

1 Chaines de solides

1.1 Liaison entre deux solides	2
1.1.1 Sous-espace vectoriel cinématique associé à une liaison élémentaire	2
1.1.2 Puissance dissipée dans une liaison – espace vectoriel dual de l’espace vectoriel cinématique	3
1.2 Liaisons composées	4
1.2.1 Liaisons en série	4
1.2.2 Liaisons en parallèle	8
1.3 Graphe des liaisons	11
1.4 Etude des chaines de solides	13
1.4.1 Cas particulier d’un cycle	13
1.4.2 Etude des chaînes de solides	14
1.5 Formulaire	18
1.6 Méthodologie : Quelle démarche choisir?	18
1.7 Bilan.....	19
1.7.1 Interprétation de la mobilité:.....	19
1.7.2 Interprétation de l’hyperstatisme:.....	19

1.1 Liaison entre deux solides

1.1.1 Sous-espace vectoriel cinématique associé à une liaison élémentaire

Le nombre maximal n_c de degrés de liberté (ddl) entre deux solides est six.

Définition 1. Soient deux solides S_i et S_j . Il existe une liaison élémentaire entre S_i et S_j s'il y a au moins un point de contact entre eux.

modèle cinématique de base :

$$\{V_{i/j}\} = P \left\{ \vec{\omega}_{i/j} \right\} = P \begin{Bmatrix} p_{ij} & u_{ij} \\ q_{ij} & v_{ij} \\ r_{ij} & w_{ij} \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

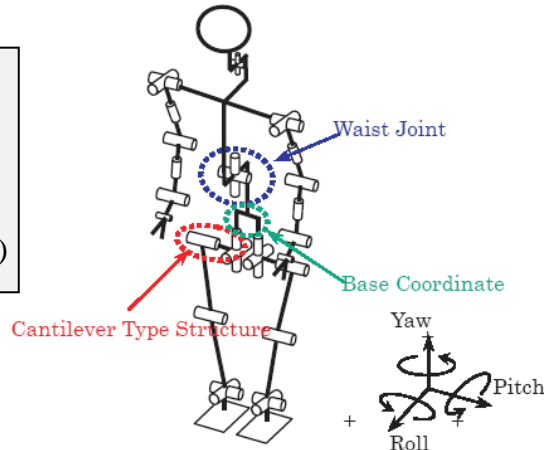
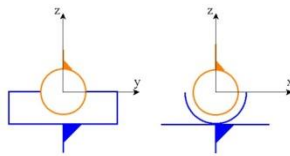
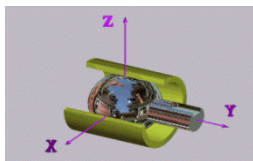


Figure 1.1 – Liaisons du robot HRP (30 degrés de liberté)

Exemple de la liaison linéaire annulaire d'axe ($A; \vec{y}$)



$$\{V_{2/1}\} = A \begin{cases} \vec{\omega}_{2/1} = p_{21} \cdot \vec{x} + q_{21} \cdot \vec{y} + r_{21} \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_{A \in 2/1} = v_{21} \cdot \vec{y} \end{cases}$$

Figure 1.2 – liaison linéaire annulaire d'axe ($A; \vec{y}$)

Théorème 1. Le nombre n_c de degrés de liberté entre deux solides en liaison élémentaire est tel que $n_c < 6$.

Le sous-espace vectoriel cinématique associé à une liaison élémentaire entre deux solides est, par conséquent, de dimension au plus égal à 5. C'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de l'ensemble des torseurs de dimension 6.

Théorème 2. La dimension de l'espace vectoriel cinématique L_{ij} associé à une liaison élémentaire vaut n_c .

$$\boxed{\dim(L_{ij}) = n_c}$$

Exemple : considérons une liaison linéaire annulaire d'axe ($A; \vec{y}$) entre deux solides S_1 et S_2 . Le sous-espace vectoriel cinématique L_{12} engendré par le torseur cinématique de la liaison linéaire annulaire est :

$$L_{12} = \left\{ V_{1/2} = A \left\{ \begin{array}{l} p_{12} \cdot \vec{x} + q_{12} \cdot \vec{y} + r_{12} \cdot \vec{z} \\ v_{12} \cdot \vec{y} \end{array} \right. , (p_{12}, q_{12}, r_{12}, v_{12}) \in \mathfrak{R}^4 \right\}$$

C'est un espace vectoriel de dimension 4. $\dim(L_{12}) = 4$

1.1.2 Puissance dissipée dans une liaison – espace vectoriel dual de l'espace vectoriel cinématique

Soit une liaison L_{ij} entre deux solides S_i et S_j . Cette liaison est caractérisée par la puissance qu'elle dissipe. Le cas d'une liaison parfaite est fondamental. Elle est définie par :

$$P(S_i \leftrightarrow S_j) = 0$$

Cette puissance des inter-efforts est le produit d'un effort, caractérisé par son torseur des actions mécaniques transmissibles $\{T(S_i \rightarrow S_j)\}$ et d'un flux caractérisé par son torseur cinématique $\{V_{S_j/S_i}\}$. La puissance des inter-efforts de la liaison L_{ij} est donnée par :

$$P(S_i \leftrightarrow S_j) = \underset{Q}{\{T(S_i \rightarrow S_j)\}} \otimes \underset{Q}{\{V_{S_j/S_i}\}} \quad \forall Q$$

A tout torseur cinématique caractérisant une liaison entre deux solides, on associe une action mécanique qui est une forme linéaire définie par la puissance qu'elle dissipe. Cela permet de définir l'espace vectoriel engendré par le torseur des actions mécaniques transmissibles par cette liaison comme le dual de l'espace vectoriel cinématique. L'espace vectoriel engendré par le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison L_{ij} est noté T_{ij} . Dans le cas d'une liaison parfaite, on vérifie que T_{ij} est l'orthogonal de L_{ij} . Puisque l'espace vectoriel des torseurs T est de dimension 6 et que :

$$\dim(L_{ij}) + \dim(T_{ij}) = 6$$

on a :

Théorème 3. La dimension de l'espace vectoriel engendré par le torseur des actions transmissibles par une liaison élémentaire est donnée par :

$$\boxed{\dim(T_{ij}) = 6 - \dim(L_{ij})}$$

autrement dit :

$$\boxed{n_s = 6 - n_c}$$

L'étude des liaisons peut se traiter indifféremment à partir de son torseur cinématique (on parle du point de vue cinématique) ou de son torseur des actions transmissibles (on parle du point de vue statique ou dynamique). Cela est dû à l'orthogonalité que nous venons de préciser.

Exemple de la liaison pivot glissant d'axe $(A; \vec{x})$:

modèle statique de base :

$$\begin{aligned} \{T_{j \rightarrow i}\} &= P \begin{Bmatrix} \vec{R}_{j \rightarrow i} \\ \vec{M}_{P j \rightarrow i} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} X_{ji} & L_{ji} \\ Y_{ji} & M_{ji} \\ Z_{ji} & N_{ji} \end{Bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \end{aligned}$$

- torseur cinématique : $\{V_{1/2}\} = A \begin{Bmatrix} \vec{\omega}_{1/2} = p_{1/2} \cdot \vec{x} \\ \vec{V}_{P \in 1/2} = u_{1/2} \cdot \vec{x} \end{Bmatrix}$
- torseur des actions mécaniques : $\{T(2 \rightarrow 1)\} = A \begin{Bmatrix} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = Y_{21} \cdot \vec{y} + Z_{21} \cdot \vec{z} \\ \vec{M}_{A 2 \rightarrow 1} = M_{21} \cdot \vec{y} + N_{21} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}$
- puissance dissipée $P(2 \leftrightarrow 1) = A \{T(2 \rightarrow 1)\} \otimes A \{V_{1/2}\} = 0$

1.2 Liaisons composées

1.2.1 Liaisons en série

Définition 2. Liaisons en série - Soit trois solides S_i , S_j et S_k . Soit L_{ij} la liaison entre le solide S_i et le solide S_j . Soit L_{jk} la liaison entre le solide S_j et le solide S_k . On dit que les liaisons L_{ij} et L_{jk} sont en série.

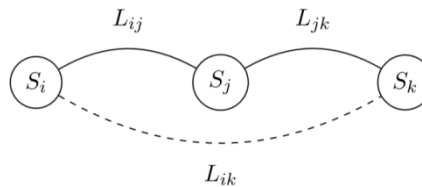


Figure 1.3(a) – Liaisons en série- Étude cinématique

Étude cinématique :

La liaison L_{ik} est appelée liaison équivalente aux deux liaisons en série L_{ij} et L_{jk} . La loi de composition des vitesses se traduit par :

$$P \{V_{Si/Sk}\} = P \{V_{Si/Sj}\} + P \{V_{Sj/Sk}\}$$

Théorème 4. Le sous-espace vectoriel L_{ik} engendré par le torseur cinématique de la liaison L_{ik} est la somme des deux sous-espaces vectoriels L_{ij} et L_{jk} engendrés respectivement par les torseurs cinématiques des liaisons L_{ij} et L_{jk} .

La dimension de l'espace vectoriel L_{ik} est donnée par :

$$\dim(L_{ik}) = \dim(L_{ij}) + \dim(L_{jk}) - \dim(L_{ij} \cap L_{jk})$$

Définition 3. Considérons les trois sous-espaces vectoriels L_{ij} , L_{jk} et L_{ik} tels que :
 $L_{ik} = L_{ij} + L_{jk}$. On appelle :

- mobilité utile, la dimension de l'espace vectoriel L_{ik} . On pose $m_u = \dim(L_{ik})$;
- mobilité interne, la dimension de l'espace vectoriel $L_{ij} \cap L_{jk}$. On pose :
 $m_i = \dim(L_{ij} \cap L_{jk})$. Elle correspond au nombre de degrés de liberté restant quand $\{V_{S_{i/sk}}\}$ est fixé;
- mobilité, l'entier $m = m_u + m_i$.

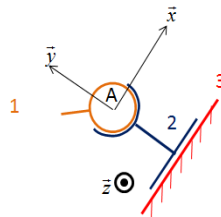
I_c est le nombre total d'inconnues cinématiques. Il est égal à la somme des dimensions de L_{ij} et de L_{jk} . On a donc, dans le cas de deux liaisons en série

$$I_c = m = m_u + m_i$$

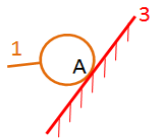
Exemple : Liaison ponctuelle réalisée par une rotule et un appui plan

$${}_A \{V_{1/2}\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{1/2} = p_{12} \cdot \vec{x} + q_{12} \cdot \vec{y} + r_{12} \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_{Ae1/2} = \vec{0} \end{array} \right\}$$

$${}_A \{V_{2/3}\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2/3} = q_{23} \cdot \vec{y} \\ \vec{V}_{Ae2/3} = u_{23} \cdot \vec{x} + w_{23} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}$$



$${}_A \{V_{1/3}\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{1/3} = p_{13} \cdot \vec{x} + q_{13} \cdot \vec{y} + r_{13} \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_{Ae1/3} = u_{13} \cdot \vec{x} + w_{13} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}$$



Les liaisons sont en série donc : ${}_A \{V_{1/3}\} = {}_A \{V_{1/2}\} + {}_A \{V_{2/3}\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{12} = p_{13} \\ q_{12} + q_{23} = q_{13} \rightarrow \text{ne peut être résolu (mobilité interne)} \\ r_{12} = r_{13} \\ u_{23} = u_{13} \\ 0 = 0 \rightarrow \text{Equation trivialement vérifiée : immobilité de 1/3} \\ w_{23} = w_{13} \end{array} \right.$$

$I_c = 6$ inconnues dont $m_i = 1$ doit être imposée pour résoudre

$m_u = 5$ équations

On vérifie : $m_u + m_i = I_c = m$

Étude statique :

On suppose les solides en équilibre, on néglige le poids des pièces, les actions extérieures appliquées sur le solide S_n sont représentées par le torseur d'action mécanique $\{F_{ext \rightarrow n}\}$.

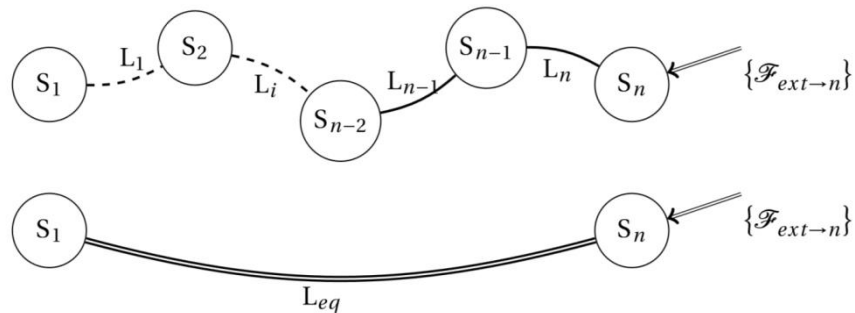


FIGURE 1.3(b) – Liaisons en série - Étude statique

On note :

- $\{T(S_{(n-1)} \rightarrow S_n)\}$, le torseur des actions transmissibles par la liaison L_n entre les solides S_n et S_{n-1} ,
- $\{T(eq)\} = \{T(S_1 \rightarrow S_n)\}$, le torseur des actions transmissibles par la liaison équivalente Leq entre les solides S_1 et S_n .

La liaison équivalente doit se comporter du point de vue des efforts transmissibles comme l'ensemble des liaisons en série. Si on applique le PFS au solide S_n , on peut donc écrire dans un cas comme dans l'autre :

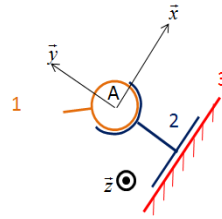
- pour les liaisons en série $\sum_P \{T(S_{(n-1)} \rightarrow S_n)\} + \sum_P \{F_{ext \rightarrow n}\} = \{0\}$
- pour la liaison équivalente $\sum_P \{T(eq)\} + \sum_P \{F_{ext \rightarrow n}\} = \{0\}$

On en déduit que $\sum_P \{T(eq)\} = \sum_P \{T(S_{(n-1)} \rightarrow S_n)\}$ et finalement en isolant successivement chacun des solides jusqu'au solide S_2 , on en déduit que tous les torseurs des actions de liaisons doivent être égaux et égaux à celui de la liaison équivalente.

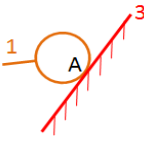
$$\sum_P \{T(eq)\} = \sum_P \{T(S_{(n-1)} \rightarrow S_n)\} = \sum_P \{T(S_{(n-2)} \rightarrow S_{(n-1)})\} = \dots = \sum_P \{T(S_2 \rightarrow S_1)\}$$

Exemple : Liaison ponctuelle réalisée par une rotule et un appui plan

$$A \{T_{2 \rightarrow 1}\} = A \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{2 \rightarrow 1} = X_{21} \cdot \vec{x} + Y_{21} \cdot \vec{y} + Z_{21} \cdot \vec{z} \\ \vec{M}_{A \in 2 \rightarrow 1} = \vec{0} \end{array} \right\}$$



$$A \{T_{3 \rightarrow 1}\} = A \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{3 \rightarrow 1} = Y_{31} \cdot \vec{y} \\ \vec{M}_{A \in 3 \rightarrow 1} = \vec{0} \end{array} \right\}$$



$$A \{T_{3 \rightarrow 2}\} = A \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{3 \rightarrow 2} = Y_{32} \cdot \vec{y} \\ \vec{M}_{A \in 3 \rightarrow 2} = L_{32} \cdot \vec{x} + N_{32} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}$$

En isolant 1 on peut écrire que :

- $A \{T_{3 \rightarrow 1}\} + A \{F_{ext \rightarrow 1}\} = \{\vec{0}\}$ or $A \{T_{3 \rightarrow 1}\} = A \{T_{eq}\}$
- donc $A \{T_{eq}\} + A \{F_{ext \rightarrow 1}\} = \{\vec{0}\}$

Donc en imposant $A \{F_{ext \rightarrow 1}\}$ compatible avec la liaison ponctuelle équivalente :

$$A \{F_{ext \rightarrow 1}\} = A \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{ext \rightarrow 1} = Y \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

On isole 1 puis 2 (3 est le bâti) :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{21} + 0 = 0 \\ Y_{21} + Y = 0 \\ Z_{21} + 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xleftarrow{\text{la même équation}} \\ \\ \xleftarrow{\text{la même équation}} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -X_{21} + 0 = 0 \\ -Y_{21} + Y_{32} = 0 \\ -Z_{21} + 0 = 0 \\ L_{32} = 0 \\ 0 = 0 \\ N_{32} = 0 \end{array} \right.$$

Rappel :

m_u : nbre d'équations indépendantes ou nbre de ddl (n_c) de la liaison équivalente

m_i : nbre d'équations ne pouvant être résolues

- 2×6 équations
- $I_s = 3+3$ inconnues
- $m_u + m_i = 5+1$
- on vérifie $I_s = 2 \times 6 - (m_u + m_i)$

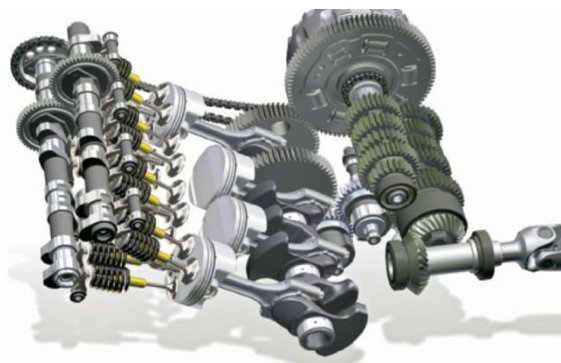


Figure 1.4 – Liaisons en série vilebrequin-bielle-piston
Chains de solides

1.2.2 Liaisons en parallèle

Définition 4. Liaisons en parallèle - Soit deux solides S_i et S_j . Soit $L1_{ij}$ une première liaison entre le solide S_i et le solide S_j . Soit $L2_{ij}$ une seconde liaison entre le solide S_i et le solide S_j . On dit que les liaisons $L1_{ij}$ et $L2_{ij}$ sont en parallèle.

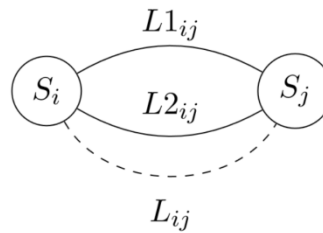


Figure 1.5 – Liaisons en parallèle

Étude cinématique :

L'ensemble des liaisons $L_n ij$ en parallèle impose le mouvement du solide S_j par rapport au solide S_i , le torseur cinématique $\{V_{Sj/Si}\}$ représente ce mouvement. Chaque liaison élémentaire $L_n ij$ ne peut que respecter le mouvement global du solide S_j par rapport au solide S_i , on peut donc écrire :

$$\{V_{n_{Sj/Si}}\} = \{V_{Sj/Si}\}$$

Le comportement cinématique de la liaison équivalente $L_{ij} = L_{eq}$ doit aussi respecter le mouvement global du solide 2 par rapport au solide 1 :

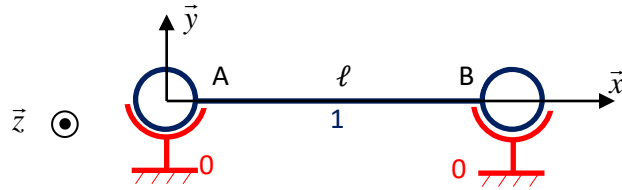
$$\{V_{eq_{Sj/Si}}\} = \{V_{Sj/Si}\}$$

d'où la condition que doit respecter le torseur de la liaison équivalente à n liaisons en parallèle :

$$\boxed{\{V_{eq_{Sj/Si}}\} = \{V_{1_{Sj/Si}}\} = \{V_{2_{Sj/Si}}\} = \dots = \{V_{i_{Sj/Si}}\} = \{V_{n_{Sj/Si}}\}}$$

Pour déterminer, à partir de l'étude cinématique, la liaison équivalente à n liaisons en parallèle, il suffit de résoudre le système de $6 \cdot n$ équations déduit des égalités de torseurs ci-dessus.

Exemple : Liaison pivot réalisée à l'aide de deux liaisons rotules



$$\{V_{1/0}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{11/0} = p_A \cdot \vec{x} + q_A \cdot \vec{y} + r_A \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_{1A \in 1/0} = \vec{0} \end{array} \right\}}$$

et

$$\{V_{2/0}\} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{21/0} = p_B \cdot \vec{x} + q_B \cdot \vec{y} + r_B \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_{2B \in 1/0} = \vec{0} \end{array} \right\}}$$

Les liaisons sont en parallèle donc : $\underset{Q}{\{V_{1/0}\}} = \underset{Q}{\{V_{2/0}\}} \quad \forall Q$

prenons Q en A par exemple :

$$\vec{V}_{2A \in 1/0} = \vec{V}_{2B \in 1/0} + \vec{\Omega}_{21/0} \wedge \vec{BA} = \vec{0} + (p_B \cdot \vec{x} + q_B \cdot \vec{y} + r_B \cdot \vec{z}) \wedge -\ell \cdot \vec{x} = \ell \cdot q_B \cdot \vec{z} - \ell \cdot r_B \cdot \vec{y}$$

d'où le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_A = p_B \\ q_A = q_B \\ r_A = r_B \\ 0 = 0 \\ 0 = -\ell \cdot r_B \\ 0 = \ell \cdot q_B \end{array} \right. \begin{array}{l} \rightarrow \text{ne peut être résolu : mobilité} \\ \rightarrow \text{équation trivialement vérifiée : hyperstatisme} \end{array}$$

- $I_c = 6$ inconnues dont $m = 1$ doit être imposée pour résoudre
- 6 équations dont $h = 1$ trivialement vérifiée
- on vérifie donc : $m - h = I_c - 6$

Etude statique :

La liaison L_{ij} est la liaison équivalente aux deux liaisons $L1ij$ et $L2ij$. Le torseur $\{T(S_i \rightarrow S_j)\}$ modélisant les actions mécaniques du solide S_i sur le solide S_j conduit à écrire :

$$\boxed{\underset{P}{\{T(S_i \rightarrow S_j)\}} = \underset{P}{\{T_1(S_i \rightarrow S_j)\}} + \underset{P}{\{T_2(S_i \rightarrow S_j)\}}}$$

On en déduit $T_{ij} = T1ij + T2ij$. La dimension de l'espace vectoriel T_{ij} est donnée par :

$$\dim(T_{ij}) = \dim(T1ij) + \dim(T2ij) - \dim(T1ij \cap T2ij)$$

Définition 5. Lorsque $T_{1ij} \cap T_{2ij} \neq \emptyset$, la liaison équivalente est dite hyperstatique de degré $h = \dim(T_{1ij} \cap T_{2ij})$.

Si l'on note I_s le nombre d'inconnues des torseurs des actions transmissibles des liaisons L_{1ij} et L_{2ij} , on obtient la relation ($\dim(T_{1ij}) + \dim(T_{2ij}) = I_s$), on obtient alors la relation :

$$m - h = 6 - I_s$$

Si l'on note I_c le nombre d'inconnues cinématiques introduites par les deux liaisons L_{1ij} et L_{2ij} , il vient :

$$m - h = I_c - 6$$

Nota: on définit parfois l'indice de mobilité selon les expressions suivantes :

- $m-h$
- $I_c - E_c$ ou $E_s - r_s$

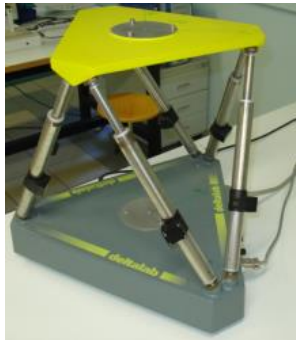
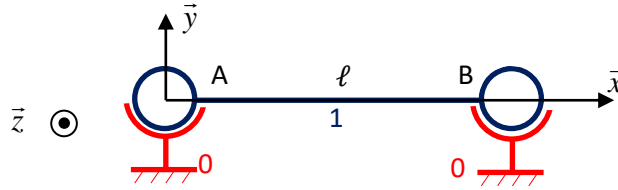


Figure 1.6 – Liaisons en parallèle : plate-forme de Stewart

Exemple : Liaison pivot réalisée à l'aide de deux liaisons rotules



$$\{T_{1\ 0\rightarrow 1}\} = A \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{1\ 0\rightarrow 1} = X_A \cdot \vec{x} + Y_A \cdot \vec{y} + Z_A \cdot \vec{z} \\ \vec{M}_{1\ A\ 0\rightarrow 1} = \vec{0} \end{array} \right\} \text{et}$$

$$\{T_{2\ 0\rightarrow 1}\} = B \left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_{2\ 0\rightarrow 1} = X_B \cdot \vec{x} + Y_B \cdot \vec{y} + Z_B \cdot \vec{z} \\ \vec{M}_{2\ B\ 0\rightarrow 1} = \vec{0} \end{array} \right\}$$

les liaisons sont en parallèle donc :

$$Q \{T_{0\rightarrow 1}\} = Q \{T_{1\ 0\rightarrow 1}\} + Q \{T_{2\ 0\rightarrow 1}\} \quad \forall Q$$

ici on prendra Q en A donc :

$$A \{T_{2\ 0\rightarrow 1}\} = A \left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_{2\ 0\rightarrow 1} = X_B \cdot \vec{x} + Y_B \cdot \vec{y} + Z_B \cdot \vec{z} \\ \vec{M}_{2\ A\ 0\rightarrow 1} = -\ell \cdot Z_B \cdot \vec{y} + \ell \cdot Y_B \cdot \vec{z} \end{array} \right\}$$

finalement nous obtenons le système suivant :

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} X = X_A + X_B \\ Y = Y_A + Y_B \\ Z = Z_A + Z_B \end{array} \right. \rightarrow \text{ne peut être résolu hyperstatisme (h=1)}$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} L = 0 \\ M = -\ell \cdot Z_B \\ N = \ell \cdot Y_B \end{array} \right. \rightarrow \text{mobilité (m=1)}$$

$$A \{T_{0\rightarrow 1}\} = A \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{0\rightarrow 1} = X \cdot \vec{x} + Y \cdot \vec{y} + Z \cdot \vec{z} \\ \vec{M}_{A\ 0\rightarrow 1} = M \cdot \vec{y} + N \cdot \vec{z} \end{array} \right\} \quad \text{La liaison équivalente est une liaison pivot d'axe (A; } \vec{x} \text{)} .$$

- Il y a 5 paramètres non nuls indépendants (3 composantes de la résultante, 2 composantes du moment).
- $I_s = 6$ inconnues dont une doit être imposée pour résoudre ($\Rightarrow h = 1$) (équation (a))

Remarque : l'inconnue hyperstatique X_A ou X_B est une inconnue d'effort selon la direction \vec{x} à laquelle correspond une condition géométrique de distance à respecter selon cette direction .

- 6 équations dont une trivialement vérifiée ($\Rightarrow m = 1$) (équation (b))
- on vérifie donc : $m - h = 6 - 1$

1.3 Graphe des liaisons

Dans l'étude des chaînes de solides, il est habituel de regrouper dans un mécanisme les solides sans mouvement relatif entre eux (liaison complète). Ce sous-ensemble est

caractérisé par un solide unique. Par la suite, nous nommerons solide une classe d'équivalence de solides en liaison complète. L'étude des chaînes de solides revient à caractériser la structure du mécanisme, à le paramétrer, à étudier ses lois entrées/sorties et à déterminer son hyperstatisme. Dans l'analyse d'un mécanisme, on fait apparaître son graphe des liaisons (ou son graphe de structure). Son étude se fait à l'aide de la théorie des graphes. Soit un mécanisme comportant S solides (nœuds du graphe) et L liaisons (arêtes du graphe).

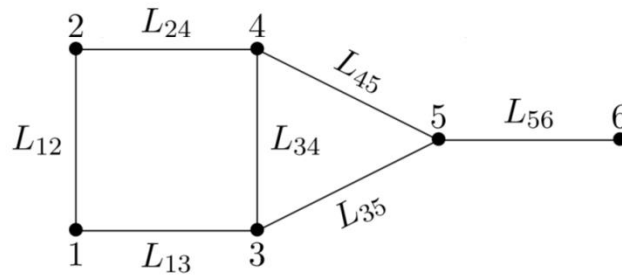


Figure 1.7 – Graphe des liaisons

Le mécanisme ci-dessus contient 6 solides et 7 liaisons.

Définition 6. Un graphe des liaisons est un couple formé de deux ensembles : $S = \{S1, S2, S3, \dots, Sk\}$ dont les éléments sont appelés sommets qui représentent les solides du mécanisme et $L = \{L1, L2, L3, \dots, Lp\}$ dont les éléments sont appelés arêtes qui représentent les liaisons entre les solides.

Définition 7. On appelle cycle un chemin fermé ne passant pas deux fois par le même sommet.

Définition 8. On appelle graphe ouvert un graphe dont au moins un des sommets n'est relié qu'à une seule arête.

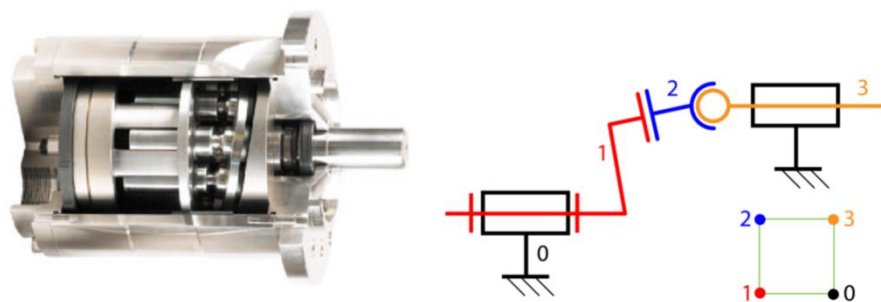


Figure 1.8 – Cycle : pompe à pistons axiaux



Figure 1.9 – Graphe ouvert : robot Ericc 3

A partir d'un graphe de liaisons donné, il est possible de vérifier qu'il existe un nombre maximal de cycles indépendants les uns des autres constituant une base de cycles. Le nombre de tels cycles est défini simplement à partir du nombre de sommets et du nombre d'arêtes du graphe des liaisons et s'appelle nombre cyclomatique.

Définition 9. Nombre cyclomatique – Le nombre cyclomatique μ d'un graphe de liaisons composé de S sommets et L liaisons est tel que :

$$\mu = L - S + 1$$

Remarque : Une chaîne ouverte est un graphe des liaisons ne comportant aucun cycle. Son nombre cyclomatique est $\mu = 0$ puisque, dans ce cas, $L - S = -1$.

1.4 Etude des chaînes de solides

1.4.1 Cas particulier d'un cycle

Considérons un graphe de liaisons constitué d'un seul cycle de S sommets et donc de $L = S$ liaisons.

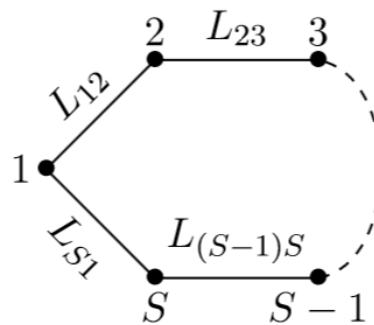


Figure 1.10 – Cycle

On peut, d'une part, considérer le cycle comme une association de L liaisons en série.
Pour chacune d'elles on peut écrire:

$$\dim(L_{ij}) + \dim(T_{ij}) = 6$$

Au total, on en déduit en utilisant les notations précédentes :

$$I_c + I_s = 6.L = 6.S$$

On peut, d'autre part, considérer le cycle comme **une association en parallèle** de la liaison L_{S1} avec la liaison équivalente des $L - 1$ liaisons $L_{12}, L_{23}, \dots, L_{(S-1)S}$. Avec ce qui a été vu précédemment (1.2.2), on peut écrire :

$$m - h = I_c - 6$$

ou encore en utilisant la relation obtenue avec l'association précédente en série

$$m - h = 6(S - 1) - I_s = E_s - I_s$$

puisque, si l'on note E_s le nombre d'équations issues de l'application du principe fondamental de la statique (ou de la dynamique), on a bien $E_s = 6(S - 1)$.

1.4.2 Etude des chaînes de solides

Application des résultats précédents

On considère un mécanisme décrit par son graphe des liaisons. On suppose que ce dernier possède S solides et L liaisons. Ce graphe possède $\mu = L - S + 1$ cycles indépendants. On peut ainsi appliquer les relations vues précédemment à chacun de ces μ cycles et l'on obtient finalement d'une part :

$$m - h = I_c - 6.\mu$$

et d'autre part avec :

$$I_s + I_c = 6.L \text{ et } \mu = L - S + 1$$

$$m - h = 6.(\mu + S - 1) - 6.\mu - I_s$$

$$m - h = 6.(S - 1) - I_s = E_s - I_s$$

Afin d'étudier de manière plus détaillée les chaînes de solides, il peut être utile d'écrire les équations entre les paramètres caractéristiques de ces chaînes.

Approche cinématique

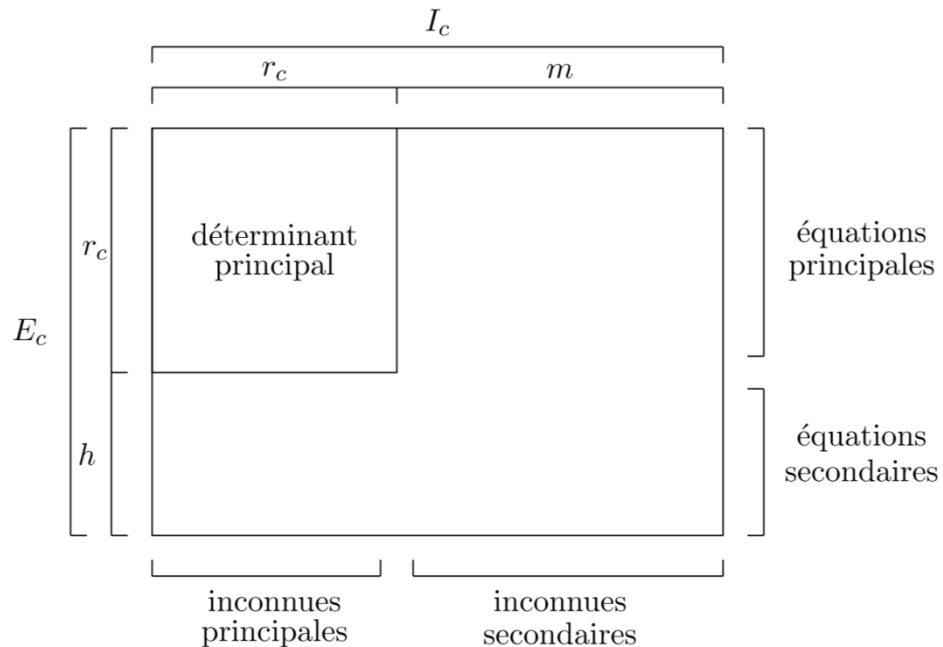
Pour chacun des cycles de la chaîne, il est possible d'écrire une relation de fermeture cinématique caractérisée par la relation (on notera k le solide Sk dans l'écriture des torseurs cinématiques)

$$Q \{V_{p/(p-1)}\} + Q \{V_{(p-1)/(p-2)}\} + \dots + Q \{V_{(p-q)/p}\} = \{\vec{0}\}$$

Il existe ainsi μ équations de ce type, soit au total $E_c = 6.\mu$ équations ($3.\mu$ dans le cas d'un système plan). Chaque liaison comporte n_c inconnues cinématiques (degrés de liberté). Le nombre total d'inconnues cinématiques est donc :

$$I_c = \sum_{i=1}^L n_c i$$

si L est le nombre de liaisons du mécanisme. L'étude cinématique du mécanisme conduit à l'obtention d'un système homogène de E_c équations linéaires comportant I_c inconnues cinématiques. D'après la théorie des systèmes linéaires, on sait qu'il existe un nombre r_c appelé rang du système correspondant au plus grand entier tel qu'il existe une matrice carrée inversible d'ordre r_c extraite de la matrice des coefficients du système linéaire. Le rang correspond au nombre d'équations indépendantes du système. On convient de mettre le système d'équations sous la forme :



Définition 10. Le degré de mobilité d'un mécanisme est le nombre entier $m = I_c - r_c$.

La mobilité correspond au nombre de paramètres cinématiques à imposer afin d'obtenir une solution unique. Nécessairement $m \geq 0$.

- Si $m = 0$ alors le rang r_c du système d'équations est égal au nombre d'inconnues cinématiques I_c . La seule solution du système d'équations est la solution triviale (toutes les inconnues cinématiques sont toutes nulles) donc aucun mouvement n'est possible.
- Si $m > 0$ alors Le rang r_c du système d'équations est inférieur au nombre d'inconnues I_c . Le système possède une infinité de solutions. On peut exprimer r_c inconnues en fonction de m paramètres. Le système est alors mobile.

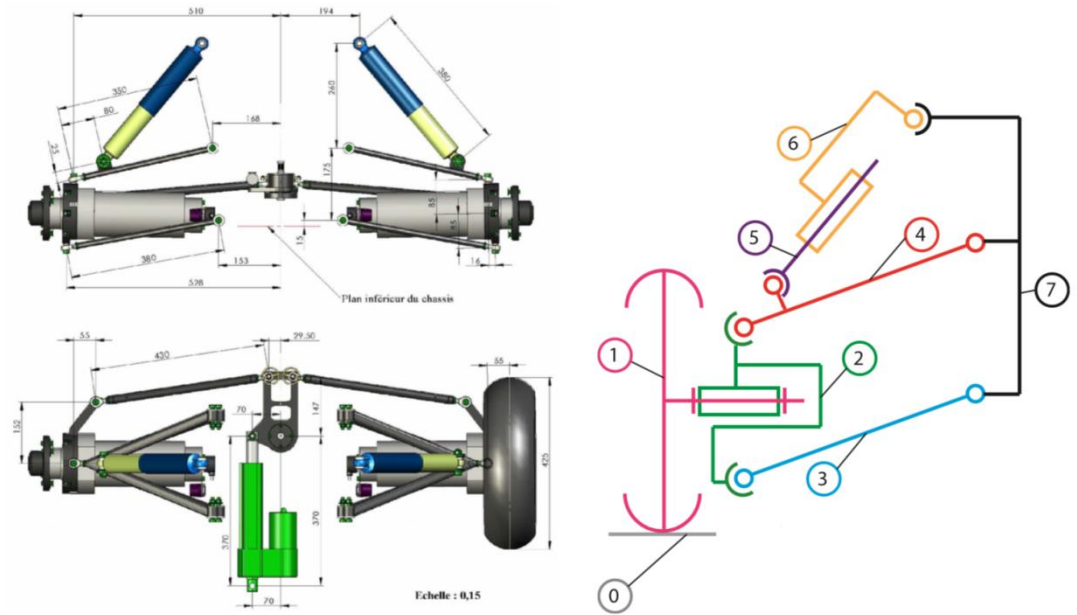
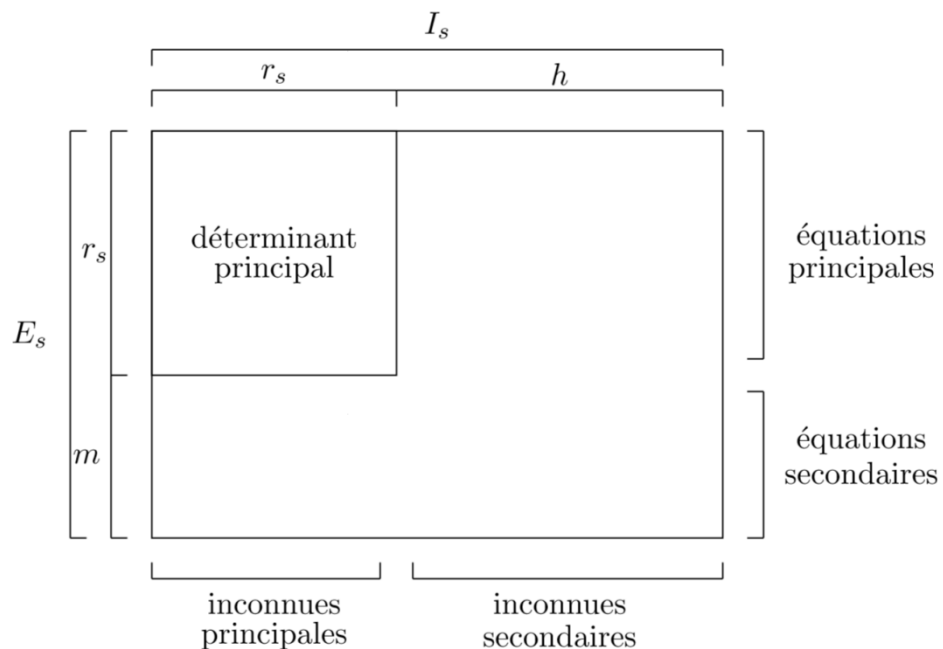


Figure 1.11 – Pont arrière du Robucar et schéma cinématique

Approche dynamique (ou statique)

L'étude dynamique (ou statique) se mène en écrivant le principe fondamental de la dynamique (ou de la statique) à $S - 1$ solides. On obtient ainsi un système linéaire de $6.(S - 1)$ équations ($3.(S - 1)$ dans le plan) comportant I_s inconnues (composantes des torseurs des actions mécaniques inconnues). On notera r_s le rang du système obtenu qui a la forme ci-après :



Définition 11. Le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme est le nombre entier :

$$h = I_s - r_s.$$

Le degré d'hyperstatisme caractérise le nombre d'inconnues d'actions mécaniques à imposer afin de résoudre le système linéaire. Nécessairement $h \geq 0$.

- Si $h = 0$ alors le rang r_s du système d'équations est égal au nombre d'inconnues I_s , on parle alors de mécanisme isostatique. La connaissance des actions mécaniques extérieures appliquées au mécanisme permet de déterminer toutes les actions de liaison.
- Si $h > 0$ alors le mécanisme est dit hyperstatique, en l'absence de sollicitations extérieures il existe des inconnues d'action de liaison complètement indéterminées.

Approche globale

Les deux sections précédentes ont permis de définir et de caractériser les degrés de mobilité et d'hyperstatisme d'un mécanisme :

- lors d'une approche cinématique ;

$$\begin{cases} m = I_c - r_c \\ h = E_c - r_c \end{cases}$$

- lors d'une approche dynamique ;

$$\begin{cases} m = E_s - r_s \\ h = I_s - r_s \end{cases}$$

Quelle que soit l'approche, on soustrait les deux équations membre à membre et on trouve :

$$m - h = I_c - E_c = E_s - I_s \quad (\text{Indice de mobilité})$$

La différence entre les degrés de mobilité et d'hyperstatisme est égal à l'indice de mobilité d'un mécanisme.

Définition 12. On appelle approche globale le raisonnement que l'on peut mener à partir de l'indice de mobilité.

L'indice de mobilité se calcule à partir des nombres d'inconnues et d'équations, et s'interprète avec les degrés de mobilité et d'hyperstatisme. Le raisonnement à mener débute à l'aide de l'équation et des deux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} m - h = I_c - E_c \\ m \geq 0 \\ h \geq 0 \end{cases}$$

Les deux situations les plus parlantes sont celles pour lesquelles l'indice de mobilité n'est pas nul :

- un indice de mobilité positif incite à imaginer des mouvements ;
- un indice de mobilité négatif incite à chercher des contraintes de montage ;
- un indice de mobilité nul ne donne aucune indication immédiate.

1.5 Formulaire

	Approche cinématique	Approche Statique
Nbre de pièces	S	
Nbre de liaisons	L	
Nbre cyclomatique	$\mu = L - S + 1$	
Nbre équations scalaires	$E_c = 6 \cdot \mu$	$E_s = 6 \cdot (S - 1)$
Nbre d'inconnues scalaires	I_c	I_s
Rang	r_c	r_s
Degré de mobilité	$m = I_c - r_c$	$m = E_s - r_s$
Degré d'hyperstatisme	$h = E_c - r_c$	$h = I_s - r_s$
Approche globale, Indice de mobilité	$m-h = I_c - E_c$	$m-h = E_s - I_s$

1.6 Méthodologie : Quelle démarche choisir?

Il y a deux possibilités :

– Approche globale : utiliser les équations reliant mobilité, hyperstatisme et nombres d'inconnues. La difficulté consiste à déterminer la mobilité du mécanisme :

- les mobilités utiles m_u sont généralement clairement identifiées dans le sujet (paramètres de mouvements que l'on retrouve dans les relations E/S, et qui sont directement liés à la fonction principale du système),
- les mobilités internes m_i (mouvements possibles de pièces à l'intérieur du mécanisme même lorsque les mobilités utiles sont bloquées) : si elles sont souvent faciles à identifier, il existe de nombreux cas où il est nécessaire d'avoir une certaine expérience pour les détecter à partir du schéma cinématique; Par cette méthode, vous risquez généralement de sous évaluer les mobilités internes, ce qui revient à sous évaluer le degré d'hyperstaticité. Par contre elle est extrêmement rapide, mais elle ne permet pas de déterminer quels efforts sont impossible à déterminer.

– Approche analytique : écrire le système d'équations cinématiques ou statiques. L'écriture des équations de cinématique se fait bien plus rapidement que l'écriture des équations de statique (généralement $\mu < S - 1$). A partir de l'analyse cinématique, on identifie clairement les mobilités (internes et utiles) du modèle, mais on ne fait que déterminer le degré d'hyperstaticité (la modification du modèle afin de baisser le degré d'hyperstaticité n'est pas réellement possible). Par contre, l'approche statique permet d'identifier clairement les inconnues des torseurs statiques en relation avec l'hyperstatisme, ce qui donne la possibilité de modifier le modèle pour abaisser h , mais les mobilités ne sont pas clairement identifiées.

1.7 Bilan

1.7.1 Interprétation de la mobilité:

À une mobilité utile correspond toujours, sur un système réel, un actionneur. Une mobilité interne conduit à une équation du type $0 = 0$ lors de l'application du PFS en projection suivant la direction correspondante. Elle n'est donc pas pilotée (imposée) par un actionneur. Il n'y a donc pas d'efforts transmis.

1.7.2 Interprétation de l'hyperstatisme:

Un hyperstatisme correspond à des actions mécaniques de liaisons indéterminables par le PFS, et non nuls. Donc les paramètres cinématiques correspondants sont imposés à zéro (sous l'hypothèse de liaisons parfaites). Or, les équations issues de l'écriture des fermetures cinématiques auraient permis de déterminer ces paramètres cinématiques. Dans la mesure où ils ont été imposés à zéro, il y a redondance dans le positionnement des pièces. On parle alors de liaisons surabondantes.

Influence de l'hyperstatisme au montage :

Un hyperstatisme induit des contraintes géométriques lors du montage des différentes pièces : il s'agit d'être capable de fermer la (ou les) boucle(s). En effet, sur une chaîne fermée simple, en brisant artificiellement un solide, puis en essayant de repositionner les 2 parties en face l'une de l'autre afin de réaliser la liaison encastrement, deux cas peuvent alors se produire :

- soit la mobilité des liaisons en série vaut 6, et alors il est possible de bouger comme on le souhaite les deux parties dans l'espace, et donc de le positionner parfaitement l'une par rapport à l'autre (on peut recoller sans problème les deux morceaux même si les pièces intermédiaires ont des défauts ce qui est le cas après fabrication),
- soit la mobilité de la liaison en série est inférieure strictement à 6. Dans ce cas, à cause des défauts de fabrication des pièces intermédiaires, les deux parties du solide brisé ne peuvent pas se retrouver en bonne position. Technologiquement :
 - soit on réalise des liaisons avec jeu, ce qui permet de retrouver un peu de mobilité et donc de compenser les défauts de fabrication afin de monter l'ensemble des pièces (attention, les jeux ne sont pas mis au hasard, ils sont déterminés analytiquement en fonction des défauts de fabrication et réduit le plus possible afin de conserver une « qualité acceptable » du produit),
 - soit on déforme les pièces lors du montage, ce qui a pour effet de rigidifier le mécanisme (il se déformera moins en utilisation) et d'augmenter les efforts de contact dans les liaisons (les calculs sont faits en modélisant les pièces par des solides déformables et nécessitent la connaissance des défauts de fabrication).