

2- Modélisation

des Systèmes Linéaires Continus et Invariants

Contenu :

<u>1 Introduction.....</u>	<u>2</u>
1.1 Commande des systèmes automatisés.....	2
1.2 Structure d'un système asservi	4
1.3 Causalité d'un système	7
<u>2 Modélisation du comportement dynamique d'un système.....</u>	<u>7</u>
2.1 Objectif de la modélisation	7
2.2 Hypothèses de modélisation.....	8
2.2.1 Systèmes continus	8
2.2.2 Systèmes linéaires.....	9
2.2.3 Systèmes invariants.....	10
2.3 Systèmes linéaires continus invariants.....	10
2.4 Description par des équations différentielles.....	10
<u>3 Résolution par la transformée de Laplace.....</u>	<u>11</u>
3.1 Définition et intérêts.....	11
3.2 Propriétés élémentaires.....	13
3.3 Transformée de Laplace de fonctions usuelles.....	14
3.4 Fonction de transfert	14

1 Introduction

Un système est un assemblage d'éléments interconnectés constitué naturellement ou artificiellement pour accomplir une tâche prédéfinie.

- Son état est affecté par une ou plusieurs variables : les **entrées** du système.
- Le résultat de l'action des entrées est la **réponse** du système qui peut être caractérisée par le comportement d'une ou plusieurs variables de sorties.

Ils sont généralement représentés par un **schéma fonctionnel** consistant en un bloc, c'est-à-dire un rectangle, sur lequel les signaux d'entrée sont représentés par des flèches entrantes sur la gauche. L'action des entrées produit de manière causale des effets mesurés par des signaux de sortie représentés par des flèches sortantes sur la droite (figure 1).



Figure 1 – Schémas fonctionnels d'un système monovariante (a), d'un système multivariable (b)

Chaque système peut être caractérisé par un nombre fini de variables qui peuvent être de natures différentes. Parmi les entrées affectant un système, on peut distinguer :

- les **commandes** qui ont pour but d'exercer des actions entraînant le fonctionnement souhaité du système
- les **perturbations** qui troublent le fonctionnement désiré (figure 2).

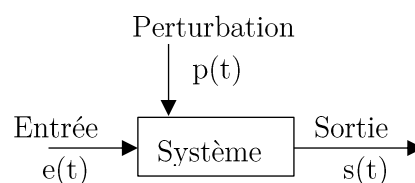


Figure 2 – Commande $e(t)$ et perturbation $p(t)$ d'un système

En l'absence de perturbation, il est imaginable de créer un signal de commande d'un système produisant le signal de sortie souhaité. Par contre, en présence de perturbations, il est fort probable que les signaux de sortie ne correspondent pas à ceux souhaités. L'introduction d'un système de commande devient alors nécessaire.

1.1 Commande des systèmes automatisés

L'automatique est la discipline scientifique qui traite de la caractérisation, de la conception et de la réalisation du système de commande des systèmes automatisés.

Définition 1.1 (Système automatisé)

Un système automatisé est un système réalisant des opérations et pour lequel l'intervention humaine est limitée à la programmation du système et à son réglage préalable.

Définition 1.2 (Système de commande)

Un système de commande est un système dont la vocation est de piloter un processus.

Le but d'un système de commande est d'exercer des actions entraînant une amélioration du comportement et donc des performances d'un système ou d'un processus.

Un système de commande est toujours associé à un processus (la partie opérative) qu'il doit commander. Quelle que soit sa nature, il est toujours possible de classer les différentes structures de commande en deux catégories :

- les structures de commande en boucle ouverte ou directe (figure 3a) ;
- les structures de commande en boucle fermée ou à rétroaction (figure 3b).

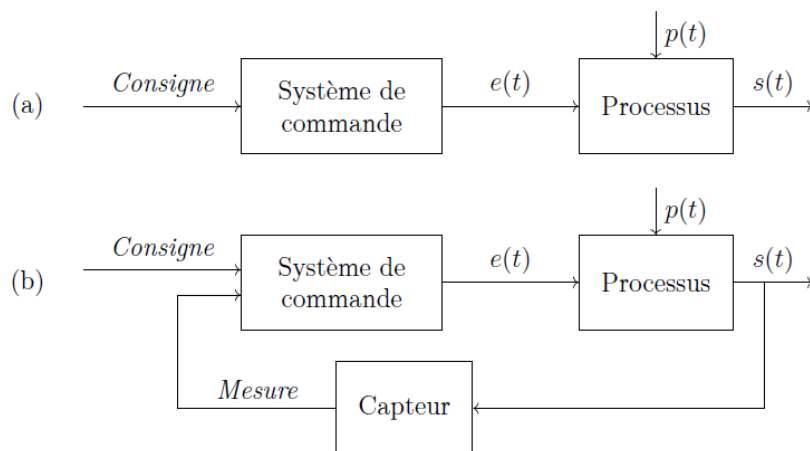
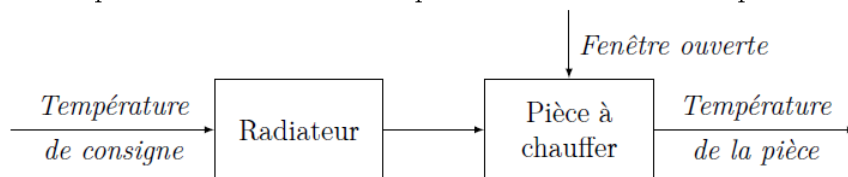


Figure 3 - Commande en Boucle Ouverte (a) et en Boucle Fermée (b) d'un processus

Exemple 1.1 (Chauffage d'une pièce)

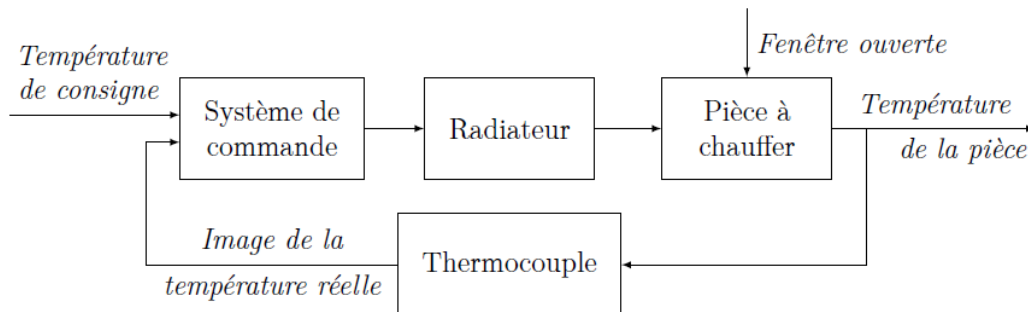
Considérons le chauffage par un radiateur d'une pièce dont on souhaite maintenir la température à 20°C (température de consigne). Pour une température extérieure donnée, il est probable qu'un réglage du radiateur permette d'avoir une température de 20°C dans la pièce.



Seulement, si une fenêtre donnant sur l'extérieur, à une température plus faible, est ouverte (la perturbation), il est fort probable que la température de la pièce va diminuer et ne respectera plus la température de consigne. Pour recouvrer les 20°C souhaités, il sera alors nécessaire d'augmenter artificiellement la température de consigne pour augmenter l'apport de chaleur.

Exemple 1.2 (Chauffage d'une pièce)

Pour maintenir effectivement la température d'une pièce à 20°C, il est nécessaire de disposer d'un capteur de température appelé un thermocouple et d'agir sur la commande du radiateur. Pour que cette action soit automatisée, il est nécessaire de relier le capteur à un système de commande afin qu'il compare la valeur réelle de la température à la consigne et détermine la commande du radiateur en fonction.



Avec un tel système de commande, si une fenêtre donnant sur l'extérieur est ouverte, il est fort probable que la température de la pièce diminue momentanément : c'est l'effet de la perturbation. Seulement, avec une commande adaptée (plus élevée), l'apport de chaleur par les radiateurs augmentera afin que la pièce recouvre automatiquement les 20°C souhaités.

Si une structure de commande avec rétroaction permet d'améliorer les performances d'un processus, il est toutefois important de remarquer que cette structure de commande ne présente pas que des avantages : elle nécessite l'emploi de capteurs qui augmentent le coût d'une installation et les réglages de stabilité et de précision de ces systèmes sont plus délicats et nécessitent de mettre en œuvre des outils plus complexes.

1.2 Structure d'un système asservi

Les systèmes asservis forment la plus grande partie des systèmes automatisés que nous allons étudier cette année. Leur objectif principal est de maîtriser l'évolution d'une ou plusieurs grandeurs physiques (température, pression, vitesse, pH, . . .) d'un processus en fonction de contraintes de fonctionnement fixées par un cahier des charges fonctionnel et ceci dans un environnement perturbé.

Définition 1.3 (Système asservi)

Un système asservi est l'association d'un processus, de capteurs et d'un système de commande permettant, à partir des consignes, de piloter une ou plusieurs grandeurs physiques du processus.

Les systèmes asservis sont caractérisés par la présence de capteurs permettant d'obtenir une image des grandeurs physiques que l'on souhaite piloter appelées les grandeurs asservies. La présence de capteurs est indispensable car ils permettent de contrôler l'état du processus dont le système de commande, par l'intermédiaire du régulateur, tient compte pour élaborer (corriger) sa commande. Les systèmes asservis sont généralement décomposés en une partie opérative (le processus), une partie d'observation (les capteurs) et une partie commande (figure 4).

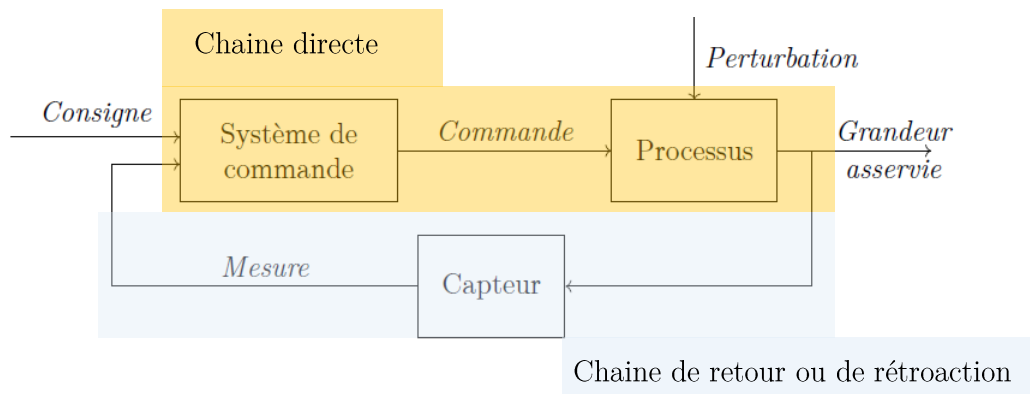


Figure 4 - Structure d'un système asservi

Cette structure fait apparaître :

- Une chaîne directe comprenant une partie de la chaîne d'information associée au système de commande et la chaîne d'énergie associée au processus
- Une boucle de rétroaction comprenant un capteur.

Ce capteur mesure en permanence l'évolution de la sortie et en retourne une image à la partie commande.

Pour pouvoir être comparées, la consigne et la mesure doivent être de même nature ce qui nécessite la plupart du temps de mettre en forme la consigne avec un adaptateur de consigne. Ensuite, en fonction de l'écart fournit par le comparateur, une nouvelle commande va être calculée par le régulateur et envoyée au processus après amplification (figure 5).

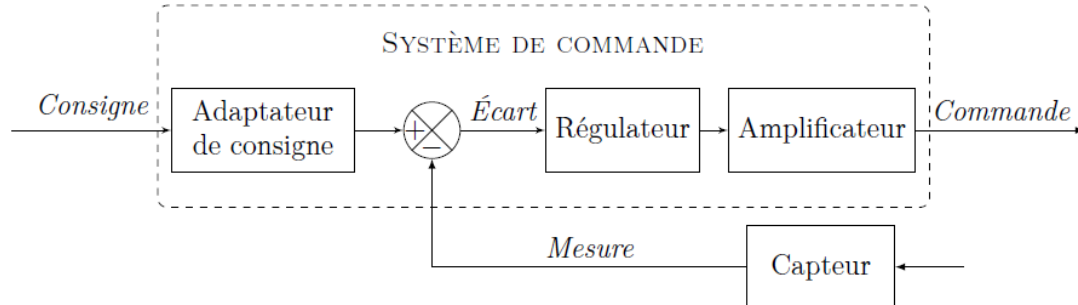


Figure 5 – Structure générique d'un système de commande.

Le système de commande et le processus sont reliés par l'information « *Commande* » reçue par le pré-actionneur. Ce composant, à l'interface des chaînes d'information et d'énergie, module l'apport en énergie de l'actionneur à partir de l'information de commande.

L'actionneur qui lui est relié convertit un type d'énergie (électrique, hydraulique, etc.) en un autre (généralement en énergie mécanique). L'énergie est ensuite transmise, *via* les transmetteurs de puissance, à l'effecteur sur lequel s'appliquent les perturbations (figure 6).

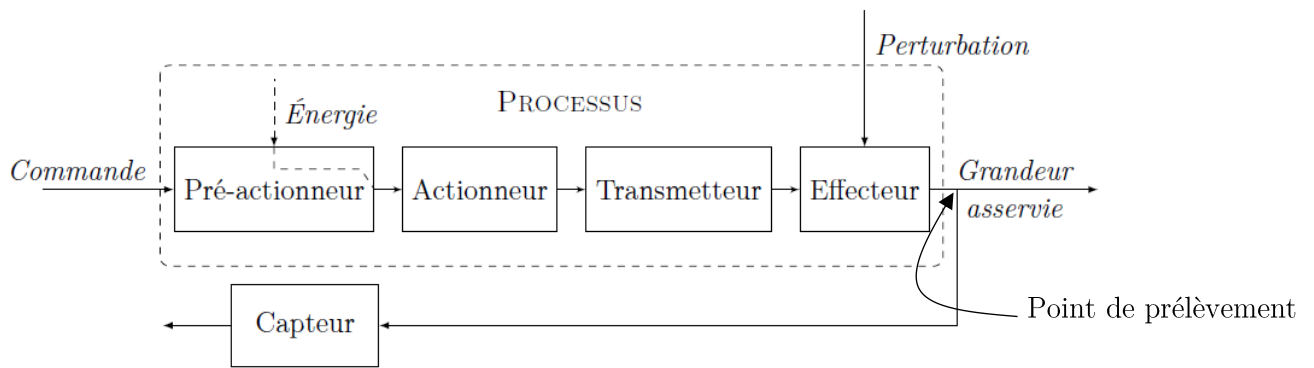


Figure 6 – Structure générique d'un processus

En sortie du schéma fonctionnel d'un processus asservi, on retrouve toujours un *point de prélèvement* auquel est rattaché un capteur. Il permet de « prélever » sur le système la valeur de la grandeur physique asservie.

Définition 1.4 (Constituants d'un système asservi)

Les différents constituants permettant d'asservir un processus sont donc :

Capteur : il « prélève » sur le système la valeur de la grandeur régulée ou asservie (information physique) et la transforme en un signal « compréhensible » par le régulateur.

Adaptateur de consigne : il permet de mettre en forme la consigne pour qu'elle soit de même nature et donc comparable à la mesure fournie par le capteur.

Comparateur : il est chargé de comparer une image de la consigne et de la grandeur asservie (ici notée *mesure*). Le comparateur renvoie l'écart entre ces deux informations.

Régulateur : il est chargé d'élaborer la loi de commande et son évolution à partir de l'écart calculé.

Amplificateur : il amplifie le signal de commande pour passer d'un faible niveau d'énergie (information) à un niveau plus élevé.

Définition 1.5 (Types de systèmes asservis)

On considère deux types de systèmes asservis :

Régulation : on appelle régulation un système asservi qui doit maintenir constante la sortie conformément à la consigne (constante) indépendamment des perturbations (régulation de température d'un four, régulateur de vitesse automobile) ;

Poursuite : on appelle asservissement un système asservi dont la sortie doit suivre le plus fidèlement possible la consigne quelle que soit son évolution (suivi de trajectoire d'un robot, profil de vitesse).

1.3 Causalité d'un système

Avant toute chose, précisons que le comportement des systèmes asservis repose sur un principe de causalité, c'est-à-dire que si un phénomène (nommé cause) produit un autre phénomène (nommé effet), alors l'effet ne peut précéder la cause. Ce qui se traduit en automatique par :

Définition 1.6 (Système causal)

Un système est dit causal si sa réponse à un instant donné ne dépend que des entrées précédant cet instant.

Le principe de causalité est très souvent invoqué en automatique pour rendre une théorie mathématique physiquement admissible.

2 Modélisation du comportement dynamique d'un système

Pour garantir les spécifications imposées par le cahier des charges d'un asservissement, on ne peut pas choisir et dimensionner le système de commande au hasard.

L'obtention des meilleures performances nécessite de tenir compte des propriétés et paramètres du système dynamique à asservir. L'ensemble des propriétés qui gouvernent le comportement du système est avantageusement condensé dans le modèle mathématique du système.

Définition 2.1 (Modèle mathématique d'un système)

Le modèle mathématique d'un système dynamique correspond à l'ensemble des lois mathématiques régissant la causalité entre ses entrées et ses sorties.

Parmi les modèles mathématiques de systèmes dynamiques, on peut distinguer :

- **Les modèles de connaissance**, construits de façon analytique à partir des lois de la physique régissant le comportement des constituants d'un système ;
- **Les modèles de comportement**, construits par identification à partir de résultats expérimentaux obtenus avec les systèmes réels.

Dans ce qui suit, nous ne présentons que les outils permettant d'établir les modèles de connaissances des systèmes dynamiques. Les démarches associées à l'identification seront présentées plus tard.

2.1 Objectif de la modélisation

Le processus de développement d'un modèle mathématique à partir d'une réalité physique est appelé modélisation.

L'objectif de la modélisation du comportement dynamique d'un système est de le décrire avec un ensemble d'équations permettant de simuler et donc de prédire son comportement.

Pour cela, il est nécessaire de :

- Proposer une modélisation des variables d'entrée (consignes, perturbations, etc.);
- Modéliser le système global ;
- Simuler le comportement du système ;
- Analyser la réponse de la simulation du comportement du système, c'est-à-dire analyser l'évolution de la sortie du modèle du système.

Pour que les prédictions du modèle soient fiables, il est indispensable qu'il ne soit pas trop simpliste – au risque de ne pas représenter assez bien la réalité – mais quand même suffisamment simple pour ne pas rendre inutilement complexes les étapes d'analyse des propriétés du système.

Pour établir un bon compromis entre la précision d'un modèle et sa complexité, il est nécessaire de formuler un certain nombre d'hypothèses de modélisation.

2.2 Hypothèses de modélisation

Le modèle de connaissance d'un système est obtenu en écrivant les lois de la physique régissant le comportement de ses constituants. Cette étape résulte en l'écriture d'équations différentielles et algébriques.

Un certain nombre d'hypothèses de travail sont formulées, définissant la classe des modèles utilisés. Parmi toutes les classes de modèles, on se restreindra à la classe la plus simple et la plus couramment utilisée :

Les systèmes linéaires continus à temps invariant (SLCI).

2.2.1 Systèmes continus

Définition 2.2 (Système continu)

Un système est dit continu si les fonctions définissant ses entrées et sorties sont continues, c'est-à-dire définies pour tout instant.

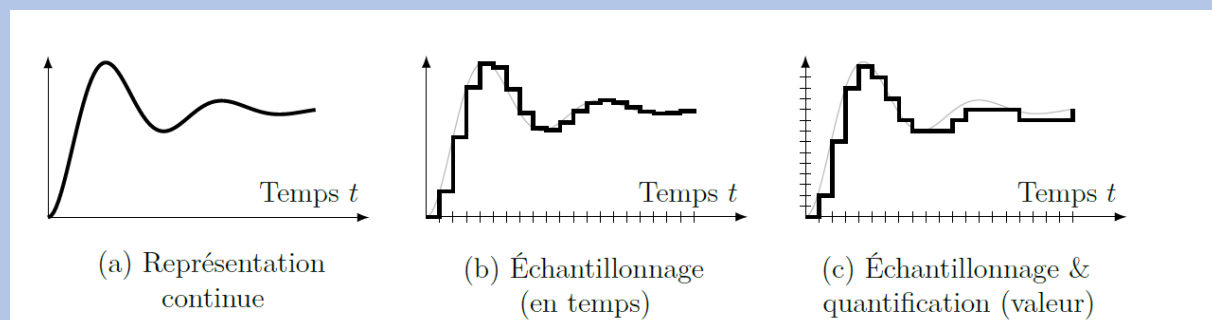


Figure 7 – Représentation numérique des données.

Les signaux d'un système continu sont forcément de nature analogique. Cependant, les systèmes de commande modernes manipulent des données numériques, c'est-à-dire échantillonnées (valeurs prélevées toutes les T secondes) et quantifiées (valeurs numériques décomposées en N pas). Toutefois, si la période d'échantillonnage est très inférieure au temps de réponse du système et que le nombre de pas de quantification est suffisamment grand, alors les données numériques pourront être assimilées à celles d'un système continu.

2.2.2 Systèmes linéaires

Les modèles de connaissance des systèmes sont établis à partir d'équations reliant les fonctions continues d'entrée et de sortie et leurs dérivées appelées équations différentielles.

Définition 2.3 (Système linéaire)

Un système linéaire est un système continu décrit par des équations différentielles linéaires.

Un système linéaire vérifie les principes de proportionnalité et de superposition.

Définition 2.4 (Principe de proportionnalité)

Un système vérifie le principe de proportionnalité (ou d'homogénéité) si à un multiple d'une entrée quelconque correspond le même multiple de la sortie correspondante.

Si $s(t)$ est la réponse à l'entrée $e(t)$ alors $K \cdot s(t)$ est la réponse à l'entrée $K \cdot e(t)$ (figure 8).

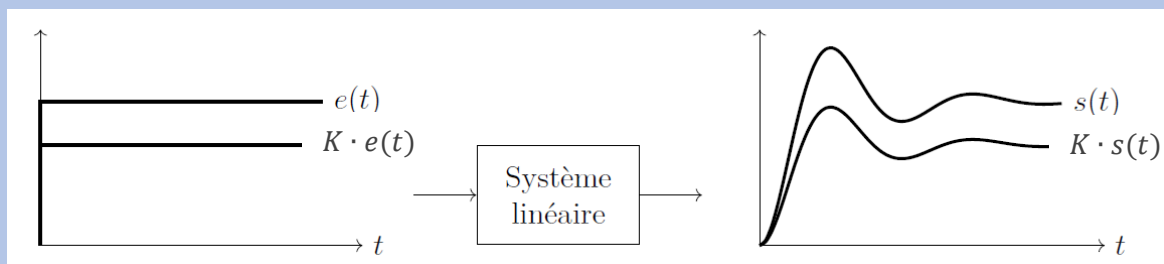


Figure 8 – Principe de proportionnalité

Définition 2.5 (Principe de superposition ou d'additivité)

Un système vérifie le principe de superposition si à la somme de deux entrées quelconques correspond la somme des deux sorties correspondantes.

Si $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont les réponses respectives des entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$, alors $s_1(t) + s_2(t)$ est la réponse à l'entrée $e_1(t) + e_2(t)$ (figure 9).

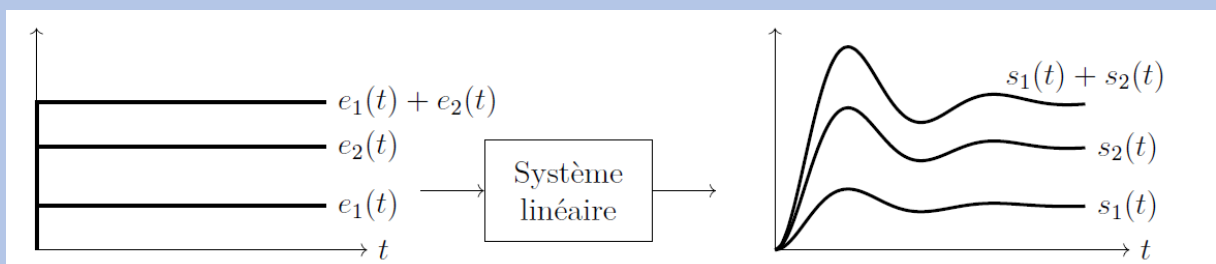


Figure 9 – Principe de superposition

La généralisation de ces deux principes est que la réponse $s(t)$ d'un système linéaire soumis à une combinaison linéaire des entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$ est la combinaison linéaire des réponses à chacune d'elle, respectivement notées $s_1(t)$ et $s_2(t)$. Ce qui se traduit par

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système linéaire}} \longrightarrow \alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$$

2.2.3 Systèmes invariants

Parmi les hypothèses de modélisation, on ajoutera que les systèmes étudiés possèdent toujours les mêmes caractéristiques et propriétés physiques (masse, dimensions, etc.) que l'on considérera donc comme des constantes indépendantes du temps.

Définition 2.6 (Système invariant)

Un système est dit invariant si ses caractéristiques et propriétés régissant son comportement sont invariables dans le temps.

Si une même entrée se produit à deux instants distincts t_1 et $t_1 + \tau$ alors les deux sorties temporelles $s_1(t)$ et $s_2(t)$ seront identiques et simplement décalées de τ (figure 10).

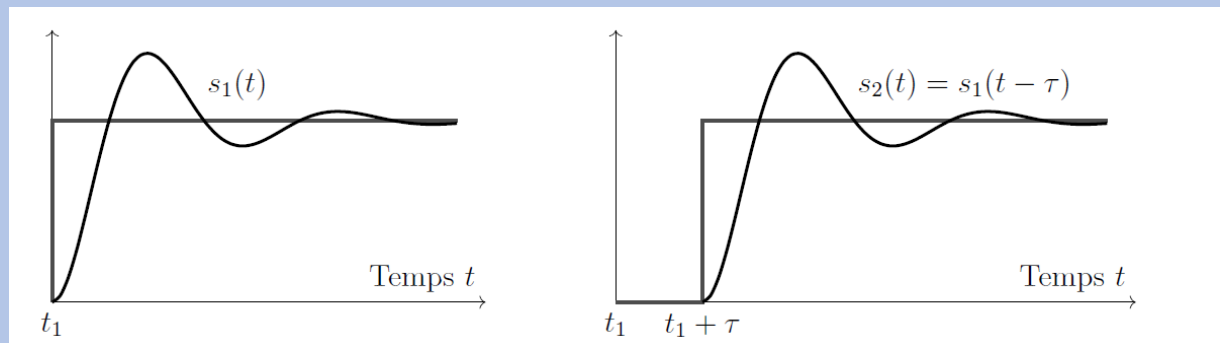


Figure 10 – Invariance dans le temps du comportement d'un système

2.3 Systèmes linéaires continus invariants

Pour modéliser le comportement dynamique des systèmes, on se limitera aux systèmes linéaires continus et invariants monovariables.

Si H représente le modèle mathématique d'un système qui relie la sortie $s(t)$ et l'entrée $e(t)$, alors :

- Le système est linéaire : $H(\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2) = \alpha_1 \cdot H(e_1) + \alpha_2 \cdot H(e_2)$
- Le système est continu : la fonction H est une fonction continue du temps t ;
- Le système est invariant : la réponse du système est indépendante du temps, c'est-à-dire si $e(t)$ induit $s(t)$ alors $e(t + \tau)$ induit $s(t + \tau)$.

Il est à noter que la propriété de superposition permet de prendre en compte facilement une perturbation : le signal de sortie sera la somme du signal issu de l'entrée $e(t)$ et du signal issu de la perturbation $p(t)$.

2.4 Description par des équations différentielles

Sous les hypothèses de continuité, de linéarité et d'invariance dans le temps, la relation de comportement dynamique d'un système peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme :

$$b_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + b_1 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + b_0 \cdot s(t) = a_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + a_1 \cdot \frac{de(t)}{dt} + a_0 \cdot e(t)$$

Où a_0, a_1, \dots, a_m et b_0, b_1, \dots, b_m sont des constantes réelles. Pour que le système soit physiquement réalisable, il doit vérifier le principe de causalité qui implique que l'on aura toujours $n > m$, avec n l'ordre du système.

À partir de cette représentation il est possible de déterminer l'évolution temporelle de la réponse d'un système en résolvant l'équation différentielle. Les hypothèses de modélisation des systèmes (linéaires, continus et invariants) permettent d'envisager une résolution analytique de ces équations, par exemple à partir de la transformée de Laplace.

3 Résolution par la transformée de Laplace

3.1 Définition et intérêts

La modélisation des systèmes dynamiques conduit toujours à l'expression d'une ou plusieurs équations différentielles. Une équation différentielle est une équation dans laquelle la fonction à rechercher figure avec ses dérivées. De façon « classique », la résolution d'une équation différentielle suit une démarche en deux temps permettant d'assembler les composantes transitoires et permanentes (figure 11).

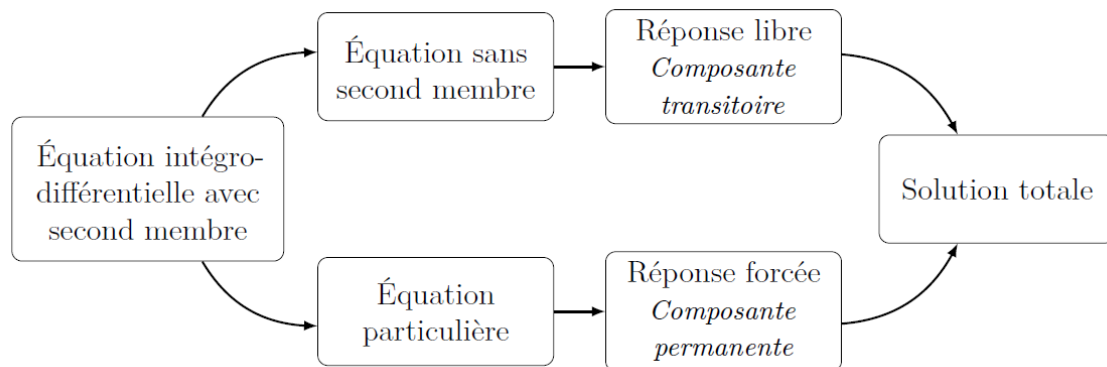


Figure 11 – Méthode de résolution « classique » d'une équation différentielle.

Cette façon de résoudre les équations devient vite complexe. La transformation de Laplace permet de résoudre simplement ces équations différentielles linéaires à coefficients constants en les transformant en équations algébriques.

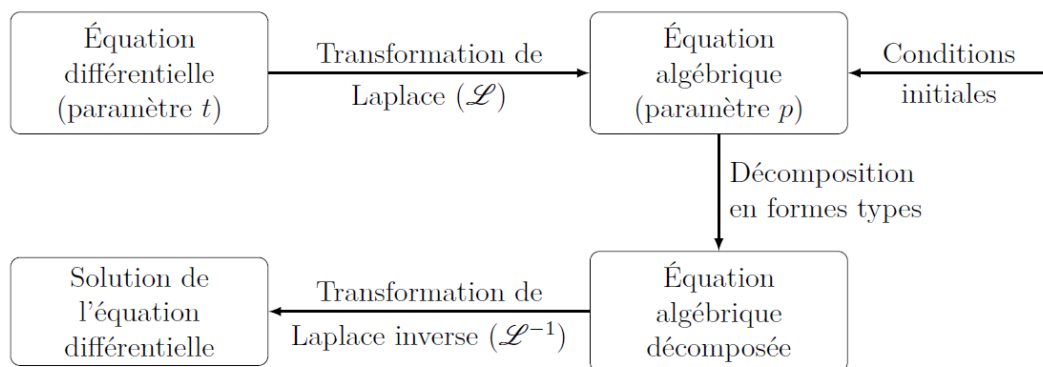


Figure 12 – Technique de résolution utilisée par les automaticiens.

L'équation différentielle de la variable réelle t est transformée en une équation algébrique de la variable complexe p par une transformation dite de Laplace qui tient compte des conditions initiales. Après mise sous forme « type » de l'équation algébrique, on obtient la solution temporelle de l'équation différentielle par transformée inverse.

Définition 3.1 (Transformée de Laplace)

On appelle transformée de Laplace de f , la fonction $F = \mathcal{L}[f]$ de la variable complexe p définie par la relation intégrale :

$$H(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} \cdot f(t) dt$$

La transformée de Laplace permet de passer du domaine temporel au domaine dit de Laplace (ou domaine symbolique). $f(t)$ est appelée *originale* et sa transformée $F(p)$ est appelée *image*. La variable complexe p est la variable conjuguée de t .

Remarque 3.1 (Notation des fonctions images)

Il est d'usage de noter une fonction temporelle avec une lettre minuscule et sa transformée de Laplace avec une lettre majuscule. Dans le cas où la notation d'une fonction temporelle est déjà une lettre majuscule, on conserve la même lettre.

Par exemple :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p), \quad \mathcal{L}[C(t)] = C(p), \quad \mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(p) \text{ ou } \mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(p)$$

La transformée de Laplace ainsi définie ne s'applique qu'aux fonctions causales. Pour rendre causale une fonction temporelle $f(t)$, on la combine avec la fonction de Heaviside (ou échelon unité) notée usuellement $u(t)$ et définie par :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi, si $f(t)$ est une fonction quelconque, définie sur \mathbb{R} , la fonction $f(t) \cdot u(t)$ est son image causale, nulle pour tout $t < 0$ (figure 13).

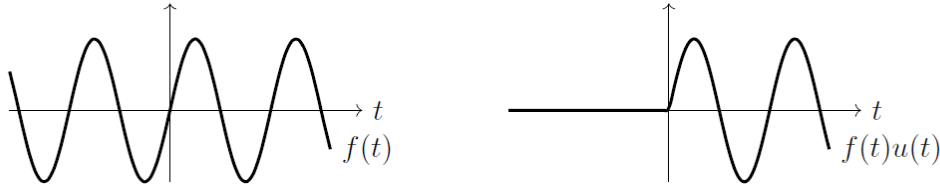


Figure 13 – D’une fonction quelconque à une fonction causale.

3.2 Propriétés élémentaires

Propriété 3.1 (Unicité)

À une fonction $f(t)$ correspond une seule transformée de Laplace $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Théorème 3.1 (Linéarité)

La transformée de Laplace d’une combinaison linéaire de deux fonctions f et g (dont la transformée de Laplace existe) est la combinaison linéaire des transformées de Laplace de ces deux fonctions.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathcal{L}[\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)] = \alpha \cdot F(p) + \beta \cdot G(p)$$

Théorème 3.2 (Dérivation)

Si f est une fonction dérivable dont la transformée de Laplace existe alors la transformée de Laplace de sa dérivée est définie par :

$$\mathcal{L}\left(\frac{d f(t)}{dt}\right) = p \cdot F(p) - f(0)$$

Théorème 3.3 (Dérivation d’ordre 2)

Si f est une fonction deux fois dérivable et dont la transformée de Laplace existe alors la transformée de Laplace de sa dérivée seconde est définie par :

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - \frac{d f(0)}{dt}$$

Remarque 3.2 (Dérivation et conditions de Heaviside)

Si le système est dans des conditions de Heaviside, c’est-à-dire si $f(0) = 0, \frac{d f(0)}{dt} = 0$, et toutes les dérivées en $t = 0$ sont nulles, alors :

$$\mathcal{L}\left(\frac{d f(t)}{dt}\right) = p \cdot F(p), \mathcal{L}\left(\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right) = p^2 \cdot F(p), \mathcal{L}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = p^n \cdot F(p)$$

Ce que l’on peut résumer par :

« Dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine de Laplace ».

Propriété 3.2 (Intégration d’une fonction causale)

La transformée de Laplace d’une fonction g définie par :

$$g(t) = \int f(t) dt \text{ alors } \mathcal{L}[g(t)] = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0)}{p}$$

Théorème 3.5 (Retard)

Soient f et g deux fonctions temporelles d'allure identique mais décalées dans le temps d'une valeur τ . Si g est définie par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{pour } 0 \leq t \leq \tau \\ g(t) = f(t - \tau) & \text{pour } t \geq \tau \end{cases}$$

Alors

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} \cdot \mathcal{L}[f(t)] = e^{-p\tau} \cdot F(p)$$

Théorème 3.6 (théorème de la valeur finale)

Si une fonction f admet une limite finie pour $t \rightarrow +\infty$ et que la transformée de Laplace de sa dérivée existe alors sa valeur finale peut être obtenue à partir de sa transformée de Laplace selon :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$$

Théorème 3.7 (théorème de la valeur initiale)

Si une fonction f est causale et que la transformée de Laplace de sa dérivée existe alors sa valeur initiale peut être obtenue à partir de sa transformée de Laplace selon :

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p)$$

3.3 Transformée de Laplace de fonctions usuelles

Voir annexe 1

3.4 Fonction de transfert

On détermine la fonction de transfert d'un système à partir des équations différentielles régissant son comportement.

Définition 3.2 (Produit de convolution)

On définit la convolution de deux fonctions f et g , notée $f * g$, par l'opération suivante :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

Le produit de convolution joue un rôle important dans l'analyse du comportement dynamique des systèmes. Si $h(t)$ est une fonction caractéristique d'un système soumis à une entrée $e(t)$ alors la relation exprime que l'on accumule dans le temps t tout ce que le système possède comme information pendant le laps de temps $t - \tau$. La réponse du système est alors donnée par le produit de convolution $(e * h)(t)$ (figure 14).

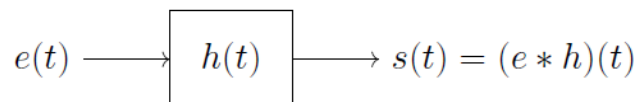


Figure 14 – Réponse d'un système définie par convolution

Théorème 3.9 (Convolution)

La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions f et g (dont les transformées existent) est définie par :

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = F(p) \cdot G(p)$$

En exploitant la propriété de la transformée de Laplace du produit de convolution, il vient immédiatement que si un système de caractéristique $h(t)$ est soumis à une entrée $e(t)$, alors la transformée de Laplace de sa réponse $s(t) = (e * h)(t)$ sera :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p)$$

La fonction $H(p)$ est appelée la fonction de transfert du système.

Définition 3.3 (Fonction de transfert)

On appelle fonction de transfert ou transmittance le rapport entre la transformée de Laplace du signal d'entrée $e(t)$ et celle du signal de sortie $s(t)$:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Une fonction de transfert est une fraction rationnelle de la variable complexe p qui peut généralement se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m}{b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_n \cdot p^n} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

On appelle pôles de $H(p)$ les racines qui annulent le dénominateur $D(p)$ et zéros les racines du numérateur $N(p)$.

Définition 3.4 (Forme canonique)

On appelle forme canonique d'une fonction de transfert la représentation qui consiste à imposer une constante unitaire aux polynômes.

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m}{b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_n \cdot p^n} = \frac{N(p)}{D(p)} \text{ avec } a_0 = b_0 = 1$$

De façon à faire apparaître le gain K et la classe α du système.

À chaque fonction de transfert on peut associer un schéma fonctionnel dans le domaine de Laplace appelé schéma-blocs (figure 15).

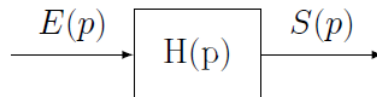


Figure 15 – Schéma-blocs d'un système.