

2- Modélisation des SLCI

Schémas blocs -Transformée de Laplace

Exercices

Contenu

2.b.1. Modélisation d'un véhicule auto-balancé Segway©.....	2
2.b.2. Enceinte chauffée	4
2.b.3. Robot portique 3 axes Lexium Max R.....	5
Étude du moteur utilisé	6
Ajout de la transformation de mouvement	6
Asservissement de l'ensemble.....	7
Prise en compte d'une perturbation.....	7
2.b.4 Modélisation d'une servocommande d'avion.....	8
Etude de la servocommande :.....	10
Travail demande :.....	10
Modélisation dans le cas de l'hypothèse de fluide compressible :	11
2.L.1. Résolution d'équations différentielles par la méthode des transformées de Laplace	12
Exercice 1 :.....	12
Exercice 2 :.....	12
Exercice 3 :.....	12

2.b.1. Modélisation d'un véhicule auto-balancé Segway®

Le support de l'étude est le véhicule auto balancé Segway®. Il s'agit d'un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. En termes de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, plus maniable, plus écologique (selon les rédacteurs du sujet), moins encombrant et nettement plus moderne.

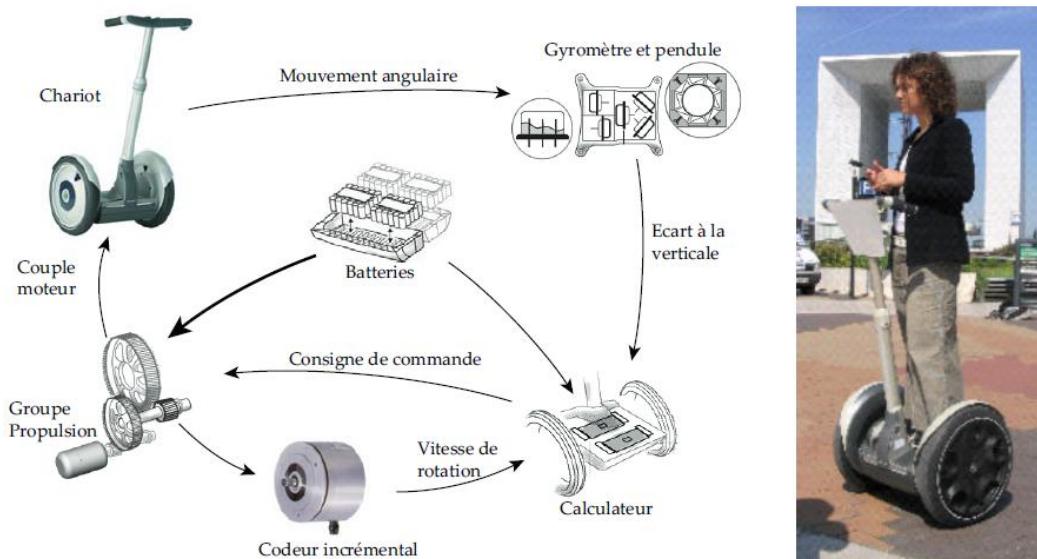


Figure 1 - Schéma d'organisation structurelle

La conduite du Segway® se fait par inclinaison du corps vers l'avant ou vers l'arrière, afin d'accélérer ou freiner le mouvement. Les virages à droite et à gauche sont quant à eux commandés par la rotation de la poignée directionnelle située sur la droite du guidon.

La spécificité de ce véhicule est d'avoir deux roues qui ont le même axe de rotation, avec son centre de gravité situé au-dessus de l'axe commun des roues, si bien qu'on se demande comment rester à l'équilibre une fois monté sur la plate-forme. Tout comme le cerveau permet à l'homme de tenir debout sans tomber grâce à l'oreille interne, le système comporte un dispositif d'asservissement d'inclinaison, maintenant la plate-forme du véhicule à l'horizontale ou encore la barre d'appui, supposée orthogonale à cette plateforme, à la verticale. Le Segway® comporte à cet effet des capteurs et des microprocesseurs transmettant des consignes aux deux moteurs électriques équipant les deux roues.

Objectif :

Vérifier les performances de l'asservissement d'inclinaison par rapport à la verticale.

La chaîne d'action permettant de réguler l'inclinaison du Segway® est réalisée par :

- Un motoréducteur qui permet de délivrer un couple C_m :

$$C_{m(t)} = K_m \cdot u_c(t)$$

Avec $u_c(t)$ la tension de commande ;

- L'ensemble chariot et conducteur. Les équations de comportement dynamique peuvent se mettre sous la forme :

$$a \cdot \frac{d^2\Phi(t)}{dt^2} = b \cdot C_m(t) - c \cdot \Phi(t)$$

Avec $\Phi(t) = \Psi(t) + \alpha(t)$, α étant l'angle d'inclinaison du conducteur par rapport à la barre d'appui. On note $\mathcal{L}(\alpha(t)) = A(p)$

La partie commande est constituée :

- D'un comparateur qui élabore le signal écart $\epsilon = \Psi_c(t) - \Psi(t)$

Où $\Psi_c(t)$ est la consigne d'inclinaison du plateau du chariot par rapport à la verticale et $\Psi(t)$ son inclinaison mesurée ;

- D'un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ qui adapte l'écart pour commander le système.

Afin de stabiliser le système, la grandeur de commande du motoréducteur $u_c(t)$ est élaborée à partir de :

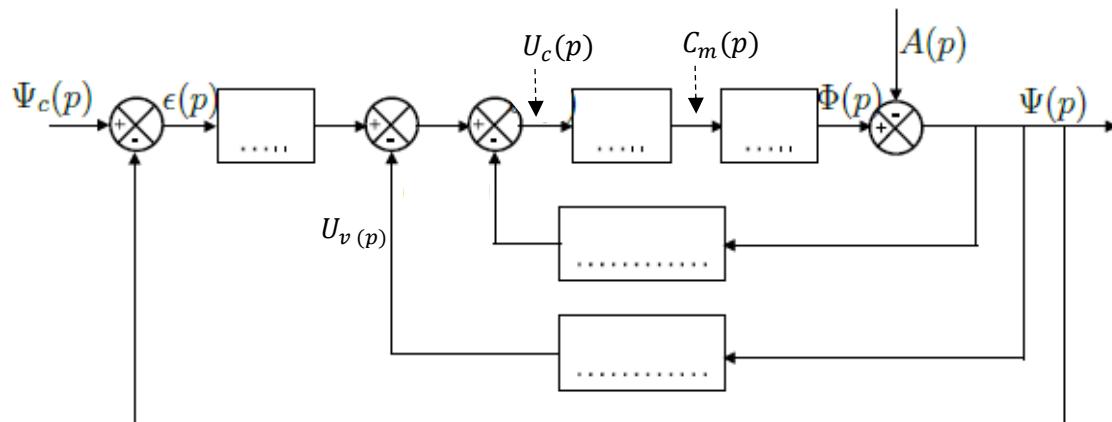
- La mesure de la vitesse angulaire par un gyromètre qui fournit la tension $u_v(t)$:

$$u_v(t) = K_v \cdot \frac{d\Psi(t)}{dt}$$

- La mesure de la position angulaire par un pendule qui fournit la tension $u_p(t)$:

$$u_p(t) = K_p \cdot \Psi(t)$$

Q1. Compléter le schéma-blocs fonctionnel du Segway®.



Q2. Pour $A(p) = 0$, déterminer l'expression canonique de la fonction de transfert $\frac{\Psi(p)}{\Psi_c(p)}$

Préciser son ordre.

2.b.2. Enceinte chauffée

Le système représenté ci-dessous est chargé de maintenir la température d'une enceinte. Le chauffage est assuré par un échangeur thermique, la vanne v permet de réguler le débit du fluide calorifique dans l'échangeur.

Extrait du cahier des charges

La température dans la chambre doit être maîtrisée au degré près.

Objectif

On cherche à vérifier l'exigence de précision de cette installation.

On note :

- $\alpha(t)$: l'angle d'ouverture de la vanne ;
- $q(t)$: débit dans l'échangeur ;
- $\theta_1(t)$: température en sortie de l'échangeur ;
- $\theta(t)$: température dans l'enceinte.

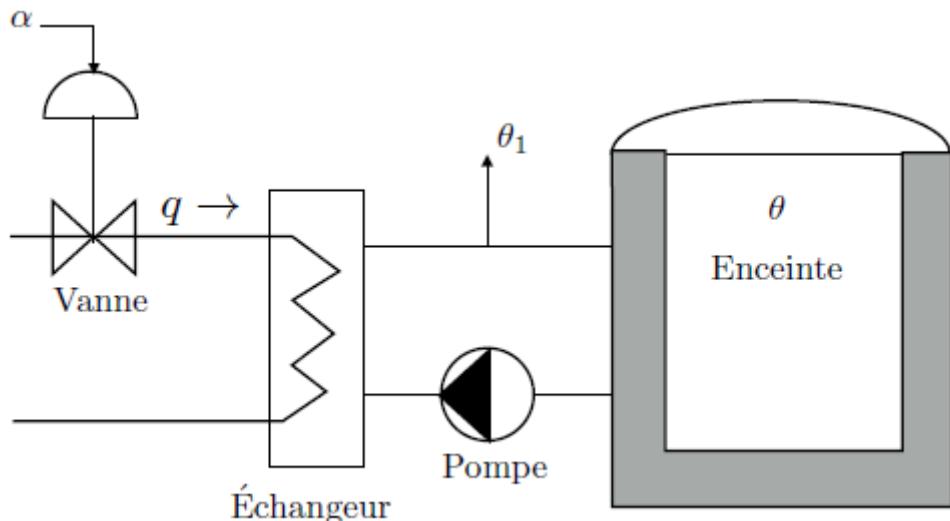


Figure 2 – Enceinte chauffée

La loi de fonctionnement de la vanne est caractérisée par l'équation $q(t) = k_0 \cdot \alpha(t)$, donnant le débit en fonction de l'angle d'ouverture. Les deux autres équations caractérisent le transfert de chaleur :

- Dans l'échangeur : $\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \frac{d\theta_1(t)}{dt} = k_1 \cdot q(t)$;
- Dans l'enceinte : $\theta(t) + \tau_2 \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = k_2 \cdot \theta_1(t)$

On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles. L'entrée du système est l'angle d'ouverture de la vanne et la température de l'enceinte est la sortie.

On note :

- $A(p)$ la transformée de Laplace de $\alpha(t)$;
- $Q(p), \Theta(p), \Theta_1(p)$ les transformées respectives de $q(t), \theta(t)$ et $\theta_1(t)$.

Q1. Traduire dans le domaine de Laplace les équations de fonctionnement.

Q2. Tracer le schéma-blocs du système.

Q3. Déterminer la fonction de transfert $H_0(p) = \frac{\Theta(p)}{A(p)}$.

Afin de réguler la température, on choisit de motoriser la vanne et on installe un capteur, dont la fonction transfert est notée K_{cap} , dans l'enceinte qui permet de mesurer la température θ . Cette température est comparée à la température de consigne θ_c . En fonction de cet écart, la vanne s'ouvre ou se ferme. Le schéma donné figure 3 précise la structure de l'asservissement.

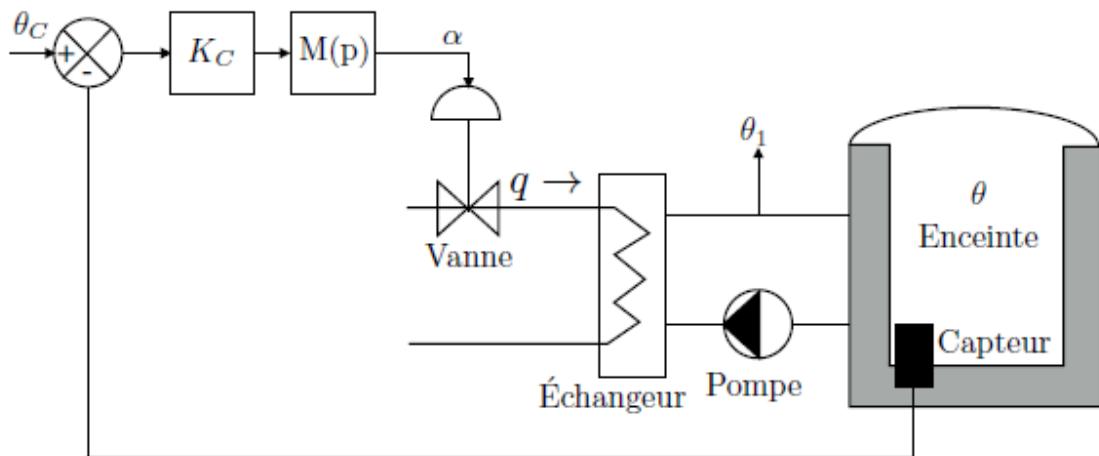


Figure 3 – Enceinte chauffée et régulée

La fonction de transfert du moteur est :

$$M(p) = \frac{A(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{(1 + T_m \cdot p) \cdot p}$$

Q4. Compléter le schéma-blocs du système dont l'entrée est θ_c .

Q5. Déterminer la fonction de transfert du système $H_F(p) = \frac{\Theta(p)}{\Theta_c(p)}$.

On suppose pour la suite que le système est stable et que $K_{cap} = 1$

Q6. Déterminer la valeur finale pour une entrée en échelon $\theta_c(t) = \theta_0 \cdot u(t)$

Conclure sur le respect du cahier des charges.

2.b.3. Robot portique 3 axes Lexium Max R

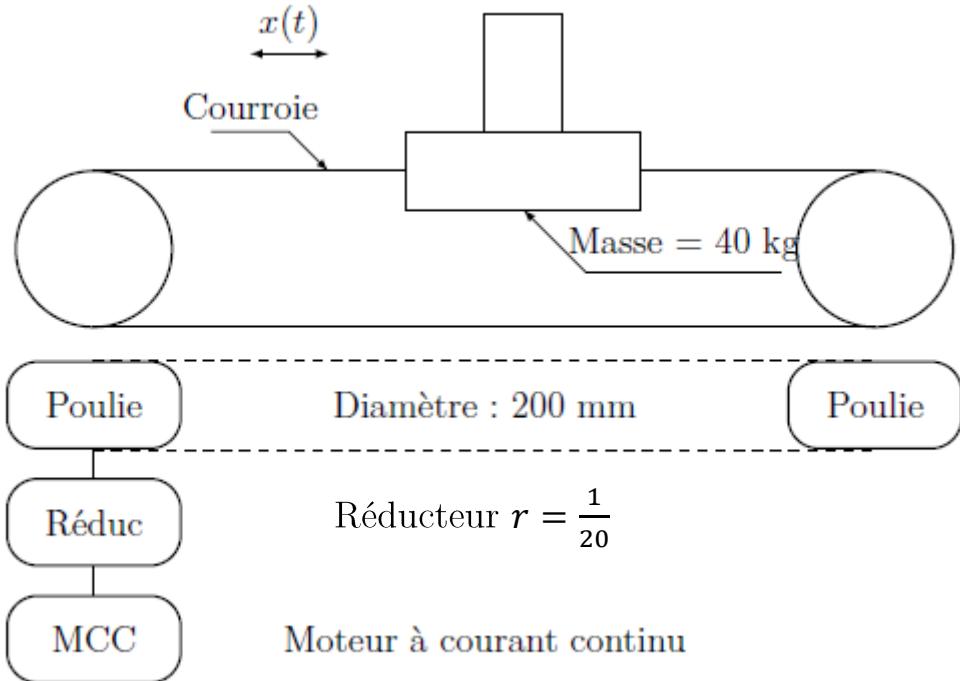
Le dispositif d'entraînement en translation suivant, est constitué d'un moteur à courant continu à commande par l'induit, d'un réducteur et d'un système poulie courroie de transformation de mouvement. La schématisation est fournie ci-dessous.

Extrait du cahier des charges

Le déplacement de chaque axe doit être précis : $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_c(t) - x(t) = 0$ (erreur statique de position nulle).

Objectif

Déterminer la fonction de transfert caractérisant le fonctionnement asservi de chaque axe et vérifier les performances de précision exigées.



Étude du moteur utilisé

Autour d'un point de fonctionnement (en charge), le comportement d'un moteur à CC peut être modélisé par les équations suivantes :

- $u_c(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + e(t)$ (1)
- $e(t) = K_e \cdot \omega_m(t)$ (2)
- $C_m(t) = K_c \cdot i(t)$ (3)
- $J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \cdot \omega_m(t) = C_m(t)$ (4)

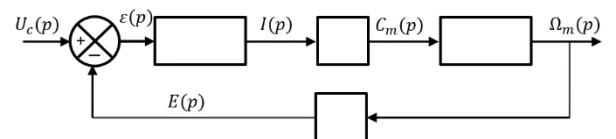


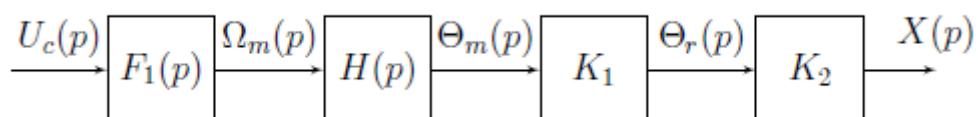
Schéma blocs du moteur non perturbé

Q1. A partir des informations ci-dessus, compléter le schéma-blocs correspondant à la modélisation du moteur à courant continu utilisé.

Q2. Déterminer l'expression de la fonction de transfert $F_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_c(p)}$

Ajout de la transformation de mouvement

On place en bout de l'arbre moteur un réducteur et un système poulie courroie.

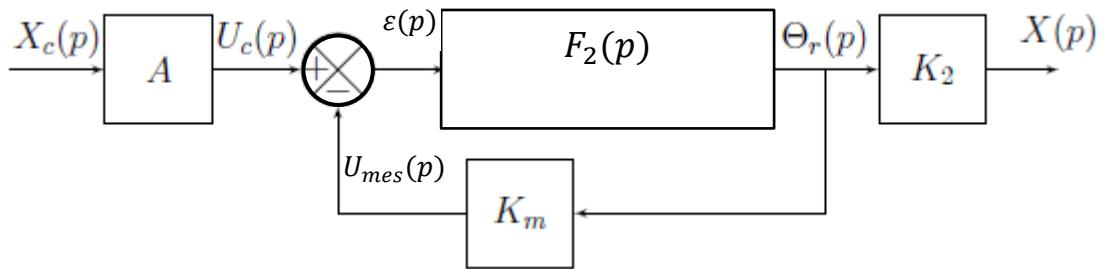


Q3. Identifier les fonctions de transfert K_1, K_2 et $H(p)$.

Q4. Déterminer l'expression de la fonction de transfert $F_2(p) = \frac{\Theta_r(p)}{U_c(p)}$.

Asservissement de l'ensemble

Pour asservir le système en position, on place un capteur potentiométrique angulaire à la sortie du réducteur. Il fournit une tension U_{mes} proportionnelle à la position angulaire Θ_r . Un adaptateur est placé en amont du comparateur afin de convertir la consigne de l'utilisateur en une tension comparable à celle relevée par le capteur.



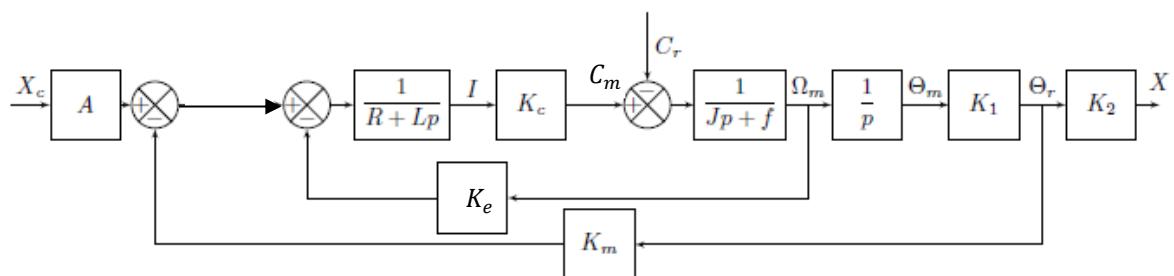
Q5. Préciser la fonction puis déterminer l'expression du gain A .

Nota : Pour trouver A, on part du principe que, lorsque $X(p) = X_c(p)$ alors $\varepsilon(p) = 0$

Q6. Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $\frac{X(p)}{X_c(p)}$ en fonction de $F_2(p)$ et K_m .

Prise en compte d'une perturbation

Si l'on tient compte d'un couple résistant C_r appliqué en sortie du moteur, le schéma blocs devient:



Q7. À l'aide du principe de superposition, déterminer une expression de $X(p)$ en fonction de $X_c(p)$ et $C_r(p)$. En déduire les expressions des deux fonctions transfert.

$$T_1(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)} \text{ et } T_2(p) = \frac{X(p)}{C_r(p)}$$

Q8. Déterminer l'expression de l'erreur statique de position consécutive à un échelon de position $x_c(t) = x_0 \cdot u(t)$ et un échelon de couple résistant $C_r(t) = C_0 \cdot u(t)$.

Préciser si le cahier des charges est respecté.

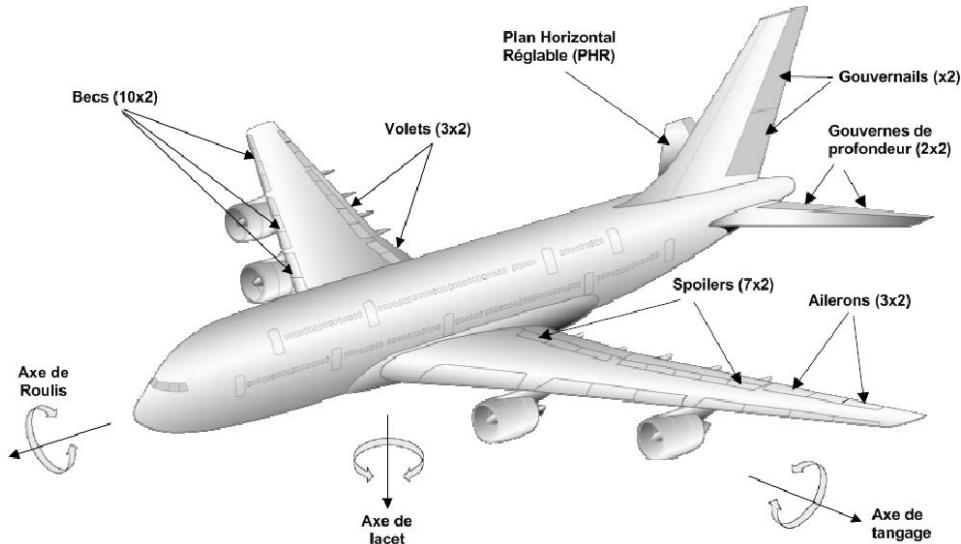
2.b.4 Modélisation d'une servocommande d'avion

Pour piloter un avion, il est nécessaire de pouvoir contrôler en permanence ses évolutions dans l'espace suivant trois directions (ou axes) :

L'axe de lacet (vertical en cas de vol rectiligne horizontal)

L'axe de roulis (suivant l'axe longitudinal de l'avion)

L'axe de tangage (suivant l'axe transversal de l'avion)



Pour cela, le pilote agit sur les commandes de vol de l'avion. En pratique, on distingue deux types de commandes :

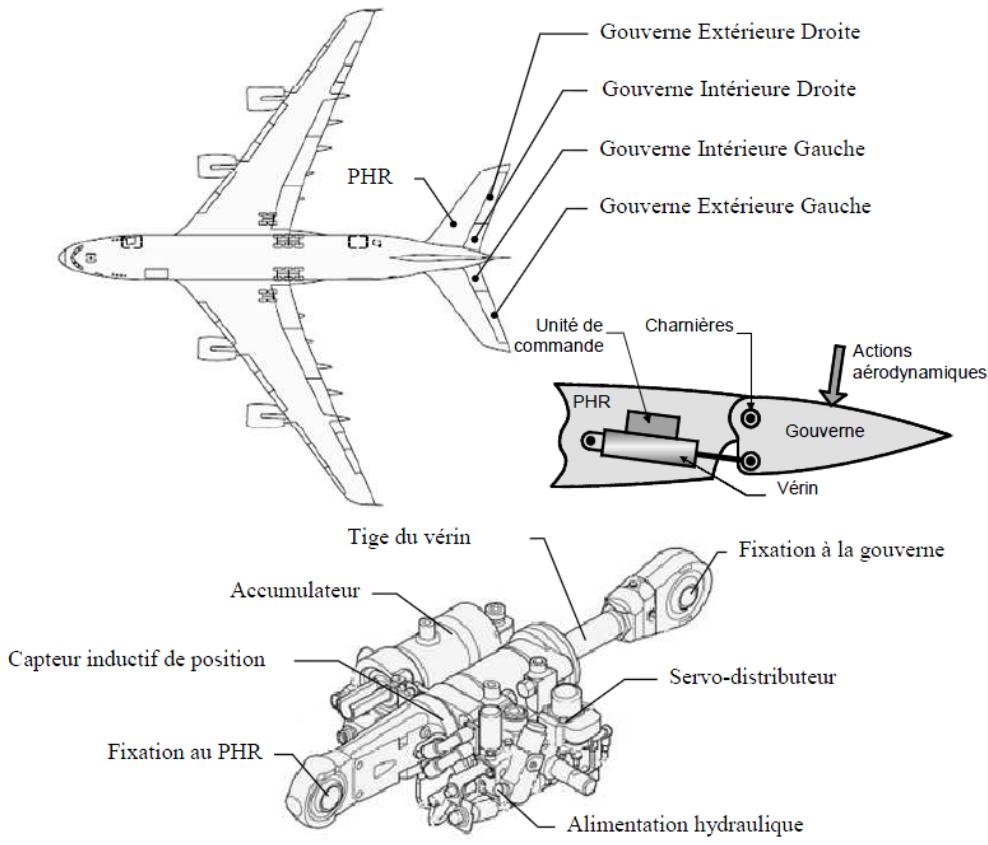
- Les commandes de vol primaires utilisées pendant tout le vol et qui permettent de contrôler l'évolution de l'avion autour de ses axes de référence :
 - La gouverne de direction ou gouvernail pour le lacet
 - Les ailerons pour le roulis
 - Les gouvernes de profondeur et le plan horizontal réglable (PHR) pour le tangage.
- Les commandes de vol secondaires utilisées pendant les phases d'atterrissement et de décollage qui permettent de modifier la configuration aérodynamique de l'avion :
 - Les organes hypersustentateurs : (volets et becs pour modifier la portance)
 - Les spoilers (ou aérofreins pour modifier la trainée).

L'airbus A380 est équipé de deux fois deux gouvernes de profondeur disposées sur le PHR de l'avion. Chaque gouverne est reliée au PHR par des charnières et est mis en rotation par une unité de commande constituée de deux actionneurs :

- Une servocommande (SC), actionneur principal relié au circuit hydraulique de l'avion

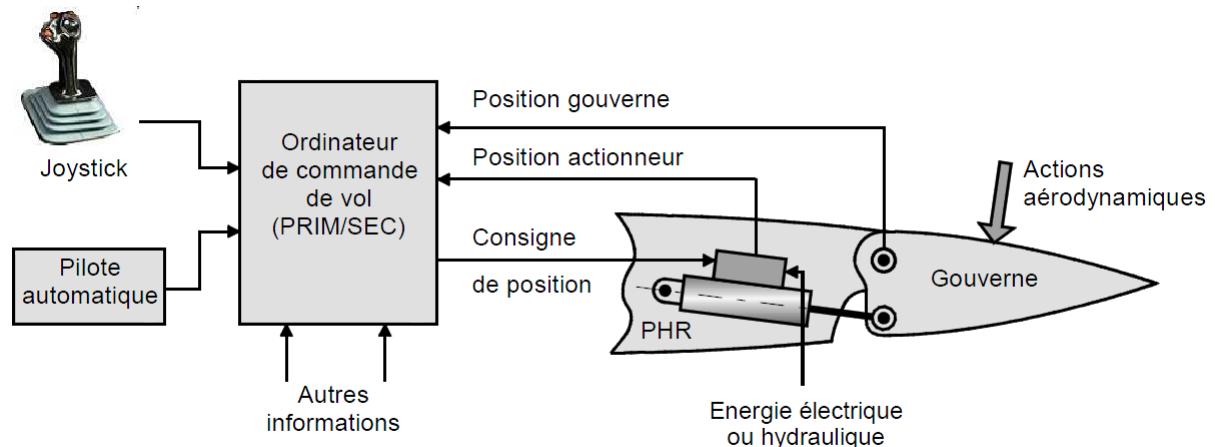
- Un EHA (Electro Hydraulic Actuator : actionneur électro-hydrostatique), utilisé comme organe de sécurité en cas de défaillance de la servocommande ou du circuit hydraulique principal.

Ces unités de commande sont identiques sur les quatre gouvernes de profondeur :

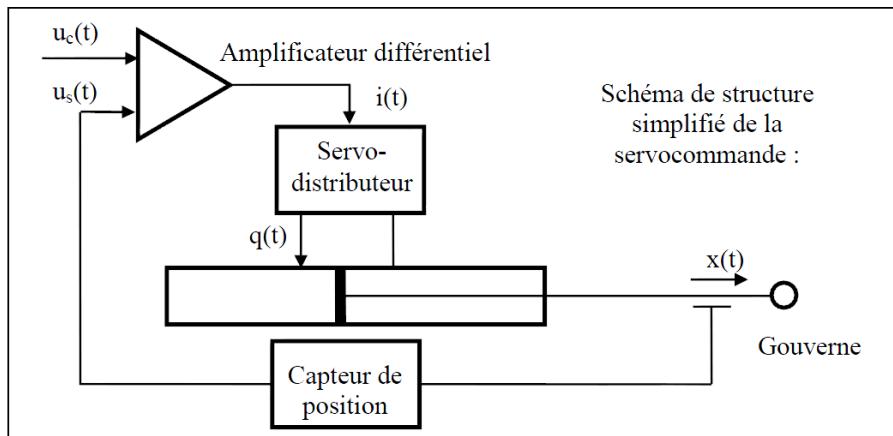


Servocommande de l'unité de commande

Les consignes émises par le pilote à l'aide du joystick ou par le pilote automatique sont transmises aux ordinateurs de commande de vol. ces derniers déterminent, en fonction des lois de pilotage prenant en compte un certain nombre de paramètres (altitude, vitesse, etc...), les mouvements des gouvernes limitant éventuellement les évolutions de l'avion à l'intérieur de son domaine de vol, c'est-à-dire aux régimes et altitudes surs.



Etude de la servocommande :



Les équations temporelles qui modélisent le comportement du système sont définies ci-dessous :

$$\text{Amplificateur différentiel : } u_c(t) = \frac{i(t)}{K_a} + u_s(t) \text{ (on note } \alpha(t) = u_c(t) - u_s(t) \text{)}$$

$$\text{Débit dans le vérin dans le cas d'une hypothèse de fluide incompressible : } q(t) = S \cdot \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\text{Capteur de position : } u_s(t) = K_c \cdot x(t)$$

Le servodistributeur est un composant de la chaîne de commande conçu pour fournir un débit hydraulique $q(t)$ proportionnel au courant de commande $i(t)$ (Uniquement valable en régime permanent). Le constructeur nous fournit sa fonction transfert :

$$F(p) = \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{K_d}{1+T \cdot p} \text{ où } K_d \text{ est le gain du servodistributeur et } T \text{ sa constante de temps.}$$

Travail demandé :

Modélisation dans le cas de l'hypothèse de fluide incompressible :

Q1. Ecrire les équations du modèle sous forme symbolique (conditions de Heaviside).

Q2. Représenter chacune de ces relations sous la forme d'un schéma blocs partiel.

Q3. Regrouper ces schémas blocs partiels afin de représenter le comportement de la servocommande.

Q4. Calculer les fonctions de transfert suivantes et donner à chaque fois la classe et l'ordre :

- Fonction transfert du vérin non asservi : $A_1(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$
- Fonction de transfert de la chaîne directe : $C(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)}$
- Fonction transfert de la boucle ouverte du système : $G(p) = \frac{U_s(p)}{\varepsilon(p)}$
- Fonction transfert en boucle fermée du système : $F(p) = \frac{X(p)}{U_c(p)}$

Modélisation dans le cas de l'hypothèse de fluide compressible :

Dans cette hypothèse le modèle de connaissance du système est modifié :

L'équation de débit dans le vérin devient : $q(t) = S \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \cdot \frac{d\Delta p(t)}{dt}$ où $\Delta p(t)$ représente la différence de pression entre les deux chambres du vérin, V est le volume total du fluide dans le vérin (V est constant) et B est le coefficient de compressibilité du fluide hydraulique (pour un fluide incompressible $B \rightarrow \infty$)

Effort moteur sur le piston : $F_m(t) = S \cdot \Delta p(t)$

Principe fondamental de la dynamique appliquée à la tige du vérin :

$$F_m(t) - F_r(t) - f \cdot \frac{dx(t)}{dt} = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

où $F_r(t)$ représente l'effort résistant sur la tige du vérin, effort qui sera considéré comme une perturbation et f représente le frottement visqueux.

Q5. Ecrire les équations du modèle sous forme symbolique (conditions de Heaviside).

Q6. Représenter chacune de ces relations sous la forme d'un schéma bloc partiel.

Q7. Regrouper ces schémas blocs partiels afin de représenter le comportement du vérin non asservi (grandeur d'entrée $Q(p)$ et grandeur de sortie $X(p)$). Le schéma bloc contiendra un retour et une perturbation.

Q8. Calculer la nouvelle fonction transfert du vérin non asservi : $A_2(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$, en supposant que la perturbation $F_r(t)$ est nulle.

Q9. Quelle est la modification apportée par le modèle de fluide compressible.

2.L.1. Résolution d'équations différentielles par la méthode des transformées de Laplace

Exercice 1 :

Soit à résoudre en utilisant la transformée de Laplace, l'équation différentielle :

$$\begin{cases} 4 \cdot \ddot{y}(t) + 6 \cdot \dot{y}(t) + 2 \cdot y(t) = 1 \cdot u(t) \\ \dot{y}(0) = 2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Même question avec :

$$\begin{cases} 4 \cdot \ddot{y}(t) + 6 \cdot \dot{y}(t) + 2 \cdot y(t) = t \cdot u(t) \\ \dot{y}(0) = -1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 :

Même question avec :

$$\begin{cases} 2 \cdot y''(t) - 4 \cdot y'(t) + 2 \cdot y(t) = u(t) \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On précise ici que $u(t)$ et la fonction de Heaviside. D'autre part on donne :

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(p-a)^2} \right) = t \cdot e^{a \cdot t}$$