2- Modélisation

des Systèmes Linéaires Continus et Invariants:

Annexe 2

<u>1.Transformée de Laplace inverse</u>

Comme son nom l'indique, la transformée de Laplace inverse permet de revenir dans le domaine temporel. Son application est indispensable pour déterminer l'expression de la réponse temporelle $s(t)$ d'un système dont on connaît la transformée de Laplace $S(p)$ sous la forme d'une fraction rationnelle :

$$\mathrm{S(p)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \cdots + a_m \cdot p^m}{b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \cdots + b_n \cdot p^n} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

La méthode la plus commode pour déterminer cette expression temporelle consiste à faire une <u>décomposition en éléments simples</u> de la fraction rationnelle de façon à obtenir une somme algébrique de fractions simples dont on connaît la transformée de Laplace inverse et à revenir dans le domaine temporel.

L'étape de décomposition en éléments simples est sans conteste la plus technique. Une fois réalisée, la transformation inverse de chacun des éléments se fait par identification avec les fonctions élémentaires données dans l'annexe 1. Enfin, l'expression de la réponse temporelle recherchée est simplement obtenue par assemblage des différentes contributions.

<u>1.1Méthode de décomposition en éléments simples</u>

- Étape 0 : Causalité ?

On se limitera volontairement aux fractions rationnelles $\frac{N(p)}{D(p)}$ vérifiant le principe de causalité des systèmes physiques, c'est-à-dire telles que :

$$\deg N(p) \leq \deg D(p)$$

- Étape 1 : Factorisation du dénominateur

Si ce n'est déjà le cas, on mettra le dénominateur sous une forme factorisée

$$D(p) = \prod_{i=1}^{\deg D(p)} (p - p_i)$$

En recherchant ses pôles (racines) réels ou complexes conjugués – qu'ils soient simples ou multiples (puissance entière naturelle) – de façon à avoir :

$$D(p) = \underbrace{(p - a_1)}_{réel\ simple} \dots \underbrace{(p - a_2)^K}_{réel\ multiple} \dots \underbrace{(p - z_1) \cdot (p - \overline{z_1})}_{complexe\ conjugué\ simple} \dots \underbrace{(p - z_1)^K \cdot (p - \overline{z_1})^K}_{complexe\ conjugué\ multiple} \dots$$

- Étape 2 : Forme de la décomposition

Pour tous les pôles, on recherche la forme de la décomposée associée.

  - Pôle réel

  Pour chaque pôle réel a, de multiplicité $K \geq 1$, on cherchera une décomposition sous la forme :

$$\sum_{\beta=1}^{K} \frac{A_\beta}{(p-a)^\beta} = \frac{A_1}{p-a} + \frac{A_2}{(p-a)^2} + \cdots + \frac{A_K}{(p-a)^K}$$

  nécessitant la détermination des K coefficients réels $A_1, A_2, \ldots, A_K$.

  - Couple de pôles complexes conjugués

  Pour chaque couple de pôles complexes conjugués $z = \alpha + j \cdot \beta$ et $\bar{z} = \alpha - j \cdot \beta$, de multiplicité $K \geq 1$, on exploitera la forme polynômiale :

$$(p - z) \cdot (p - \bar{z}) = p^2 + b \cdot p + c$$

  avec $b = -2 \cdot \alpha$ et $c = \alpha^2 + \beta^2$ et on cherchera une décomposition sous la forme :

$$\sum_{\beta=1}^{K} \frac{B_\beta \cdot p + C_\beta}{(p^2 + b \cdot p + c)^\beta} = \frac{B_1 \cdot p + C_1}{p^2 + b \cdot p + c} + \frac{B_2 \cdot p + C_2}{(p^2 + b \cdot p + c)^2} + \cdots + \frac{B_K \cdot p + C_K}{(p^2 + b \cdot p + c)^K}$$

  nécessitant la détermination des coefficients réels $B_1, C_1, B_2, C_2, \ldots, B_K$ et C_K.

  Toutes les contributions sont ensuite sommées, en prenant soin de bien distinguer les coefficients à déterminer, pour recomposer la fraction rationnelle de départ.

- Étape 3 : Détermination des coefficients

  Pour déterminer tous les coefficients de la fraction rationnelle

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \sum_{\beta=1}^{K} \frac{\mathrm{A}_\beta}{(p-a)^\beta} + \sum_{\beta=1}^{K} \frac{\mathrm{B}_\beta \cdot p + C_\beta}{(p^2 + b \cdot p + c)^\beta} + \cdots$$

  Il est nécessaire de l'identifier à la fraction d'origine en passant par des calculs de limites ou en utilisant des valeurs particulières.

2. Exemple 1 : Pôles réels :

Soit la fraction polynomiale suivante :

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{x^2+1}{x^3-x^2-4\cdot x+4}$$

- Etape 1 : Factorisation de $D(x)$:

$$D(x)=x^3-x^2-4\cdot x+4=(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)$$

- Etape 2 : Forme de la décomposition :

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{x^2+1}{x^3-x^2-4\cdot x+4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$$

- Etape 3 : Détermination des coefficients inconnus :

Il s'agit de déterminer les coefficients A, B, C,…Il est possible d'utiliser plusieurs méthodes dont les principales sont les suivantes :

Méthode 1 : (déconseillée, car souvent lourde)

On réduit au même dénominateur :

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{x^2+1}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{A\cdot(x-2)\cdot(x+2)+B\cdot(x-1)\cdot(x+2)+C\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}$$

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{(A+B+C)\cdot x^2+(B-3\cdot C)\cdot x+(2\cdot C-4\cdot A)}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}$$

On identifie ensuite les numérateurs :

$$(A+B+C)\cdot x^2+(B-3\cdot C)\cdot x+(2\cdot C-4\cdot A)=x^2+1$$

Et on identifie les coefficients, ce qui nous donne un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} A+B+C=x^2 \\ B-3\cdot C=0 \\ 2\cdot C-4\cdot A-2\cdot B=1 \end{cases}$$ La résolution donne : $A=-\frac{2}{3}$; $B=\frac{5}{4}$; $C=\frac{5}{12}$

Méthode 2 :

Elle consiste à multiplier les deux membres par le dénominateur de la fraction dont on cherche le coefficient et à annuler le terme :

Détermination de A :

On forme : $\frac{(x-1)\cdot N(x)}{D(x)}$

$$\frac{(x-1)\cdot N(x)}{D(x)}=\frac{(x-1)\cdot(x^2+1)}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{A\cdot(x-1)}{x-1}+\frac{B\cdot(x-1)}{x-2}+\frac{C\cdot(x-1)}{x+2}$$

$$\frac{(x^2+1)}{(x-2)\cdot(x+2)}=A+\frac{B\cdot(x-1)}{x-2}+\frac{C\cdot(x-1)}{x+2}$$

On pose $x=1$, ce qui permet d'annuler les termes en B et en C et qui nous donne

$$A=-\frac{2}{3}$$

Détermination de B :

On forme : $\frac{(x-2)\cdot N(x)}{D(x)}$

$$\frac{(x-2)\cdot N(x)}{D(x)} = \frac{(x-2)\cdot(x^2+1)}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{A\cdot(x-2)}{x-1} + \frac{B\cdot(x-2)}{x-2} + \frac{C\cdot(x-2)}{x+2}$$

$$\frac{(x^2+1)}{(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{A\cdot(x-2)}{x-1} + B + \frac{C\cdot(x-2)}{x+2}$$

On pose $x=2$, ce qui permet d'annuler les termes en A et en C et qui nous donne

$$B = \frac{5}{4}$$

Détermination de C : Même démarche que pour les précédents et on obtient $C = \frac{5}{12}$

Méthode 3 : (efficace mais délicate)

Elle ne permet pas, en général, de déterminer tous les coefficients. On fait tendre x vers l'infini après multiplication par l'un des dénominateurs de la décomposition :

$$\frac{(x-1)\cdot N(x)}{D(x)} = \frac{(x-1)\cdot(x^2+1)}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{(x^2+1)}{(x-2)\cdot(x+2)} = A + \frac{B\cdot(x-1)}{x-2} + \frac{C\cdot(x-1)}{x+2}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{(x-2)\cdot(x+2)} = 1$ d'une part et $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{B\cdot(x-1)}{x-2} = B$ ainsi que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{C\cdot(x-1)}{x+2} = C$

Donc finalement on obtient :

$A+B+C = 1$, équation que l'on aurait trouvée également en choisissant un autre dénominateur.

Méthode 4 :

Elle permet de déterminer un terme. On donne une valeur numérique à x. Par exemple, connaissant A et B et en choisissant $x=1$, on obtient une équation à une inconnue C.

2.1. Exemples de décomposition de formes courantes :

Tous les exemples développés par la suite sont liés à la transformation de Laplace, c'est la raison pour laquelle la variable utilisée ne sera plus x, mais p, variable de Laplace (s est aussi très souvent associée à la variable de Laplace).

$$F(p) = \frac{1}{p\cdot(1+\tau\cdot p)}\ ;\ F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{(1+\tau\cdot p)}$$

En appliquant la méthode 2, il vient $A=1$ et $B=-\tau$.

$$F(p) = \frac{1}{p^2\cdot(1+\tau\cdot p)}\ ;\ F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{(1+\tau\cdot p)}$$

On applique la méthode 2 pour déterminer B et C, ($B=1$ et $C=\tau^2$) pour déterminer A, la méthode 2 est inadaptée, on utilise les méthodes 3 ou 4 ($A=-\tau$).

$$F(p) = \frac{1}{p\cdot(1+\tau\cdot p)^2}\ ;\ F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+\tau\cdot p} + \frac{C}{(1+\tau\cdot p)^2}$$

On applique la méthode 2 pour déterminer A et C, ($A=1$ et $C=-\tau$) pour déterminer B, la méthode 2 est inadaptée, on utilise les méthodes 3 ou 4 ($B=-\tau$).

$$F(p) = \frac{1}{p^2\cdot(1+\tau\cdot p)^2}\ ;\ F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1+\tau\cdot p} + \frac{D}{(1+\tau\cdot p)^2}$$

On applique la méthode 2 pour déterminer B et D, ($B=1$ et $D=\tau^2$) pour déterminer A et C, la méthode 2 est inadaptée, on utilise les méthodes 3 ou 4 ($A=-2\cdot\tau$ et $C=2\cdot\tau^2$).

$$F(p) = \frac{1}{(1+\tau_1 \cdot p)\cdot(1+\tau_2 \cdot p)} \; ; \; F(p) = \frac{A}{1+\tau_1 \cdot p} + \frac{B}{1+\tau_2 \cdot p}$$

En appliquant la méthode 2, il vient $A = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}$ et $A = -\frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}$.

3. Exemple 2 : Pôles complexes :

$F(p) = \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)\cdot(1+\tau \cdot p)}$; $F(p) = \frac{A}{1+\tau \cdot p} + \frac{B \cdot p + C}{p^2+\omega^2}$

On applique la méthode 2 pour A, B et C

On forme :$(1 + \tau \cdot p) \cdot F(p) = \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)} = A + \frac{(B \cdot p + C)\cdot(1+\tau \cdot p)}{(p^2+\omega^2)}$

On pose : $p = -\frac{1}{\tau}$ il vient :

$$A = \frac{\omega}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} = \frac{\omega \cdot \tau^2}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}$$

On forme :$(p^2 + \omega^2) \cdot F(p) = \frac{\omega}{1+\tau \cdot p} = \frac{A \cdot (p^2+\omega^2)}{1+\tau \cdot p} + B \cdot p + C$

On pose : $p = j \cdot \omega$ on trouve l'équation complexe :

$$\frac{\omega}{1 + \tau \cdot j \cdot \omega} = B \cdot j \cdot \omega + C$$

$$\omega = (B \cdot j \cdot \omega + C) \cdot (1 + \tau \cdot j \cdot \omega) = C - B \cdot \tau \cdot \omega^2 + j \cdot (B \cdot \omega + C \cdot \tau \cdot \omega)$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, il vient deux équations réelles :

$$\begin{cases} \omega = C - B \cdot \tau \cdot \omega^2 \\ 0 = B \cdot \omega + C \cdot \tau \cdot \omega \end{cases}$$

D'où :

$$C = \frac{\omega}{1+\tau^2 \cdot \omega^2} \text{ et } B = \frac{-\tau \cdot \omega}{1+\tau^2 \cdot \omega^2}$$