2 Cinétique

1 Masse et centre d'inertie :

1.1 Masse d'un solide indéformable :

Définition 25. On appelle système matériel, un système Σ sur lequel sera définit la mesure masse c'est à dire que $\forall t$ on définit sur Σ une mesure positive notée dm.

Définition 26. Soit Σ, un système matériel de masse volumique $\rho(P)$, la masse de Σ est donnée par la relation :

$$\boxed{m_\Sigma = \int_\Sigma dm = \int_\Sigma \rho(P)\,dv}$$

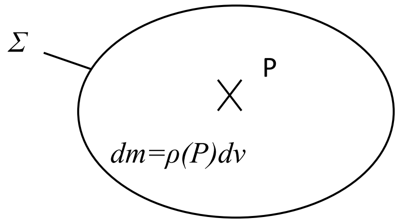


figure 2.1

dans laquelle dv est un élément de volume.

Remarque :

- Si le système matériel est assimilable à un volume, on parle de masse volumique $\rho(P)$ au point P : $dm=\rho(P)dv$;
- Si le système matériel est assimilable à une surface on parle de masse surfacique $\sigma(P)$ au point P : $dm=\sigma(P)ds$;
- Si le système matériel est assimilable à une ligne, on parle de masse linéique $\lambda(P)$ au point P : $dm=\lambda(P)dl$.

Théorème 14. La masse est une grandeur additive. Si Σ_1 et Σ_2 sont deux systèmes disjoints alors :

$$m(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = m(\Sigma_1) + m(\Sigma_2)$$

Principe de conservation de la masse :

Nous supposerons que la masse est une grandeur indépendante du temps. Cette propriété permet d'écrire la relation suivante :

$$\left[\frac{d}{dt}\int_{P\in\Sigma}\overrightarrow{f(P,t)}\,dm\right]_R = \int_{P\in\Sigma}\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{f(P,t)}\right]_R dm$$

1.2 Centre d'inertie d'un solide indéformable :

1.2.1 Définition :

Définition 27. On appelle centre d'inertie d'un système matériel Σ, le point G défini pour tout point P de Σ par :

$$\boxed{\int_{P\in\Sigma} \overrightarrow{GP}\, dm = \vec{0}}$$

Si O est un point quelconque, la relation de Chasles permet d'écrire :

$$\int_{P\in\Sigma} \left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OP}\right) dm = \vec{0} \Rightarrow \int_{P\in\Sigma} \overrightarrow{GO}\, dm + \int_{P\in\Sigma} \overrightarrow{OP}\, dm = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OG} \cdot \int_{P\in\Sigma} dm = \int_{P\in\Sigma} \overrightarrow{OP}\, dm$$

Donc : $m_\Sigma \cdot \overrightarrow{OG} = \int_{P\in\Sigma} \overrightarrow{OP}\, dm$, il vient finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_\Sigma} \int_{P\in\Sigma} \overrightarrow{OP}\, dm}$$

Dans un repère cartésien, on note (x_G, y_G, z_G) les coordonnées de $\overrightarrow{OG}$ et (x, y, z) les coordonnées de $\overrightarrow{OP}$, on peut écrire :

$$x_G = \frac{1}{m_\Sigma} \cdot \int_\Sigma x \cdot dm,\ y_G = \frac{1}{m_\Sigma} \cdot \int_\Sigma y \cdot dm,\ z_G = \frac{1}{m_\Sigma} \cdot \int_\Sigma z \cdot dm$$

1.2.2 Théorèmes de Guldin :

Énoncé 1. *(Centre d'inertie d'une courbe plane)* Soient (C) une courbe du plan (Π) et (Δ) une droite du plan ne coupant pas (C). L'aire de la surface engendrée par la rotation de la courbe (C) autour de la droite (Δ) est égal au produit de la longueur de la courbe L par le périmètre décrit par son centre d'inertie $2\pi \cdot r_G$.

$$\boxed{S = 2\pi \cdot r_G \cdot L}$$

<u>Démonstration :</u>
On associe à la courbe (C) une masse linéique λ constante,
$dm = \lambda \cdot dl$ d'où la masse totale de la courbe $m_c = \lambda \cdot L$. La position du centre d'inertie de la courbe est calculée par la relation générale :

$$m_c \cdot \overrightarrow{OG} = \int_{P\in C} \overrightarrow{OP}\, dm$$

ici cette relation devient :

$$\lambda \cdot L \cdot \overrightarrow{OG} = \int_{P\in C} \overrightarrow{OP} \cdot \lambda \cdot dl$$

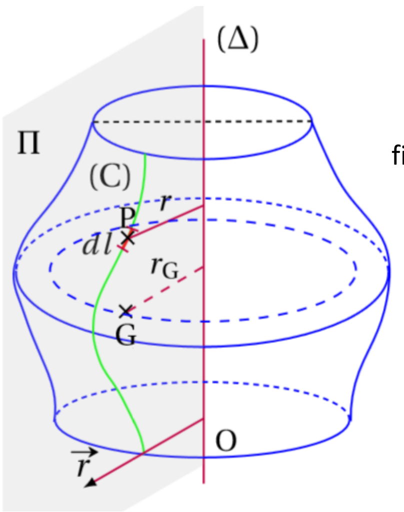


figure 2.2

Après simplification puis en ne prenant que la projection suivant $\vec{r}$:

$$L \cdot \overrightarrow{OG} = \int_{P\in C} \overrightarrow{OP} \cdot dl \;\Rightarrow L \cdot r_G = \int_{P\in C} r \cdot dl$$

Calculons maintenant la surface engendrée par la rotation de la courbe

$$S = \int_S r \cdot d\theta \cdot dl = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_C r \cdot dl = 2 \cdot \pi \cdot \int_C r \cdot dl$$

En substituant $\int_C r \cdot dl = L \cdot r_G$ dans cette égalité on retrouve bien le résultat cherché.

Énoncé 2. *(Centre d'inertie d'une surface plane homogène)* Soient (S) une surface du plan (Π) et (Δ) une droite du plan ne coupant pas (S). Le volume engendré par la rotation de la surface plane tournant autour de l'axe (Δ) est égal au produit de l'aire de la surface par la longueur du périmètre décrit par son centre d'inertie.

$$\boxed{V=2\pi \cdot r_G \cdot S}$$

On démontre cette égalité comme la précédente. On associe à (S) une masse surfacique $dm=\sigma \cdot ds$ constante et
$m_S = \sigma \cdot S$.

Par définition :

$$m_S \cdot \overrightarrow{OG} = \int_{P\in S} \overrightarrow{OP}\, dm$$

ici cette relation devient :

$$S \cdot \overrightarrow{OG} = \int_{P\in C} \overrightarrow{OP} \cdot ds$$

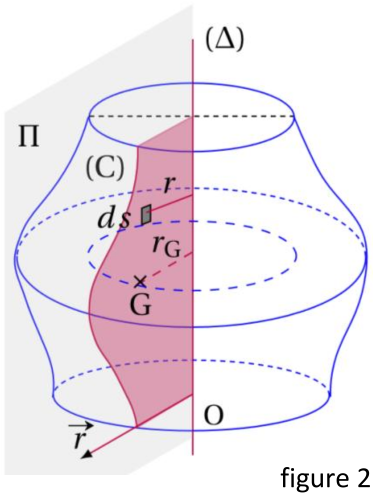


figure 2.3

Soit en projection suivant $\vec{r}$:

$$S \cdot r_G = \int_{P\in C} r \cdot ds$$

Le volume engendré par la rotation de la surface (S) s'écrit :

$$V = \int_V r \cdot d\theta \cdot ds = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_S r \cdot ds = 2 \cdot \pi \cdot \int_S r \cdot ds$$

d'où la relation cherchée :

$$V=2\pi \cdot r_G \cdot S$$

Remarque : l'utilisation des théorèmes de Guldin permet de simplifier le calcul de position du centre d'inertie dans la mesure où l'on connaît les caractéristiques du volume et de la surface balayée.

2 Opérateur et moments d'inertie :

2.1 Opérateur d'inertie - matrice d'inertie :

Définition 28. On appelle opérateur d'inertie $[I_{(A,S)}]$ au point A d'un solide S, l'opérateur qui à tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace associe le vecteur :

$$\boxed{\left[I_{(A,S)}\right]\cdot\vec{u} = \int_{P\in S} \overrightarrow{AP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm}$$

Définition 29. L'opérateur d'inertie $[I_{(A,S)}]$ s'écrit dans la base orthonormée $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ d'un repère R sous la forme canonique :

$$\boxed{\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}}$$

avec

$$\boxed{\begin{aligned}
A &= \int_S (y^2+z^2)\ dm = I_{(A;\vec{x})} \quad moment\ d'inertie\ de\ S\ autour\ de\ (A;\vec{x}) \\
B &= \int_S (z^2+x^2)\ dm = I_{(A;\vec{y})} \quad moment\ d'inertie\ de\ S\ autour\ de\ (A;\vec{y}) \\
C &= \int_S (x^2+y^2)\ dm = I_{(A;\vec{z})} \quad moment\ d'inertie\ de\ S\ autour\ de\ (A;\vec{z}) \\
D &= \int_S y\cdot z\ dm = I_{yz} \quad produit\ d'inertie\ de\ S\ par\ rapport\ au\ plan\ (A;\vec{y},\vec{z}) \\
E &= \int_S z\cdot x\ dm = I_{zx} \quad produit\ d'inertie\ de\ S\ par\ rapport\ au\ plan\ (A;\vec{x},\vec{z}) \\
F &= \int_S x\cdot y\ dm = I_{xy} \quad produit\ d'inertie\ de\ S\ par\ rapport\ au\ plan\ (A;\vec{x},\vec{y})
\end{aligned}}$$

C'est la matrice d'inertie du solide S en A dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Théorème 15. Théorème de Huygens

La relation de Chasles, en passant par le centre d'inertie G du solide S, permet d'en déduire le théorème de Huygens.

$$\left[I_{(A,S)}\right]\cdot\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AP}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP})\ dm$$

$$\left[I_{(A,S)}\right]\cdot\vec{u} = \int_S (\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GP})\wedge(\vec{u}\wedge(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GP}))\ dm$$

$$\left[I_{(A,S)}\right]\cdot\vec{u} = m\cdot\overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}) + \left[I_{(G,S)}\right]\cdot\vec{u}$$

$$\left[I_{(A,S)}\right]\cdot\vec{u} = \left[I_{(A,m(G,S))}\right]\cdot\vec{u} + \left[I_{(G,S)}\right]\cdot\vec{u}$$

$$\boxed{\lfloor I_{(A,S)} \rfloor \cdot \vec{u} = \lfloor I_{(G,S)} \rfloor \cdot \vec{u} + \lfloor I_{(A,m(G,S))} \rfloor \cdot \vec{u}}$$

Le second terme à droite de l'égalité correspondant à l'opérateur d'inertie en A du solide fictif de masse m « concentrée » en G.

Dans le théorème de Huygens, la matrice d'inertie $[I_{(A,m(G,S))}]$ peut ainsi s'écrire :

$$\boxed{\left[I_{(A,m(G,S))}\right] = \int_{P \in S} (\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}))\, dm = m \cdot (\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG})) = m \cdot \begin{bmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G \cdot y_G & -z_G \cdot x_G \\ -x_G \cdot y_G & z_G^2 + x_G^2 & -y_G \cdot z_G \\ -z_G \cdot x_G & -y_G \cdot z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{bmatrix}_{(A;\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

avec $\overrightarrow{AG} = x_G \cdot \vec{x} + y_G \cdot \vec{y} + z_G \cdot \vec{z}$

2.2 Base principale d'inertie :

La matrice d'inertie à coefficients réels étant symétrique, elle est donc diagonalisable.

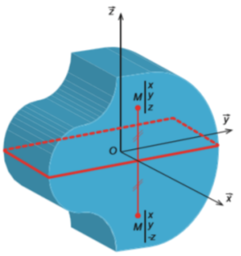
Définition 30. La base dans laquelle la matrice d'inertie est diagonale est appelée base principale d'inertie.

Définition 31. On appelle axe principal d'inertie, un axe dirigé par un vecteur de la base principale d'inertie.

Certaines propriétés de symétrie du solide S autorisent la simplification rapide de la matrice d'inertie. Le théorème ci-dessous les précise

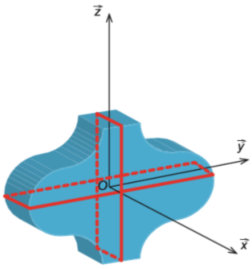
Théorème 16. Les propriétés suivantes permettent de simplifier la matrice d'inertie d'un solide S donnée dans une base orthonormée B :

- si le solide S possède un plan de symétrie, l'axe perpendiculaire à ce plan est un axe principal d'inertie;
- si le solide S possède deux plans de symétrie perpendiculaires, la base dont deux de ses faces sont plans de symétrie du solide est base principale d'inertie;
- si le solide S possède un axe de symétrie, cet axe est axe principal d'inertie;
- si le solide S possède une dimension négligeable par rapport aux deux autres dimensions, alors les deux produits d'inertie contenant la dimension de cette direction sont nuls.



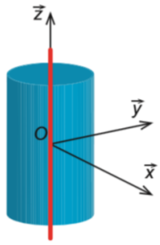
$$\begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

figure 2.4
Solide à un plan de symétrie :
plan symétrie: $(O;\vec{x},\vec{y}) \Rightarrow D = E = 0$



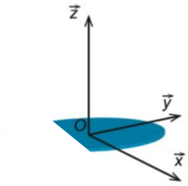
$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

figure 2.5
Solide à 2 plans de symétrie :
plan symétrie: $(O;\vec{x},\vec{y}) \Rightarrow D=E=0$
plan symétrie: $(O;\vec{x},\vec{z}) \Rightarrow D=F=0$



$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

figure 2.6
Solide présentant une symétrie de révolution :
plan symétrie: $(O;\vec{x},\vec{y}) \Rightarrow D=E=0$
plan symétrie: $(O;\vec{x},\vec{z}) \Rightarrow D=F=0$
axe symétrie : $(O;\vec{z}) \Rightarrow A=B$



$$\begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

figure 2.7
Solide à une dimension négligeable

Remarques :

- Si le point d'écriture est le centre d'inertie, on parle alors de **base centrale** et de **moments centraux d'inertie**.
- Les moments centraux d'inertie sont minima.

2.3 Changement de base :

Connaissant la matrice d'inertie du solide S en un point A dans la base B_1, on se propose de déterminer cette matrice en ce même point dans la base B_2.

Théorème 17. Soit $[I(A,S)_{B1}]$ et $[I(A,S)_{B2}]$ les matrices d'inertie d'un solide S respectivement dans la base B_1 et la base B_2, et $P_{B1,B2}$ la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2, on a alors :

$$\boxed{\left[I_{(A,S)B_2}\right] = P^{-1}_{B_1,B_2} \cdot \left[I_{(A,S)B_1}\right] \cdot P_{B_1,B_2}}$$

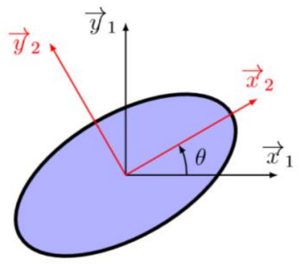


figure 2.10

Dans ce cas, $P_{B1,B2}$ est égale à :

$$P_{B_1,B_2} = \begin{array}{c c} \begin{array}{c} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{array} & \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{B_1} \\ & \begin{array}{ccc} \vec{x}_2 & \quad \vec{y}_2 & \quad \vec{z}_1 \end{array} \end{array}$$

Les colonnes de la matrice de passage sont coordonnées des vecteurs de la nouvelle base exprimés dans l'ancienne.

Remarque : comme $\det P_{B_1,B_2} = \pm 1$ alors $P^{-1}_{B_1,B_2} = {}^tP_{B_1,B_2}$

2.4 Moment d'inertie par rapport à un axe Δ :

Définition 32. Le moment d'inertie d'un solide S par rapport à un axe $\Delta(A;\vec{u})$ est le nombre réel positif $I_{(A,S/\Delta)}$ tel que :

$$\boxed{I_{(A,S/\Delta)} = \int_{P\in S} \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 dm}$$

On démontre que $I_{(A,S/\Delta)}$ peut aussi se noter :

$$\boxed{I_{(A,S/\Delta)} = \vec{u} \cdot \left[I_{(A,S)}\right] \cdot \vec{u}} \quad \text{[kg.m²]}$$

Avec :

- A un point de Δ
- $\vec{u}$ un vecteur unitaire porté par Δ,

Démonstration :

Par définition le moment d'inertie autour de l'axe $\Delta(A;\vec{u})$ s'écrit :

$$I_{(A,S/\Delta)} = \int_{P\in S} \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 dm$$

Décomposons le calcul du moment d'inertie

$$I_{(A,S/\Delta)} = \int_{P\in S} \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 dm = \int_{P\in S} \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \cdot \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}\right) dm$$

$$I_{(A,S/\Delta)} = \int_{P\in S} \vec{u} \cdot (\overrightarrow{AP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}))\, dm$$

$$I_{(A,S/\Delta)} = \vec{u}\cdot \int_{P\in S} (\overrightarrow{AP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}))\, dm$$

$$\boxed{I_{(A,S/\Delta)} = \vec{u}\cdot \left[I_{(A,S)}\right]\cdot \vec{u}}$$

Si on pose :

$$\left[I_{(A,S)}\right] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_B$$

et $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ dans la base B alors :

$$I_{(A,S/\Delta)} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Théorème 18. Théorème de Huygens pour le moment d'inertie par rapport à un axe

Soient les axes $\Delta(A;\vec{u})$ et $\Delta(G;\vec{u})$ parallèles passant respectivement par A et par G. Si l'on note d la distance entre ces deux axes, on a :

$$\boxed{I_{(A,S/\Delta)} = I_{(G,S/\Delta G)} + m.d^2}$$

2.5 Moment d'inertie par rapport à un point :

Définition 33. Le moment d'inertie d'un solide S par rapport à un point A est le nombre réel positif $I_{(A,S)}$ tel que :

$$\boxed{I_{(A,S)} = \int_{P\in S} AP^2 \cdot dm} \text{ [kg.m²]}$$

On vérifie aisément que :

Théorème 19.

$$\boxed{I_{(A,S)} = \frac{1}{2}\cdot \left(I_{(A,S/(A;\vec{x})} + I_{(A,S/(A;\vec{y})} + I_{(A,S/(A;\vec{z})}\right)}$$

Démonstration :

On pose $\overrightarrow{AP} = x\cdot\vec{x} + y\cdot\vec{y} + z\cdot\vec{z}$

$$I_{(A,S)} = \int_{P\in S} AP^2 \cdot dm = \int_{P\in S} (x^2 + y^2 + z^2)\cdot dm$$

d'autre part voir 2.4:

$$I_{(A,S/\vec{x})} = \int_{P\in S} \left(\vec{x} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 dm = \int_{P\in S} (y^2 + z^2)\, dm$$

de même : $I_{(A,S/\vec{y})} = \int_{P\in S} (x^2 + z^2)\, dm$ et $I_{(A,S/\vec{z})} = \int_{P\in S} (x^2 + y^2)\, dm$

On constate bien donc que : $I_{(A,S)} = \frac{1}{2}\cdot \left(I_{(A,S/(A;\vec{x})} + I_{(A,S/(A;\vec{y})} + I_{(A,S/(A;\vec{z})}\right)$

2.6 Rayon de giration :

Définition 34. Soit le solide S de masse m et de moment d'inertie I par rapport à un axe Δ. On appelle rayon de giration de S par rapport à Δ le nombre :

$$\boxed{\rho = \sqrt{\frac{I}{m}}} \quad \text{[m]}$$

Le rayon de giration précise la répartition de la masse par rapport à l'axe considéré. Le rayon de giration est celui d'un cylindre fictif de masse m, de rayon ρ et de moment d'inertie I par rapport à l'axe du cylindre.

3 Torseur cinétique :

3.1 Définition :

Soit un système matériel Σ en mouvement par rapport à un repère R

Définition 35. Le torseur cinétique du système matériel Σ dans son mouvement par rapport au repère R est défini par ses éléments de réduction en A

$$\boxed{\{C_{\Sigma/R}\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \vec{p} = \int\limits_{P\in\Sigma} \vec{V}_{P/R}\, dm \\ \vec{\sigma}_{A,\Sigma/R} = \int\limits_{P\in\Sigma} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}_{P/R}\, dm \end{array}\right\}}$$

- $\vec{V}_{P/R}$: Vitesse du point P du système matériel Σ dans son mouvement par rapport au repère R;
- $\vec{p}_{(E/R)} = \int\limits_{P\in\Sigma} \vec{V}_{P/R}\, dm$: Résultante cinétique ou quantité de mouvement de l'ensemble matériel Σ dans son mouvement par rapport à R;
- $\vec{\sigma}_{(A\Sigma/R)} = \int\limits_{P\in\Sigma} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}_{P/R}\, dm$: Moment cinétique au point A de l'ensemble matériel Σ dans son mouvement par rapport à R.

3.2 Expression du torseur cinétique dans le cas d'un solide indéformable :

Cas particulier du solide indéformable S *de masse m et de centre d'inertie* G. L'hypothèse de solide indéformable, permet d'associer les propriétés du champ des vecteurs vitesses d'un solide aux propriétés du torseur cinétique. Ainsi, pour P et A deux points liés au solide, la relation de composition des vitesses permet d'écrire :

$$\boxed{\vec{V}_{P,\ S/R} = \vec{V}_{A,\ S/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AP}}$$

avec $\vec{\Omega}_{S/R}$: le vecteur rotation du solide S par rapport au repère R.

Pour un solide S le torseur cinétique s'écrit :

$$\{C_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_{(S/R)} = \int_{P \in S} \vec{V}_{P/R} \, dm \\ \vec{\sigma}_{(A,S/R)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}_{P/R} \, dm \end{array} \right\}_A$$

et la résultante cinétique :

$$\boxed{\vec{p}_{(E/R)} = \int_{P \in S} \vec{V}_{P/R} \, dm = m \cdot \vec{V}_{G,\,S/R}}$$

En faisant intervenir le point A dans la détermination du moment cinétique d'un solide indéformable, on obtient :

$$\vec{\sigma}_{(A,S/R)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}_{P/R} \, dm$$

$$\vec{\sigma}_{(A,S/R)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{V}_{A,\,S/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AP}) \, dm$$

$$\vec{\sigma}_{(A,S/R)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}_{A,\,S/R} \, dm + \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AP}) \, dm$$

$$\vec{\sigma}_{(A,S/R)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \, dm \wedge \vec{V}_{A,\,S/R} + \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AP}) \, dm$$

On reconnaît :

- dans le premier terme la définition du centre d'inertie G :

$$\int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \, dm = m \cdot \overrightarrow{AG}$$

- dans le deuxième terme l'opérateur d'inertie du solide S au point A appliqué au vecteur :

$$\int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AP}) \, dm = \left[I_{(A,S)} \right] \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

Théorème 20. Le moment cinétique d'un solide indéformable dans son mouvement par rapport à un repère R devient :

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \overrightarrow{AG} \wedge m \cdot \overrightarrow{V_{A,S/R}} + \left[I_{(A,S)} \right] \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Théorème 21. Cas particuliers de points.

- Si A est confondu avec G : $\boxed{\vec{\sigma}_{(G,S/R)} = \left[I_{(G,S)}\right]\cdot\vec{\Omega}_{S/R}}$
- Si $\overrightarrow{V_{A,S/R}} = \vec{0}$: $\boxed{\vec{\sigma}_{(A,S/R)} = \left[I_{(A,S)}\right]\cdot\vec{\Omega}_{S/R}}$
- Si le solide S est translation par rapport à R : $\boxed{\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \overrightarrow{AG} \wedge m \cdot \overrightarrow{V_{A,S/R}}}$

Il est souvent préférable de calculer le moment cinétique soit au centre d'inertie soit en un point A du solide S fixe dans R, puis d'utiliser la relation de changement de point du moment cinétique si nécessaire.
Formule de changement de point :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{(B,S/R)} = \vec{\sigma}_{(A,S/R)} + \overrightarrow{BA} \wedge m \cdot \vec{V}_{G,\ S/R}}$$

Théorème 22. Cas d'un ensemble de solides : Soit $\Sigma = \{S1, S2,...,Sn\}$. On a :

$$\overrightarrow{\sigma_{(A,\Sigma/R)}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\sigma_{(A,S_i/R)}}$$

4 Torseur dynamique :

4.1 Définition :

Soit un système matériel Σ en mouvement par rapport à un repère R
Définition 36. Le torseur dynamique du système matériel Σ dans son mouvement par rapport au repère R est défini par ses éléments de réduction en A

$$\boxed{\left\{D_{\Sigma/R}\right\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{l} \vec{R}_{D(\Sigma/R)} = \displaystyle\int_{P\in\Sigma} \vec{a}_{P/R}\, dm \\ \vec{\delta}_{(A,\Sigma/R)} = \displaystyle\int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{a}_{P/R}\, dm \end{array}\right\}}$$

- $\vec{a}_{P/R}$: accélération du point P du système matériel Σ dans son mouvement par rapport au repère R;
- $\vec{R}_{D(E/R)} = \displaystyle\int_{P\in\Sigma} \vec{a}_{P/R}\, dm$: Résultante dynamique de l'ensemble matériel Σ dans son mouvement par rapport à R, on montre aussi que $\vec{R}_{D(E/R)} = m \cdot \vec{a}_{G/R}$;
- $\vec{\delta}_{(A,\Sigma/R)} = \displaystyle\int_{P\in\Sigma} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{a}_{P/R}\, dm$: Moment dynamique au point A de l'ensemble matériel Σ dans son mouvement par rapport à R.

4.2 Changement de point de réduction :

Le champ des moments dynamiques est un champ de moments. Pour changer de point de réduction, on utilise donc la relation générale des torseurs :

$$\boxed{\vec{\delta}_{(B,\Sigma/R)} = \vec{\delta}_{(A,\Sigma/R)} + \overrightarrow{BA} \wedge m \cdot \vec{a}_{G/R}}$$

4.3 Relation entre les éléments de réduction des torseurs cinétique et dynamique :

Théorème 23. Relation entre les résultantes, soit le repère R

$$\boxed{\vec{R}_{D(\Sigma/R)} = \left[\frac{d}{dt}\vec{p}_{(\Sigma/R)}\right]_R}$$

Par définition le moment cinétique d'un solide indéformable S par rapport à un repère R s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{(A,S/R)} = \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}_{P/R}\, dm$$

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_{(A,S/R)}}{dt}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}_{P/R}\, dm\right]_R$$

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_{(A,S/R)}}{dt}\right]_R = \int_{P\in S} \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}_{P/R}\right]_R dm$$

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_{(A,S/R)}}{dt}\right]_R = \int_{P\in S} \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AP}\right]_R \wedge \vec{V}_{P/R} dm + \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \left[\frac{d}{dt}\vec{V}_{P/R}\right]_R dm$$

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_{(A,S/R)}}{dt}\right]_R = \int_{P\in S} \left[\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA})\right]_R \wedge \vec{V}_{P/R} dm + \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{a}_{P/R} dm$$

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_{(A,S/R)}}{dt}\right]_R = \int_{P\in S} (\vec{V}_{P/R} - \vec{V}_{A/R}) \wedge \vec{V}_{P/R} dm + \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{a}_{P/R} dm$$

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_{(A,S/R)}}{dt}\right]_R = \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{a}_{P/R} dm - \int_{P\in S} \vec{V}_{A/R} \wedge \vec{V}_{P/R} dm$$

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_{(A,S/R)}}{dt}\right]_R = \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{a}_{P/R} dm - \int_{P\in S} \vec{V}_{A/R} \wedge \vec{V}_{P/R} dm$$

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_{(A,S/R)}}{dt}\right]_R = \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{a}_{P/R} dm - \vec{V}_{A/R} \wedge \int_{P\in S} \vec{V}_{P/R} dm$$

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_{(A,S/R)}}{dt}\right]_R = \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{a}_{P/R} dm - \vec{V}_{A/R} \wedge m \cdot \vec{V}_{G\ S/R}$$

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_{(A,S/R)}}{dt}\right]_R = \vec{\delta}_{(A,S/R)} - \vec{V}_{A\in S/R} \wedge m \cdot \vec{V}_{G,\ S/R}$$

Théorème 24. $$\boxed{\vec{\delta}_{(A,S/R)} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{(A,S/R)}}{dt}\right]_R + \vec{V}_{A/R} \wedge m \cdot \vec{V}_{G,\ S/R}}$$

Théorème 25. Cas particuliers de points :

- Si A est confondu avec G : $\boxed{\vec{\delta}_{(G,S/R)} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{(G,S/R)}}{dt}\right]_R}$
- Si A est un point fixe dans R ou si $\vec{V}_{A/R}$ est colinéaire à $\vec{V}_{G/R}$:

$$\boxed{\vec{\delta}_{(A,S/R)} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{(A,S/R)}}{dt}\right]_R}$$

Théorème 26. Cas d'un ensemble de solides : Soit $\Sigma=\{S1, S2,...,Sn\}$. On a

$$\overrightarrow{\delta_{(A,\Sigma/R)}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\delta_{A,S_i/R}}$$

5 Energie cinétique :

5.1 Définition :

Définition 37. On appelle énergie cinétique d'un système matériel Σ dans son mouvement par rapport à un repère R le nombre réel $T(\Sigma/R)$ tel que :

$$\boxed{2 \cdot T_{(S/R)} = \int_{P\in S} \overrightarrow{V_{P/R}}^2 dm} \text{ [J]}$$

5.2 Expression dans le cas du solide indéformable :

Soit un solide S de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère R, A un point lié au solide. Pour un solide, l'énergie cinétique du solide dans son mouvement par rapport au repère R s'écrit :

$$2 \cdot T_{(S/R)} = \int_{P\in S} \overrightarrow{V_{P,S/R}}^2 dm \quad \text{(P naturel de S)}$$

D'autre part le solide S étant indéformable on a :

$$\vec{V}_{P,\ S/R} = \vec{V}_{A,\ S/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AP}$$

d'où :

$$2 \cdot T_{(S/R)} = \int_{P\in S} (\vec{V}_{A,\ S/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AP})^2\, dm$$

$$2\cdot T_{(S/R)} = \int_{P\in S} \vec{V}_{A,\ S/R}{}^2\, dm + 2\cdot \int_{P\in S} \vec{V}_{A,\ S/R}\cdot(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge \overrightarrow{AP})\, dm + \int_{P\in S} (\vec{\Omega}_{S/R}\wedge \overrightarrow{AP})^2\, dm$$

Mais $\overrightarrow{V_{A,S/R}}$ et $\vec{\Omega}_{S/R}$ indépendants de la variable d'intégration dm

$$2\cdot T_{(S/R)} = m\cdot \vec{V}_{A,\ S/R}{}^2 + 2\cdot \vec{V}_{A,\ S/R}\cdot(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge \int_{P\in S} \overrightarrow{AP}\, dm) + \int_{P\in S} (\vec{\Omega}_{S/R}\wedge \overrightarrow{AP})\cdot(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge \overrightarrow{AP})dm$$

On reconnaît le produit mixte $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$ invariant par permutation circulaire dans le troisième terme avec $\vec{u}=\vec{\Omega}_{S/R}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AP}$ et $\vec{w}=(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{AP})$ soit alors :

$$2\cdot T_{(S/R)} = m\cdot \vec{V}_{A,\ S/R}{}^2 + 2\cdot m\cdot \vec{\Omega}_{S/R}\cdot(\overrightarrow{AG}\wedge \vec{V}_{A,\ S/R}) + \int_{P\in S} (\overrightarrow{AP}\wedge(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge \overrightarrow{AP}))dm\cdot\vec{\Omega}_{S/R}$$

On reconnait l'opérateur d'inertie du solide S en A :

$$\int_{P\in S} (\overrightarrow{AP}\wedge(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge \overrightarrow{AP}))\, dm = \left[I_{(A,S)}\right]\cdot\vec{\Omega}_{S/R}$$

Finalement la relation permettant de déterminer l'énergie cinétique du solide S est :

$$2\cdot T_{(S/R)} = m\cdot \vec{V}_{A,\ S/R}{}^2 + 2\cdot m\cdot \vec{\Omega}_{S/R}\cdot(\overrightarrow{AG}\wedge \vec{V}_{A,\ S/R}) + \vec{\Omega}_{S/R}\cdot\left[I_{(A,S)}\right]\vec{\Omega}_{S/R}$$

$$\boxed{T_{(S/R)} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot \vec{V}_{A,\ S/R}{}^2 + m\cdot \vec{\Omega}_{S/R}\cdot(\overrightarrow{AG}\wedge \vec{V}_{A,\ S/R}) + \frac{1}{2}\cdot\vec{\Omega}_{S/R}\cdot\left[I_{(A,S)}\right]\vec{\Omega}_{S/R}}$$

Cette dernière relation peut se réécrire en utilisant le comoment de deux torseurs :

Théorème 27.

$$2\cdot T_{S/R} = {}_Q\{V_{S/R}\}\otimes {}_Q\{C_{S/R}\} \quad \forall Q$$

Démonstration :

On note :

- le torseur cinématique en A du solide S dans son mouvement par rapport au repère R

$$\boxed{{}_A\{V_{S/R}\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{S/R}\\ \vec{V}_{A,\ S/R}\end{Bmatrix}}$$

- le torseur cinétique en A du solide S dans son mouvement par rapport au repère R

$$\boxed{{}_A\{C_{S/R}\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{p}_{S/R} = m\cdot\vec{V}_{G,\ S/R}\\ \vec{\sigma}_{A,\ S/R}\end{Bmatrix}}$$

$$2\cdot T_{(S/R)}=\{V_{S/R}\}\otimes\{C_{(S/R)}\}$$

$$2\cdot T_{(S/R)}={}_{A}\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{S/R}\\ \vec{V}_{A,\ S/R}\end{Bmatrix}\otimes{}_{A}\begin{Bmatrix}m\cdot\vec{V}_{G,\ S/R}\\ \vec{\sigma}_{A,S/R}\end{Bmatrix}$$

$$2\cdot T_{(S/R)}=\vec{\Omega}_{S/R}\cdot\vec{\sigma}_{A,S/R}+\vec{V}_{A,\ S/R}\cdot m\cdot\vec{V}_{G,\ S/R}$$

$$2\cdot T_{(S/R)}=\vec{\Omega}_{S/R}\cdot(m\cdot\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}_{A,\ S/R}+\left[I_{(A,S)}\right]\vec{\Omega}_{S/R})+m\cdot\vec{V}_{A,\ S/R}\cdot\vec{V}_{G,\ S/R}$$

$$2\cdot T_{(S/R)}=m\cdot\vec{V}_{A,\ S/R}{}^{2}+2\cdot m\cdot\vec{\Omega}_{S/R}\cdot(\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}_{A,\ S/R})+\vec{\Omega}_{S/R}\cdot\left[I_{(A,S)}\right]\vec{\Omega}_{S/R})$$

Ou encore :

$$T_{(S/R)}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\vec{V}_{A,\ S/R}{}^{2}+m\cdot\vec{\Omega}_{S/R}\cdot(\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}_{A,\ S/R})+\frac{1}{2}\cdot\vec{\Omega}_{S/R}\cdot\left[I_{(A,S)}\right]\vec{\Omega}_{S/R})$$

Théorème 28. Cas particuliers de points :

- Si A est en G centre d'inertie du solide S

$$\boxed{T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{V}_{G\in S/R}{}^{2} + \frac{1}{2} \cdot \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \left[I_{(G,S)}\right] \cdot \vec{\Omega}_{S/R})}$$

- Si A lié à S est fixe par rapport à R

$$\boxed{T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \left[I_{(A,S)}\right] \cdot \vec{\Omega}_{S/R})}$$

- Si le solide S est en translation dans R

$$\boxed{T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{V}_{G\in S/R}{}^{2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{V}_{A\in S/R}{}^{2}}$$