

2 Exercices Cinétique

Connaissances B2	Savoir-faire
<ul style="list-style-type: none"> • Centre d'inertie • Opérateur d'inertie • Matrice d'inertie • Torseur cinétique • Torseur dynamique • Energie cinétique 	Déterminer la relation entre la forme de la matrice d'inertie et la géométrie de la pièce. Déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide. Déterminer l'énergie cinétique d'un solide ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide.

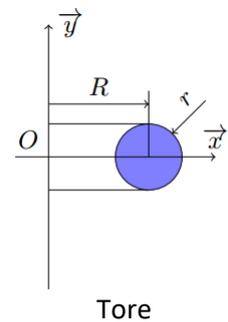
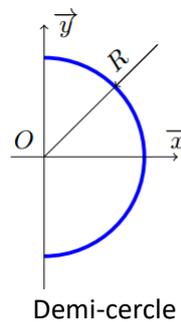
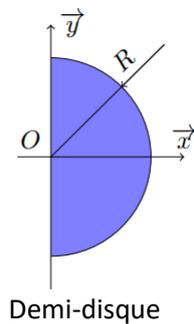
Sommaire

2.1 Géométrie des masses :	2
2.1.1 Centre d'inertie :	2
2.1.2 Matrice d'inertie :	3
2.1.3 Huygens/Koenig :	3
2.2 Torseurs cinétique & dynamique :	4
2.2.1 Toupie :	4
2.2.2 Régulateur centrifuge.....	5
1 Présentation et modélisation :	5
Travail demandé :	6
Détermination de la matrice d'inertie d'une masselotte.....	6
2.2.3 Pendule double :	7
2.3 Energie cinétique :	8
2.3.1 Roue présentant un balourd (V1).....	8
2.3.2 Roue présentant un balourd (V2) : comoment :	9
2.4 Eolienne bipale :	9
2.5 Balance gyrostatique de Kelvin :	10
Description :	10
Liaisons entre solides :	11
Paramétrage :	11
Caractéristiques d'inertie des solides :	11
2.5.1. Etude cinématique :	11
2.5.2. Etude cinétique :	11

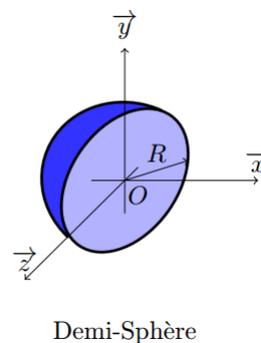
2.1 Géométrie des masses :

2.1.1 Centre d'inertie :

- Demi-disque
Déterminer la position du centre d'inertie d'un demi-disque de centre O et de rayon R .
- Demi-cercle
Déterminer la position du centre d'inertie d'un demi-cercle de centre O et de rayon R .
- Tore
Déterminer le volume d'un tore de rayon de « fil » r et de rayon d'enroulement R .



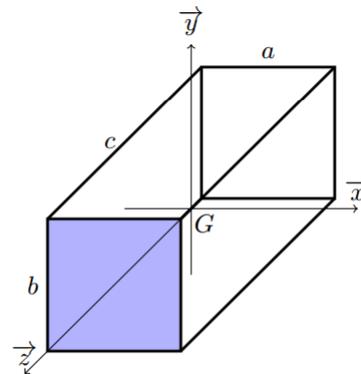
- Surface conique
En utilisant le théorème de Guldin, déterminer l'aire d'une surface conique de hauteur h et de rayon de base R .
- Demi-sphère
Déterminer la position du centre de masse d'une demi-sphère homogène de rayon R



2.1.2 Matrice d'inertie :

- Parallélépipède

Déterminer la matrice d'inertie en G d'un parallélépipède de dimensions $a \times b \times c$ et de masse m .



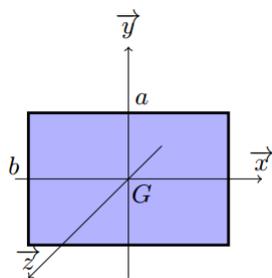
Parallélépipède

- Plaque

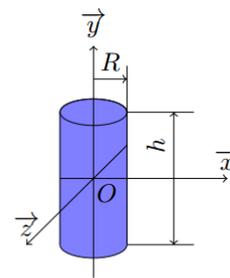
Déterminer la matrice d'inertie en G d'une plaque d'épaisseur négligeable, de dimensions $a \times b$ et de masse m .

- Cylindre

Déterminer la matrice d'inertie par rapport à l'axe $(O; \vec{z})$ d'un cylindre homogène de rayon R , de hauteur h et de masse m .



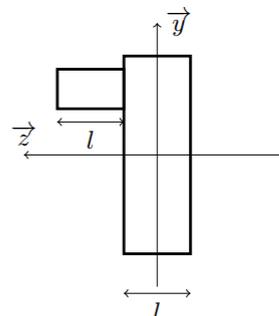
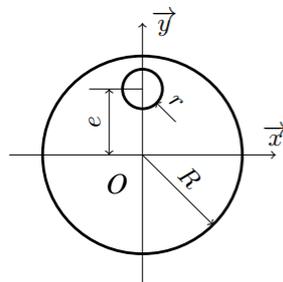
Plaque



Cylindre

2.1.3 Huygens/Koenig :

Déterminer la matrice d'inertie en O d'un solide homogène de masse m composé d'un cylindre de masse m_c de rayon R et de longueur l et d'un maneton de masse m_m de rayon r et de longueur l .

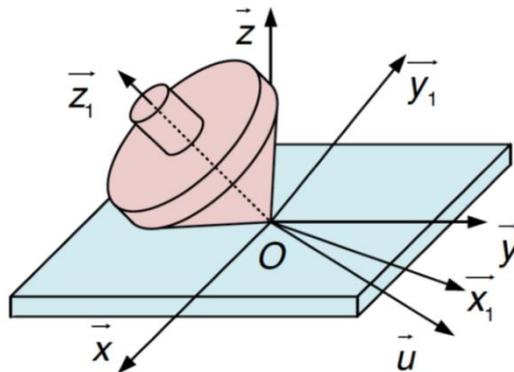


Excentrique

2.2 Torseurs cinétique & dynamique :

2.2.1 Toupie :

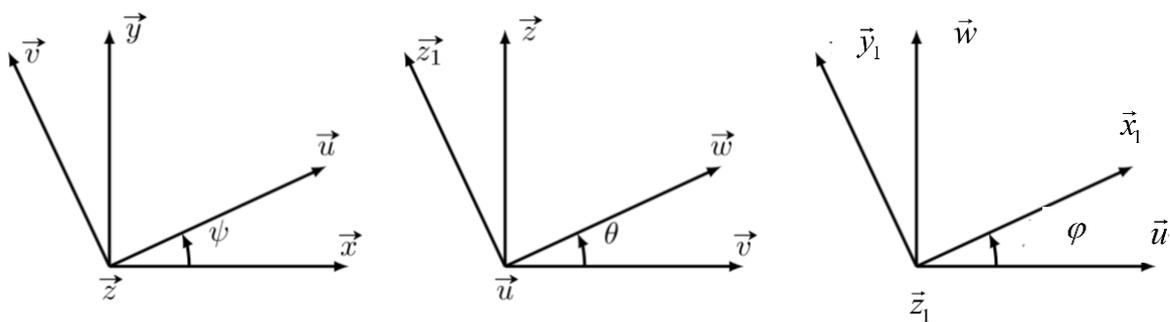
Considérons une toupie S d'axe de symétrie matérielle $(O; \vec{z}_1)$ dont la pointe O reste immobile sur le plan $(O; \vec{x}, \vec{y})$.



Soit $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au plan, l'axe $(O; \vec{z})$ étant dirigé suivant la verticale ascendante. Soit $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à S . La matrice d'inertie de S au point O est :

$$[I_{O,S}] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} (\dots, \vec{z}_1)$$

L'orientation de la base R_1 par rapport à la base R est définie par les trois angles d'Euler.



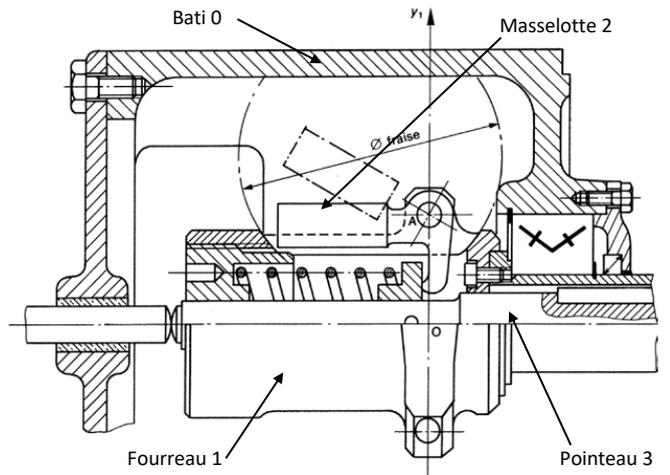
1. Déterminer le moment cinétique au point O de S dans son mouvement par rapport à R .
2. Déterminer le moment dynamique au point O de S dans son mouvement par rapport à R .
 - en projection sur $(O; \vec{z})$;
 - en projection sur $(O; \vec{z}_1)$;
 - en projection sur $(O; \vec{u})$.

2.2.2 Régulateur centrifuge

1 Présentation et modélisation :

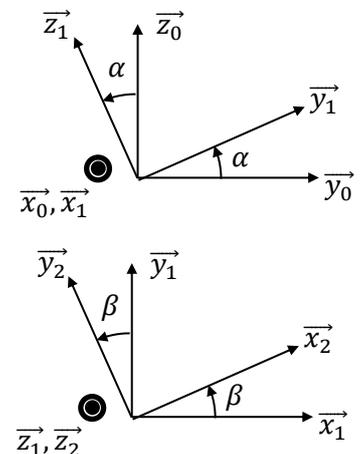
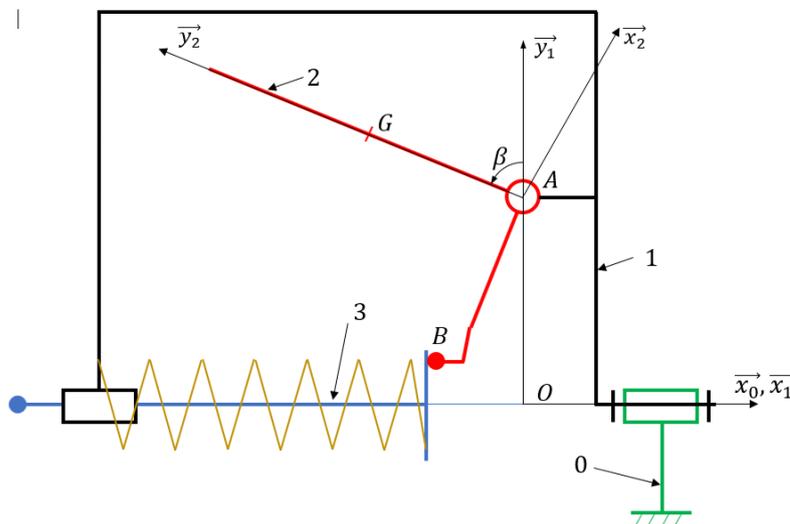
Un régulateur de vitesse de rotation d'une machine thermique est représenté ci-contre.

Trois masselottes sont fixées sur un fourreau. Le fourreau étant entraîné en rotation, il se développe une force centrifuge écartant les masselottes du fourreau. Le mouvement de rotation des masselottes est transmis à un pointeau coulissant dans le fourreau. Lorsque la vitesse de rotation du fourreau diminue un ressort repousse le pointeau et provoque la rotation inverse des masselottes.



Le schéma cinématique ci-dessous montre un régulateur simplifié constitué :

- D'un fourreau 1, en liaison pivot d'axe $(O; \vec{x}_{0,1})$ avec un bâti 0. On pose $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère lié au fourreau 1, $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère lié au bâti 0 et $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$.
- D'une masselotte 2 en liaison pivot d'axe $(A; \vec{z}_{1,2})$ avec le fourreau 1. On pose $R_2(A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ le repère lié à la masselotte 2 et $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$.
- D'un pointeau 3 en liaison glissière de direction \vec{x} avec le fourreau 1 et en liaison ponctuelle de normale $(B; \vec{x})$ avec la masselotte 2. On pose $R_3(B; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère lié au pointeau en translation par rapport à R_0 .



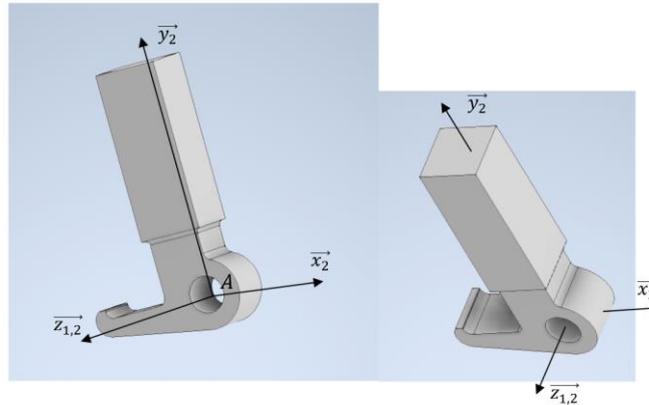
On donne par ailleurs : $\vec{OA} = a \cdot \vec{y}_1$, $\vec{AG} = b \cdot \vec{y}_2$, $\vec{BA} = c \cdot \vec{x}_2$

Travail demandé :

Q1. Proposer un graphe des liaisons.

Détermination de la matrice d'inertie d'une masselotte.

La figure ci-dessous montre la géométrie d'une masselotte.



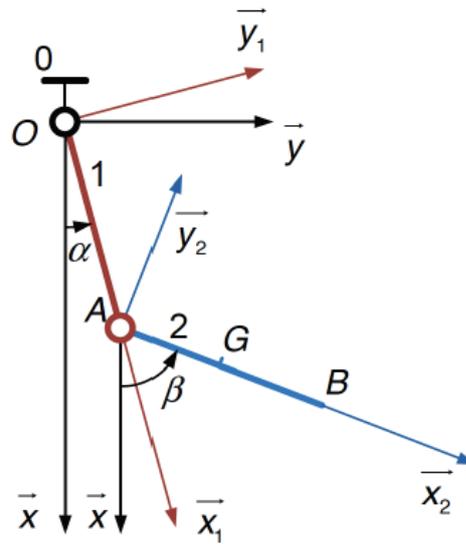
Q2. On demande de donner $[I_{A,2}]_{B_2}$ la forme de la matrice d'inertie au point A dans la base de la masselotte. Justifier.

Q3. Déterminer $\overrightarrow{\sigma_{A,2/R_0}}$ le moment cinétique au point A de 2 dans son mouvement par rapport à R_0 .

Q4. Déterminer $\overrightarrow{\delta_{A,2/R_0}} \cdot \vec{z}_1$ la projection sur \vec{z}_1 du moment dynamique au point A de 2 dans son mouvement par rapport à R_0 .

2.2.3 Pendule double :

Un pendule double est constitué de deux tiges 1 et 2 identiques, homogènes de masse m , de longueur $2.a$ et de dimensions transversales négligeables devant la longueur, oscillant dans le plan vertical $(O; \vec{x}, \vec{y})$ du repère $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au bâti O .



La tige 1, d'extrémités O et A est en liaison pivot d'axe $(O; \vec{z})$ avec le bâti O . On note $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à 1 tel que : $\vec{OA} = 2 \cdot a \cdot \vec{x}_1$ et on pose $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

La tige 2, d'extrémités A et B est en liaison pivot d'axe $(A; \vec{z})$ avec la tige 1. On note $R_2(A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié à 2 tel que $\vec{AB} = 2 \cdot a \cdot \vec{x}_2$ et on pose $\beta = (\vec{x}, \vec{x}_2)$.

On note G le centre d'inertie de la tige 2 situé au milieu du segment $[A; B]$.

1. Déterminer $[I_{A,2}]$
2. Déterminer le moment cinétique, au point A , de la tige 2 dans son mouvement par rapport au bâti O .
3. Déterminer le moment dynamique, au point A , de la tige 2 dans son mouvement par rapport au bâti O .
4. Déterminer le moment dynamique, au point O , de l'ensemble des tiges 1 et 2 dans leur mouvement par rapport au bâti O .

2.3 Energie cinétique :

2.3.1 Roue présentant un balourd (V1)

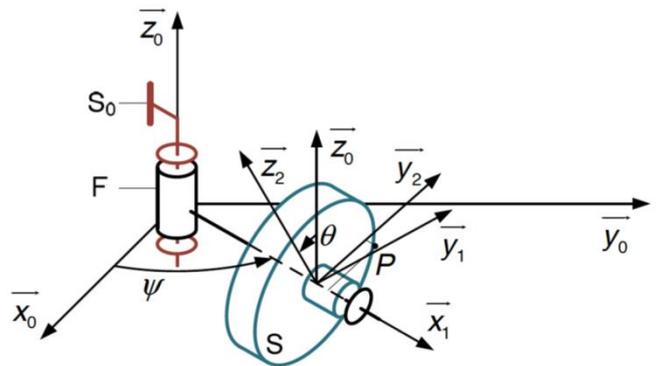
Le repère $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au châssis S_0 . L'axe $(O; \vec{z}_0)$ est dirigé suivant la verticale ascendante.

La fusée F est en liaison pivot d'axe $(O; \vec{z}_0)$ avec S_0 .

Soit $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ un repère lié à F , l'axe $(O; \vec{x}_1)$ étant dirigé suivant l'axe de la fusée. On pose $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.

Notons I le moment d'inertie de la fusée F par rapport à l'axe $(O; \vec{z}_0)$.

La roue S est en liaison pivot d'axe $(O; \vec{x}_1)$ avec la fusée F . S est assimilé à un solide de révolution d'axe $(O; \vec{x}_1)$, de masse M et de centre d'inertie G . Soit $R_2(G; \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à S . On pose $\vec{OG} = l \cdot \vec{x}_1$ et $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$. On désigne par A, B, B les moments principaux d'inertie de S au point G . Le point P schématisant le balourd, est un point matériel de masse m lié à S . La position de P dans S est définie par $\vec{OP} = d \cdot \vec{x}_1 + r \cdot \vec{y}_2$.



1. Déterminer en projection sur $(O; \vec{z}_0)$ le moment cinétique au point O de la fusée F dans son mouvement par rapport à R_0 , c'est-à-dire le réel $\vec{z}_0 \cdot \vec{\sigma}_{O,F/R_0}$.
2. Déterminer le moment cinétique au point O de la roue S dans son mouvement par rapport à R_0 , c'est-à-dire $\vec{\sigma}_{O,S/R_0}$.
3. Déterminer le moment cinétique au point O du balourd P dans son mouvement par rapport à R_0 , c'est-à-dire le réel $\vec{\sigma}_{O,P/R_0}$.
4. Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble constitué par F, S et P dans leur mouvement par rapport à R_0 . Calculs à réaliser sans utiliser le comoment

2.3.2 Roue présentant un balourd (V2) : comoment :

L'énoncé est identique au précédent.

Pour réaliser cet exercice, il est judicieux d'utiliser quelques résultats du précédent.

1. Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble constitué par F , S et P dans leur mouvement par rapport à R_0 . Calculs à réaliser en utilisant le comoment.

2.4 Eolienne bipale :

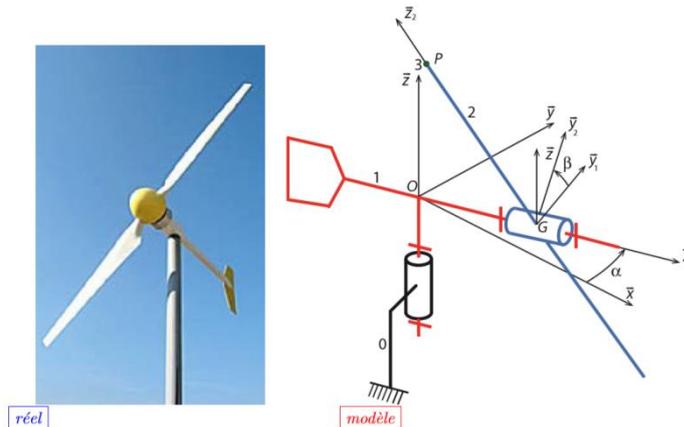


FIGURE 3.3 – Éolienne bipale

L'étude proposée a pour support une éolienne bipale. Elle est composée de trois sous-ensembles en mouvement par rapport à un bâti O . Le paramétrage choisi est le suivant :

- mât 0 auquel est associé le repère $R_0(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$;
- girouette 1 à laquelle est associée le repère $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$, en liaison pivot d'axe $(O; \vec{z})$ avec le mât 0 ; on note $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ le paramètre angulaire entre les deux repères; on note J le moment d'inertie de la girouette par rapport à l'axe $(O; \vec{z})$;
- hélice 2 à laquelle est associée le repère $R_2(G; \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, en liaison pivot d'axe $(O; \vec{x}_1)$ avec la girouette 1 ; on note $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ le paramètre angulaire entre les deux repères; on note M sa masse et G son centre d'inertie tel que $\vec{OG} = a \cdot \vec{x}_1$; on donne la matrice de l'opérateur d'inertie de l'hélice :

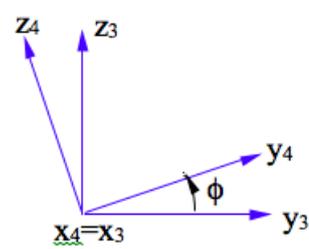
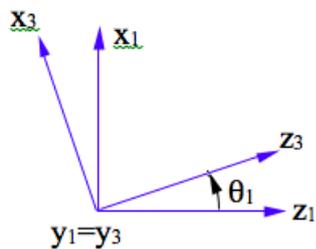
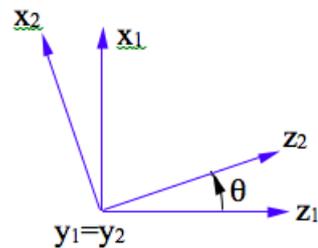
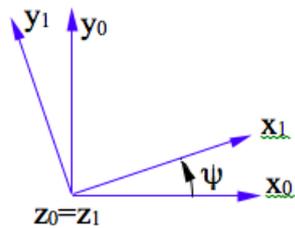
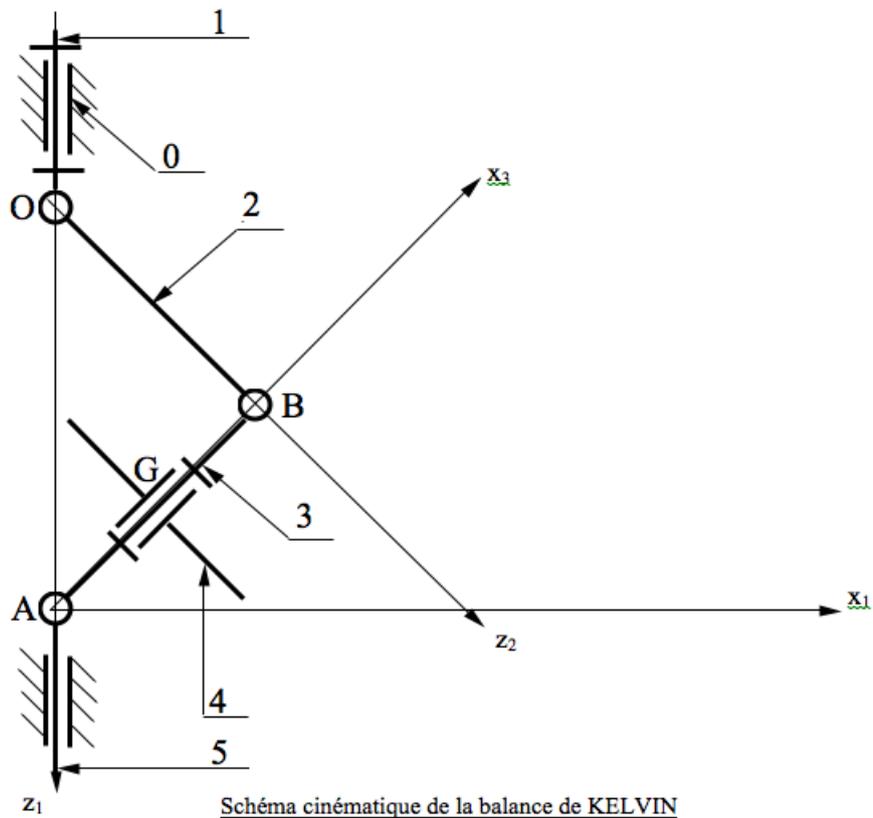
$$[I_{G,2}] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} (\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

On pose $\vec{GP} = b \cdot \vec{z}_2$

le déséquilibre potentiel de l'hélice est modélisé par un balourd 3 assimilé à une masse ponctuelle m au point P .

1. Déterminer la composante suivant la direction de \vec{z} du moment cinétique au point O de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au mât 0 .
2. Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O,2/R_0}$ de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0
3. En déduire la composante suivant \vec{z} du moment dynamique $\vec{\delta}_{O,2/R_0}$
4. Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O,3/R_0}$ de la masse ponctuelle m .

2.5 Balance gyrostatique de Kelvin :



Description :

Le mécanisme dont le schéma cinématique est donné ci-contre représente un dispositif constitué de 5 solides S_1, S_2, S_3, S_4 , et S_5

Le repère $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti S_0 est supposé galiléen.

L'axe (O, \vec{z}_0) est vertical descendant. Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

Liaisons entre solides :

L_{10} : Pivot d'axe \vec{z}_0

L_{21} : Pivot d'axe \vec{y}_1

L_{23} : Pivot d'axe \vec{y}_1

L_{34} : Pivot d'axe \vec{x}_3

L_{35} : Pivot d'axe \vec{y}_1

L_{50} : Pivot glissant d'axe \vec{z}_1

Paramétrage :

$$\overrightarrow{OB} = 2 \cdot a \cdot \vec{z}_2 ; \overrightarrow{OA} = z \cdot \vec{z}_1 ; \overrightarrow{AB} = 2 \cdot a \cdot \vec{x}_3 ; \overrightarrow{BG} = -a \cdot \vec{x}_3 ; \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta$$

Caractéristiques d'inertie des solides :

Barre S_1

- m_1 : masse du solide S_1
- G_1 : centre d'inertie de S_1 sur l'axe \vec{z}_1
- C_1 : moment d'inertie de S_1 autour de l'axe (O, \vec{z}_1)

Barre S_2 de longueur $2a$

- m_2 : masse du solide S_2 (négligeable)
- G_2 : centre d'inertie de S_2

Barre S_3 longueur $2a$

- m_3 : masse du solide S_3
- G_3 : centre d'inertie de S_3

Volant S_4

- m : masse du solide S_4
- G : centre d'inertie de S_4
- Matrice d'inertie du volant S_4 , au point G , exprimée dans R_4

$$[I(G, S_4)]_{R_4} = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix}_{G, R_4}$$

2.5.1. Etude cinématique :

1. Déterminer les éléments de réduction, exprimés dans le repère R_3 , au point G , du torseur cinématique du solide S_4 dans son mouvement par rapport à R_0 . Le vecteur vitesse doit être exprimé en fonction de $a, \theta, \dot{\theta}$ et $\dot{\psi}$

2.5.2. Etude cinétique :

2. Déterminer les éléments de réduction, au point G , du torseur cinétique du solide S_4 dans son mouvement par rapport à R_0 .

3. Déterminer le moment, au point G , du torseur dynamique du solide S_4 dans son mouvement par rapport à R_0 .

4. Déterminer l'énergie cinétique du solide S_4 dans son mouvement par rapport à R_0 .