appliquée est de 1 m ;
- La position de départ est de 0 m (les deux demi-portes se touchent).

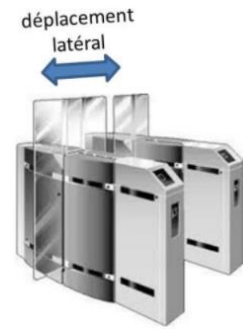


Figure 1 – Portes rétractables

Les résultats obtenus (distances réellement parcourues « s en m ») sont présentés en fin de document sur le document réponses DR1.

A-Analyse de la stabilité

Rappel : Un système est stable au sens **Entrée Bornée - Sortie Bornée (EB-SB)** si pour toute entrée bornée, la sortie est bornée.

Q1. A partir de l'étude des résultats obtenus, on demande, dans chacun des cas de vérifier :

- Si la réponse du système est stable.
- De compter le nombre de dépassements, lorsqu'ils existent.
- De chiffrer D_1 , la mesure du 1^{er} dépassement¹
- De chiffrer $D_{1\%}$, la mesure relative du 1^{er} dépassement
- En déduire une corrélation entre l'amplitude de $D_{1\%}$, le nombre de dépassements et la stabilité du système.
- De classer les réglages dont les réponses vont de la plus stable à la moins stable.

Q2. Sachant que les essais sont réalisés sur une seule porte, indiquer les risques liés au fait d'avoir une valeur du 1^{er} dépassement trop élevée sur un tel système.

B- Mesure de la rapidité

Le critère de rapidité retenu couramment est $t_{5\%}$.

Q3. Sur le DR1, on demande, dans chacun des cas d'estimer $t_{5\%}$, puis de classer les réponses de la plus à la moins rapide.

C- Mesure de la précision

Le critère retenu est l'erreur statique ϵ_s

Q4. On demande, dans chacun des cas d'estimer ϵ_s , puis de classer les réponses de la plus à la moins précise

D- Synthèse

Q5. Parmi les trois réglages proposés choisir celui le plus performant. Justifier votre choix en hiérarchisant, si besoin, vos critères de performances.

¹ Voir annexe 1 en fin de TD

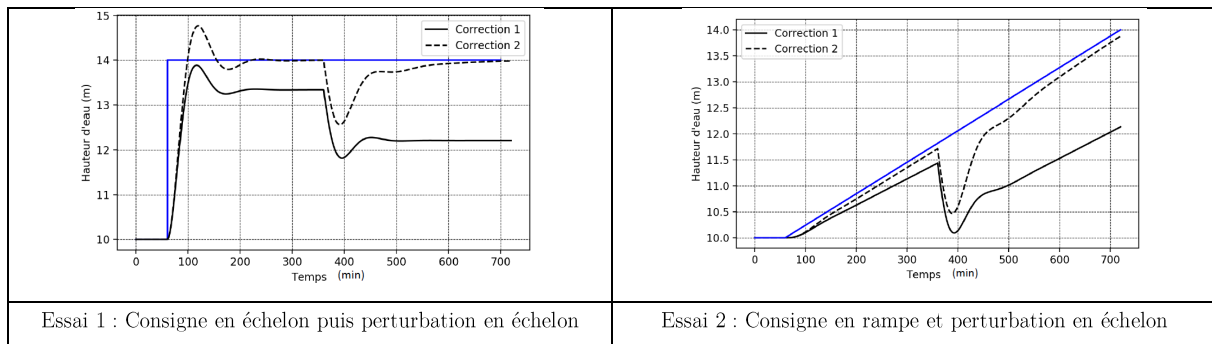
2.p.2 Fosse de plongée Y-40 « The deep Joy »

En vue d'améliorer les performances de régulation de niveau d'eau d'une fosse de plongée pour l'entraînement de plongeurs, des essais ont été réalisés avec deux réglages différents (appelés correction 1 et correction 2).



L'état initial des essais est le suivant :

- Hauteur d'eau stabilisée à 10 m et débit de sortie nul (perturbation).
- À l'instant $t_0 = 60 \text{ min}$, une consigne en échelon (essai 1) ou une rampe (essai 2) est appliquée.
- À l'instant $t_1 = 360 \text{ min}$, une perturbation en échelon est réalisée en ouvrant brusquement les vannes de sortie.



Les deux représentations de ces essais sont reproduites sur le document DR2, qui servira de support à votre réflexion.

Q1. Pour les deux corrections de l'essai 1, estimer approximativement les performances de stabilité et de précision.

Q2. Pour les deux corrections de l'essai 2, estimer approximativement les performances de stabilité et de précision.

2.p.3 Stabilité de différents modèles de système : critère algébrique

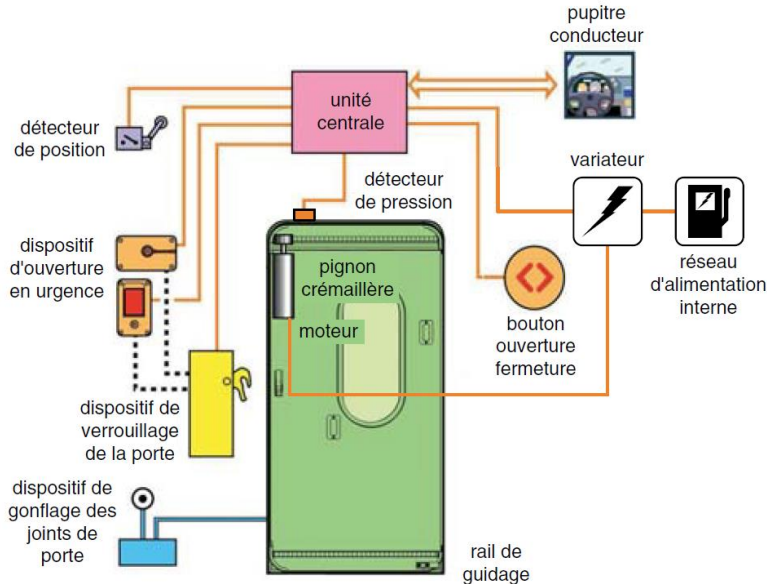
Pour traiter cet exercice il est nécessaire de lire l'annexe 2 placée en fin de document.

$$\begin{aligned}
 H_1(p) &= \frac{2 \cdot p + 1}{(p + 1) \cdot (p + 2)} & H_2(p) &= \frac{2 \cdot p^2 + 1}{p \cdot (p + 1) \cdot (p + 2)} & H_3(p) &= \frac{(2 \cdot p^2 + 1) \cdot (p + 3)}{(p + 1) \cdot (p^2 + 2)} \\
 H_4(p) &= \frac{2}{(p^2 + 4 \cdot p + 16) \cdot (p + 20)} & H_5(p) &= \frac{2 \cdot p + 1}{(p + 1) \cdot (p - 1)} & H_6(p) &= \frac{2}{(p^2 + 200 \cdot p + 10001) \cdot (p + 1)}
 \end{aligned}$$

Q1. Prévoir la performance de stabilité de chaque modèle. Pour les modèles stables, indiquer si leur réponse peut présenter des dépassements.

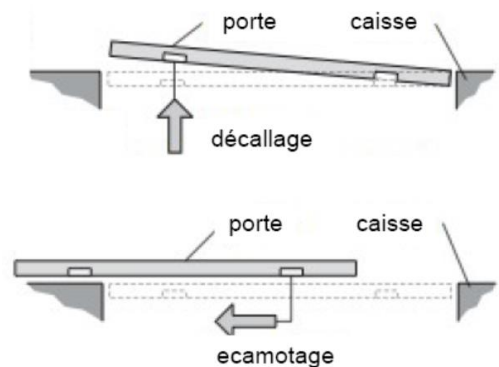
2.p.4 Etude des performances du système d'ouverture de porte automatique de TGV.

La figure ci-dessous montre l'interface assurant, à partir des informations délivrées par l'unité centrale de commande, la fermeture hermétique et le verrouillage d'une porte de TGV.



Interface fonctionnelle du système porte

Afin de satisfaire les contraintes d'encombrement, l'ouverture de la porte s'effectue selon l'enchaînement temporel de trois phases distinctes décrites à partir de la position « porte fermée » pour laquelle la face extérieure de la porte est alignée avec la face extérieure de la caisse : une phase de décalage puis une phase de louvoisement et enfin une phase d'escamotage. La phase primaire (décalage) puis la phase terminale (escamotage) sont définies par les figures ci-contre.



Les performances annoncées de la part du constructeur, dans la phase d'escamotage, sont les suivantes :

Critère	Valeur
Accès suffisant du wagon	850 mm
Temps d'ouverture de la porte en phase d'escamotage	$t \leq 4s$
Vitesse d'accostage de la porte en fin de phase d'escamotage	$V \leq 0,09m/s$

Pour ouvrir la porte, on utilise un moteur, dont la rotation est transformée en translation par l'intermédiaire d'un système pignon crémaillère. La translation de la porte est notée $y(t)$. L'angle de rotation du moteur est noté $\theta_m(t)$. Le lien entre $y(t)$ et $\theta_m(t)$ est $y(t) = R.\theta_m(t)$ où R est le rayon du pignon ($R=37\text{ mm}$).

On fait l'hypothèse qu'à l'instant initial, correspondant au début de la translation de la porte, la porte est immobile, avec $y(t=0)=0$ et $\theta_m(t=0)=0$ (toutes les autres conditions initiales seront également nulles, par conséquent).

On donne les équations caractérisant, le modèle de connaissance du moteur courant continu du système :

- $u_m(t) = e(t) + R \cdot i(t)$;
- $e(t) = k_e \cdot \omega_m(t)$
- $C_m(t) = k_m \cdot i(t)$
- $J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t)$

Avec :

- $u_m(t)$: tension du moteur ;
- $e(t)$: force contre électromotrice du moteur
- $i(t)$: intensité dans le moteur
- $C_m(t)$: couple exercé par le moteur ;
- $\omega_m(t)$: vitesse angulaire du moteur.

Q1. Exprimer ces équations dans le domaine de Laplace.

Q2. Montrer que, dans le domaine de Laplace, la relation entre $\Omega_m(p)$ et $U(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{K}{1 + T \cdot p}$$

Quel est l'ordre de $H_m(p)$?

Exprimer K et T en fonction de k_e , k_m , R et J .

Le moteur est soumis à un échelon de tension d'amplitude u_0 tel que : $u_m(t) = u_0 \cdot u(t)$.

On cherche à déterminer $\omega_m(\infty)$, la vitesse de rotation du moteur en régime permanent.

On note $\omega_m(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_m(t)$.

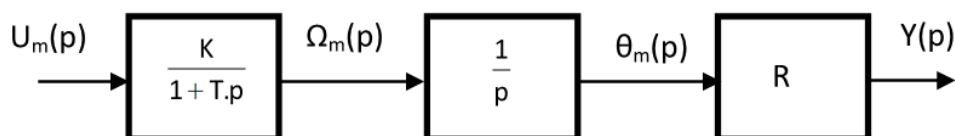
Q3. Exprimer $\omega_m(\infty)$, en fonction de K , T et u_0 .

On donne : $K=1,2 \text{ s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$, $T=0,16 \text{ s}$ et $u_0 = 5 \text{ V}$.

Q4. Calculer $\omega_m(\infty)$ sans oublier d'indiquer l'unité appropriée.

Q5. Déterminer $t_{5\%}$, le temps de réponse à 5% du moteur. Pour traiter cette question il est recommandé de lire l'annexe 3 placée en fin de document.

Le schéma bloc du système peut se mettre sous la forme suivante :



Q6. Déterminer l'expression analytique de $H_o(p) = \frac{Y(p)}{U_m(p)}$ en fonction de K , T et R .

Le système est soumis à un échelon de tension d'amplitude u_0 tel que : $u_m(t) = u_0 \cdot u(t)$.

Toujours avec $u_0 = 5V$.

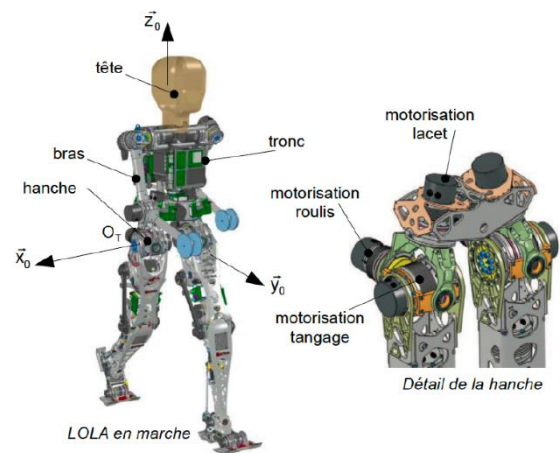
Q7. Déterminer l'expression de $Y(p)$, puis à l'aide de l'annexe 1 du cours (table des transformées de Laplace courantes), déterminer l'expression analytique de $y(t)$.

Q8. Déterminer la valeur numérique du déplacement de la porte au bout de $4s$, $y(4)$, et conclure quant à la capacité du système à satisfaire le critère d'accès au wagon du cahier des charges.

Q9. En partant de l'expression analytique trouvée à la Q7, calculer la valeur de la vitesse de translation de la porte à l'instant $t=4s$, $\dot{y}(4)$. Comparer avec la valeur de la vitesse d'accostage imposée par le cahier des charges. Conclusion.

2.p.5 Robot humanoïde LOLA

Le robot humanoïde LOLA, développé par l'Université de Munich, est un robot de forme humaine conçu pour un mode de marche rapide. Pour assurer une marche rapide et stable de LOLA, la méthode choisie est le contrôle de la verticalité du tronc du robot (voir ci-contre). Le haut du corps (tronc, bras, tête) sera maintenu vertical en réalisant un asservissement de position angulaire au niveau de l'articulation de la hanche (angle α). L'action mécanique de redressement est développée par l'ensemble de motorisation de tangage autour de l'axe $(O_T; \vec{x}_0)$.



1. Détermination du modèle de connaissance de l'asservissement en tangage

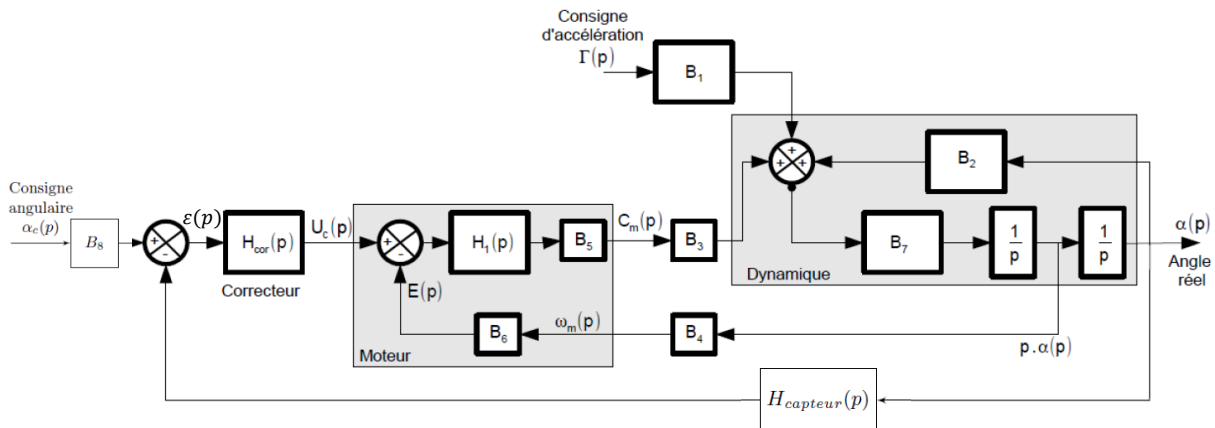
La chaîne structurelle permettant de modifier la posture du haut du corps autour de l'axe de tangage est composée :

- D'un moteur électrique synchrone à aimants permanents piloté par un variateur électronique, le comportement du moteur est considéré comme celui d'un moteur à courant continu dont les équations de comportement sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet \quad u_m(t) &= e(t) + R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}; & \bullet \quad C_m(t) &= k_m \cdot i(t) \\ \bullet \quad e(t) &= k_e \cdot \omega_m(t) \end{aligned}$$

- D'un réducteur Harmonic-Drive© de rapport de réduction $\frac{\dot{\alpha}(t)}{\omega_m(t)} = r = \frac{1}{100}$, avec $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$ la vitesse de rotation à la sortie du réducteur. On supposera, par ailleurs, que le rendement du réducteur est égal à 1, i.e. le couple en sortie du réducteur noté $C_R(t)$, est égal à $C_R(t) = \frac{C_m(t)}{r}$
- La mesure d'angle du système est réalisée à l'aide d'un capteur de fonction de transfert $H_{\text{capteur}}(p)$.

Le schéma-bloc du contrôle de la position angulaire du tronc de LOLA est représenté sur la figure suivante :



Q1. Passer les équations de comportement du moteur dans le domaine de Laplace, en déduire les fonctions de transfert des blocs B_5 , B_6 , et $H_1(p)$.

Q2. Déterminer B_8 pour que l'entrée du correcteur $\varepsilon(p)$ soit nulle lorsque $\alpha(p) = \alpha_c(p)$.

Q3. Identifier le bloc correspondant au réducteur, et donner son équation. ($B_i =$).

Une étude dynamique a permis d'établir l'équation différentielle du mouvement :

$$J_{eq} \cdot \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} - m_1 \cdot g \cdot z_G \cdot \alpha(t) = m_1 \cdot z_G \cdot \gamma(t) + C_R(t)$$

Avec :

- J_{eq} le moment d'inertie équivalent de l'ensemble du tronc ramené sur l'axe moteur [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]
- $\gamma(t)$ l'accélération du centre de masse du robot LOLA [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$]
- m_1 la masse du buste [kg]
- z_G la position du centre de masse [m];
- g l'accélération de la pesanteur [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$].

Q4. Ecrire l'équation différentielle du mouvement sous forme symbolique (on notera $\mathcal{L}(\gamma(t)) = \Gamma(p)$).

Q5. En déduire les blocs B_1 , B_2 et B_7 du schéma-blocs précédent.

Q6. Déterminer le dernier bloc B_i manquant.

2. Etude des performances de l'asservissement :

La stabilité du tronc a été vérifiée (non traité dans cet exercice), nous devons ici, analyser les performances en précision et rapidité de l'asservissement de position angulaire.

La consigne est nulle ($\alpha_c(t) = 0$), ainsi seule la perturbation (échelon) pendant 0,32 seconde va écarter le tronc du robot de sa posture verticale. Cette perturbation provient du mouvement de marche souhaité c'est à dire de l'accélération subie $\gamma(t)$.

Avec les réglages du correcteur, une simulation numérique a permis de tracer la réponse temporelle du système pour une perturbation $\gamma(t)$ (voir document réponses DR3 en fin de TD)

Les performances dynamiques de l'axe de tangage doivent vérifier les critères suivants :

Critère	Niveau
Erreur statique	$\pm 0,5^\circ$
Temps de réponse à 5%	0,2 s maxi
Dépassement	1° maxi

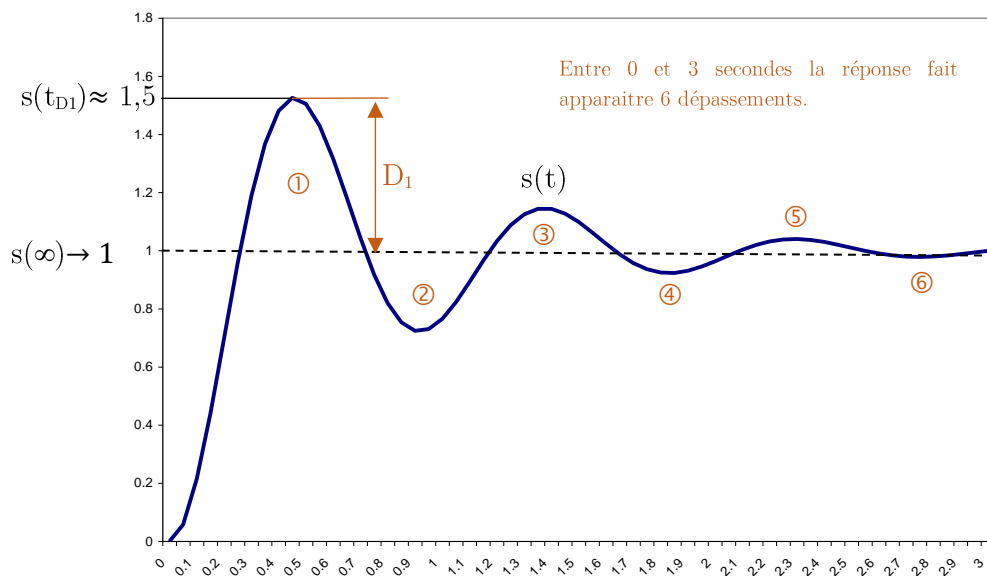
Q7. Déterminer graphiquement sur le document réponse DR3 le temps de réponse à 5%.

Q8. Déterminer graphiquement sur le document réponse DR3 le dépassement maximal.

Q9. Déterminer graphiquement sur le document réponse DR3 l'erreur statique.

Q10. Conclure sur la capacité du correcteur à vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

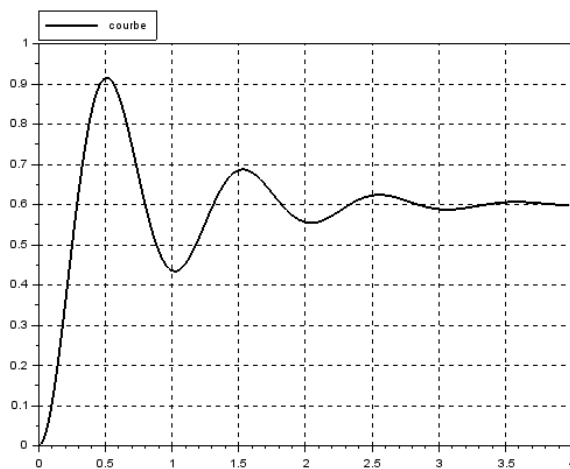
Annexe 1 : Dépassements.



La mesure du premier dépassement est donnée par : $D_1 = s(t_{D_1}) - s(\infty)$

La mesure relative du 1^{er} dépassement est donnée par : $D_{1\%} = \frac{s(t_{D_1}) - s(\infty)}{s(\infty)}$

Exemple :



Mesure de D_1 : $D_1 = s(t_{D_1}) - s(\infty)$ ici $D_1 = s(t_{D_1}) - s(\infty) = 0,92 - 0,6 = 0,32$

Mesure du dépassement relatif : $D_{1\%} = \frac{s(t_{D_1}) - s(\infty)}{s(\infty)} = \frac{0,92 - 0,6}{0,6} = 0,53$ soit environ 53 %

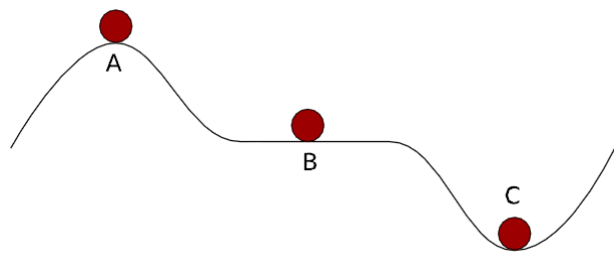
Annexe 2 : Etude de la stabilité d'un système à partir de l'étude des pôles de sa fonction transfert.

Définition préalable :

Un système est stable si sa réponse impulsionnelle (réponse à un essai Dirac) tend vers zéro en régime permanent.

Position du problème et définitions :

La stabilité peut être illustrée (voir figure ci-dessous) par une bille soumise à la pesanteur, roulant dans un rail.



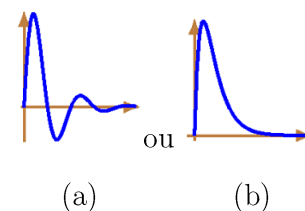
- A : position d'équilibre instable,
- B : position d'équilibre indifférent,
- C : position d'équilibre stable.

Une manière intuitive de préciser la notion de stabilité est d'imaginer un système que l'on écarte de sa position initiale par une impulsion (simulation par un essai Dirac) et de regarder son évolution :

S'il retrouve sa position initiale, il est stable : Cas **C**

(a) : racines complexes conjuguées à partie réelle négatives

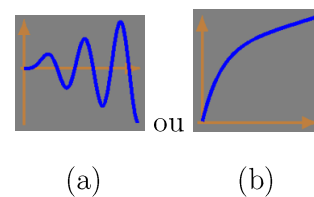
(b) : racine réelle à partie réelle négative



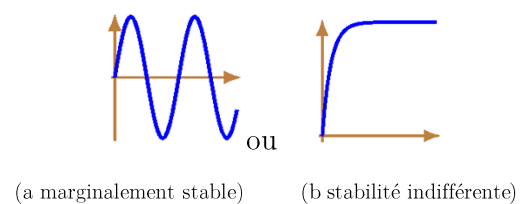
S'il s'en écarte, il est instable : Cas **A**

(a) : racines complexes conjuguées à partie réelle positives

(b) : racine réelle à partie réelle positive



S'il s'écarte de sa position initiale pour trouver une autre position stable différente de la première, le système s'écarte mais ne diverge pas (on parle alors de système à stabilité indifférente ou de système marginalement stable) : Cas **B**



Critères de stabilité :

Il existe entre autres deux méthodes principales de détermination du critère de stabilité :

La méthode algébrique basée sur l'étude des caractéristiques du dénominateur de la fonction transfert du système, et la méthode graphique dit du critère du revers qui sera étudiée plus tard.

Critère algébrique :

On note $H(p) = \frac{K' \cdot \frac{1+a_1 \cdot p+a_2 \cdot p^2+\dots+a_n \cdot p^n}{1+b_1 \cdot p+b_2 \cdot p^2+\dots+b_d \cdot p^d}}{p^\alpha} = \frac{K'}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$ la fonction transfert du système dont on cherche à évaluer la stabilité. Il se possible de statuer de cette stabilité en étudiant particulièrement $D(p)$ et la valeur de α (α est appelée la classe de $H(p)$)

Deux cas de figures peuvent se présenter :

1. Il est possible de factoriser $D(p)$

- La première étape consiste à factoriser le dénominateur $D(p)$.

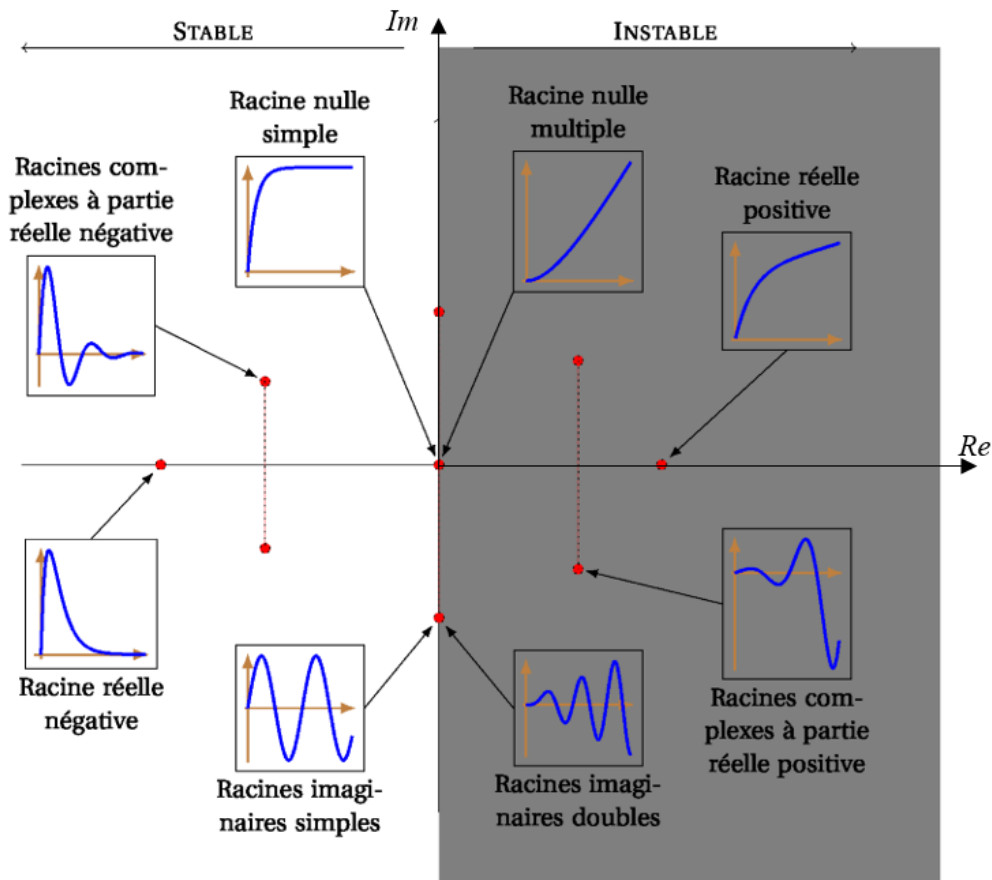
- $H(p)$ peut maintenant se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1+a_1 \cdot p+a_2 \cdot p^2+\dots+a_n \cdot p^n}{\prod_{i=0}^d (p-p_i)} \text{ avec } K = \frac{K'}{b_d}$$

Le dénominateur $D(p)$ peut se mettre sous la forme : $D(p) = \prod_{i=0}^d (p - p_i)$

- Les p_i sont appelés les pôles de $H(p)$, ils sont obtenus en cherchant les solutions de l'équation caractéristique : $1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_d \cdot p^d = 0$
- Ces pôles sont réels ou complexes.
- La deuxième étape consiste à analyser la nature de ces pôles et la valeur de α .
 - Le système sera considéré comme stable si (cas C vu plus haut) :
 - Tous les pôles sont à parties réelles strictement négatives
 - $\alpha = 0$
 - Le système sera considéré à stabilité indifférente si (cas B (b) vu plus haut) :
 - $\alpha = 1$ (un pôle nul = stabilité indifférente).
 - Le système sera considéré comme marginalement stable si (cas B (a) vu plus haut) :
 - Il existe au maximum un couple de pôles imaginaires purs conjugués.
 - Le système sera considéré instable si (cas A vu plus haut) :
 - Au moins un pôle possède une partie réelle positive
 - $\alpha > 1$ (il existe plus d'un pôle nul)
 - Il existe plus d'un couple de pôles imaginaires purs conjugués

- Toutes ces conditions peuvent être résumée dans le graphique suivant :



Positions des pôles et stabilité

2. La factorisation de $D(p)$ n'est pas possible.

Dans ce cas il n'est pas nécessaire de mettre $H(p)$ sous forme canonique, La fonction transfert apparaît alors sous la forme :

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n \cdot p^n}{b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_d \cdot p^d} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

On étudie toujours $D(p)$: $D(p) = b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_d \cdot p^d$

- Si certains coefficients b_i sont négatifs ou nuls alors $D(p)=0$ a des racines à parties réelles positives et le système est instable.
- Si tous les coefficients b_i sont positifs, on ne peut pas affirmer que les racines de $D(p) = 0$ sont à parties réelles négatives. Il est nécessaire de mettre en œuvre des méthodes (hors programme) pour statuer de la stabilité du système (critère de Routh).

Cependant cette condition est une condition suffisante pour les systèmes du premier et du second ordre.

Annexe 3 : Détermination du temps de réponse d'un système du 1^{er} ou du 2nd ordre à partir de l'expression de sa fonction transfert.

1. Cas d'un système du 1^{er} ordre

La forme canonique de la fonction transfert d'un système du 1^{er} ordre s'écrit :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

K et τ sont deux constantes appelées paramètres caractéristiques de $H(p)$:

- K s'appelle le gain
- τ s'appelle la constante de temps [s]

Dans le cas d'un système du 1^{er} ordre on estime $t_{5\%}$ le temps de réponse à 5% du système à :

$$t_{5\%} \approx 3 \cdot \tau$$

2. Cas d'un système du 2nd ordre

La forme canonique de la fonction transfert d'un système du 1^{er} ordre s'écrit :

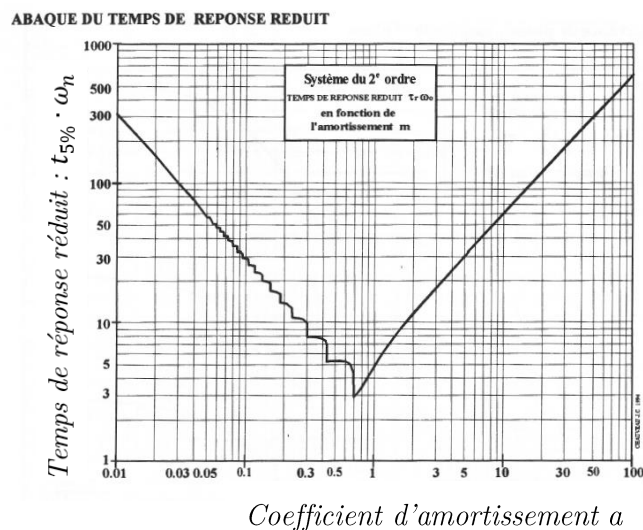
$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot a}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}$$

K , a ω_n sont trois constantes appelées paramètres caractéristiques de $H(p)$:

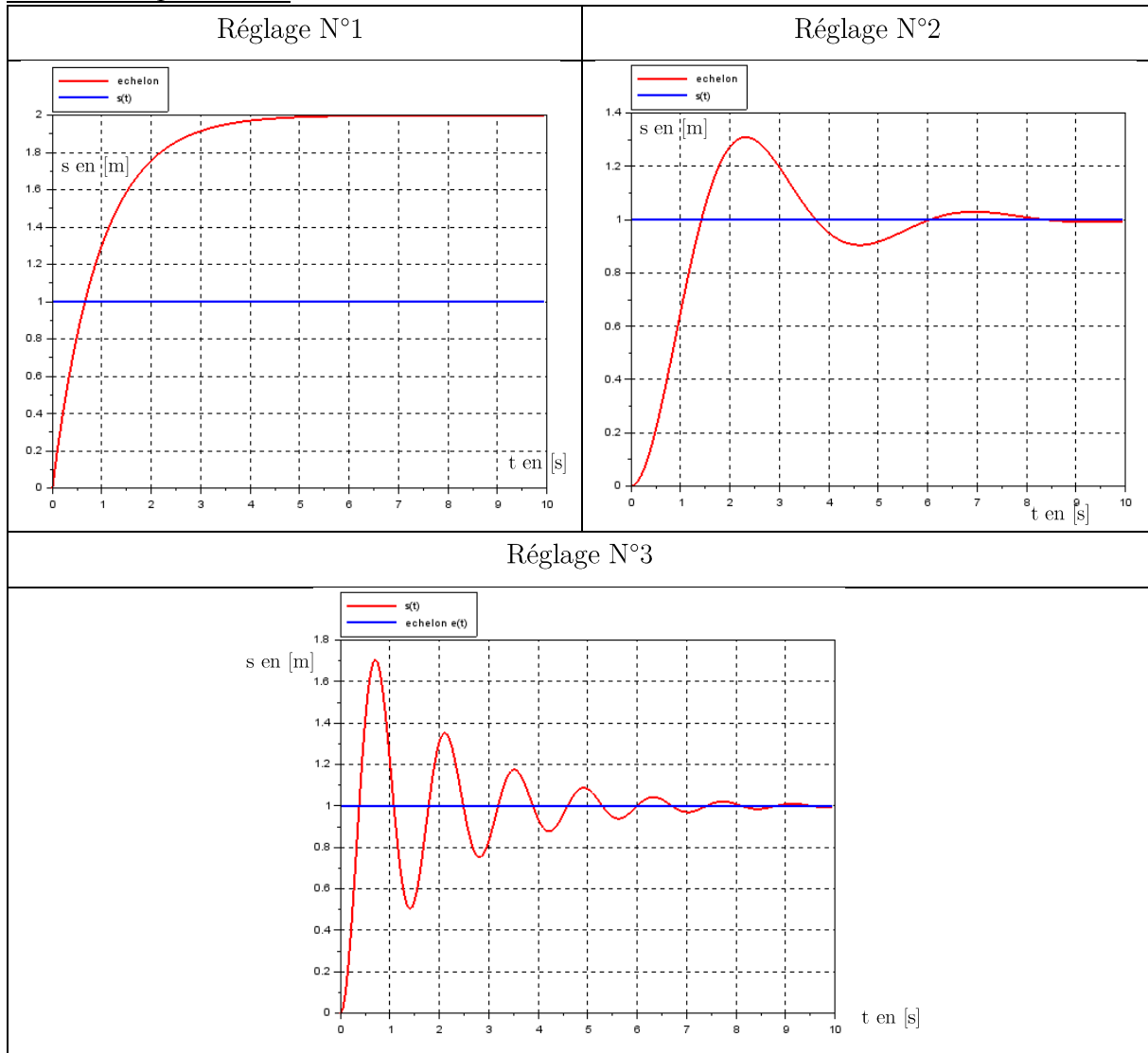
- K s'appelle le gain
- ω_n s'appelle la pulsation propre du système non amorti [rad.s⁻¹]
- a s'appelle le coefficient d'amortissement.

Contrairement aux systèmes du premier ordre, on ne sait pas exprimer d'une manière générale la valeur du temps de réponse par une expression analytique.

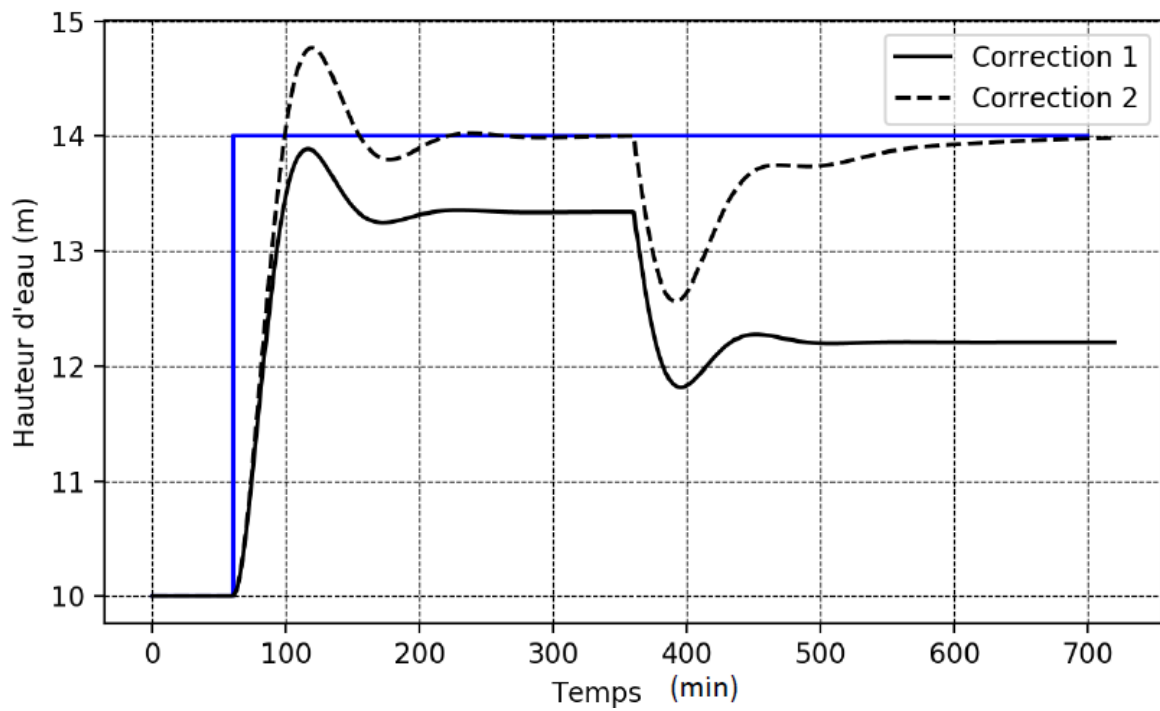
Généralement on procède à la recherche de $t_{5\%}$ à l'aide de l'abaque ci-dessous, il est nécessaire au préalable d'avoir calculé a et ω_n :



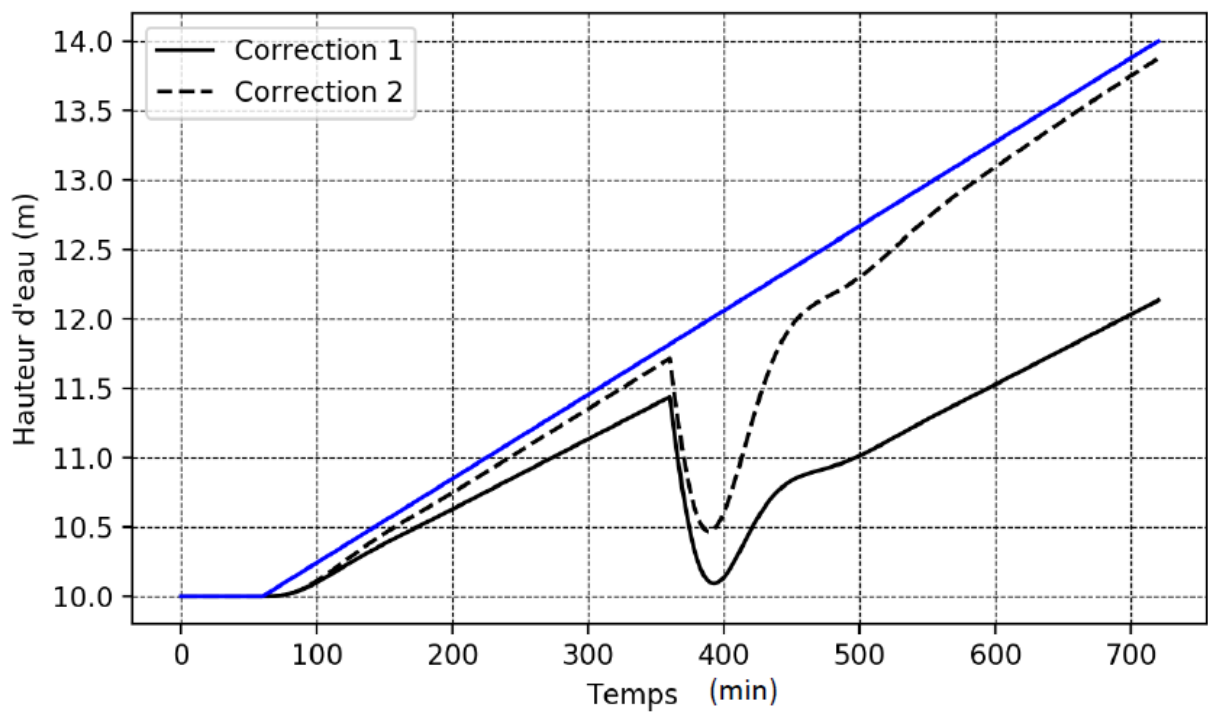
Exercice 2.p.1 : DR1



Exercice 2.p.2 : DR2

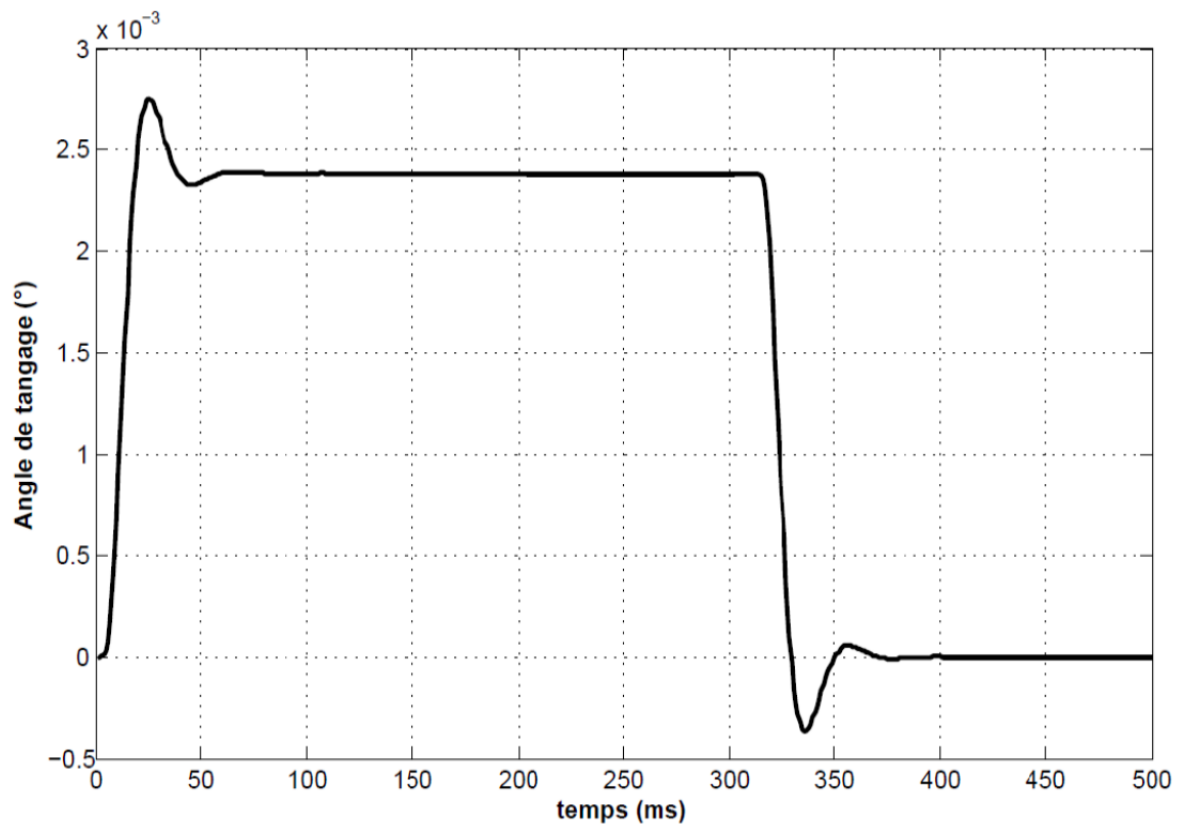


Essai 1 : Consigne en échelon puis perturbation en échelon



Essai 2 : Consigne en rampe et perturbation en échelon

Exercice 2.p.5 : DR3



Réponse temporelle $\alpha(t)$ du système pour une perturbation (échelon d'accélération) $\gamma(t)$