1 Exercices Chaines de solides

Connaissances	Savoir-faire
Chaines de solides : • Degré de mobilité du modèle • Degré d'hyperstatisme du modèle	Déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme.
Associations de liaisons en série et en parallèle. Liaisons cinématiquement équivalentes.	Associer le paramétrage au modèle retenu Associer à chaque liaison son torseur. cinématique. Associer à chaque liaison son torseur d'actions mécaniques transmissibles.

Sommaire

1.1 Liaisons équivalentes : 2

1.1.1 Association de deux liaisons pivots glissants : 2

1.1.2 Association de deux liaisons sphériques(rotules) : 2

1.2 Mécanismes : 3

1.2.1 Association de trois liaisons : 3

1.2.2 Autofocus d'appareil photo : 4

1.2.3 Compresseur de pompe à chaleur : 5

1.2.4 Table basculante : 7

1.2.5 Moteur-frein : 8

1.2.6 Planeur sous-marin : 9

1.2.7 Robot Stewart : 12

1.2.8 Bogie de TGV – liaison avec la voiture : 13

1.2.9 Miroir de tilt du Very Large Télescope : 15

1.1 Liaisons équivalentes :

1.1.1 Association de deux liaisons pivots glissants :

Considérons l'association de deux liaisons de la figure 1.1.1 ci-dessous

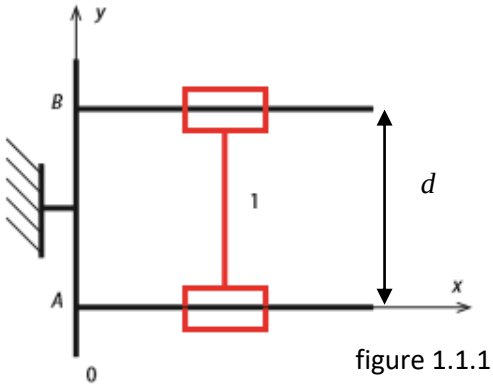


figure 1.1.1

Q1. En écrivant une fermeture de chaîne cinématique, déterminer la liaison équivalente aux deux liaisons pivots glissants reliant le solide 0 et le solide 1 du schéma cinématique figure 1.1.1

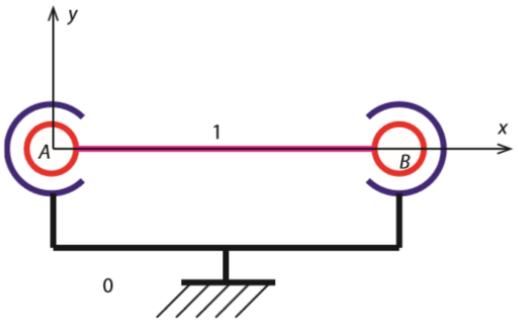
Q2. Quel est le degré d'hyperstatisme de cette liaison ?

Q3. Quelle(s) condition(s) géométrique(s) précise(s) doit(doivent) être assurée(s) pour que cet hyperstatisme ne pose pas de problème ?

Q4. Quelle modification doit-on apporter pour rendre la liaison isostatique ?

1.1.2 Association de deux liaisons sphériques(rotules) :

Considérons l'association de deux liaisons de la figure 1.1.2 ci-dessous



Q1. En écrivant une fermeture de chaîne cinématique, déterminer la liaison équivalente aux deux liaisons rotules reliant le solide 0 et le solide 1 du schéma cinématique figure 1.1.2

Q2. Quel est le degré d'hyperstatisme de cette liaison ?

Q3. Quelle(s) condition(s) géométrique(s) précise(s) doit(doivent) être assurée(s) pour que cet hyperstatisme ne pose pas de problème ?

Q4. Quelle modification doit-on apporter pour rendre la liaison isostatique ?

1.2 Mécanismes :

1.2.1 Association de trois liaisons :

Considérons l'association de trois liaisons de la figure 1.2.1

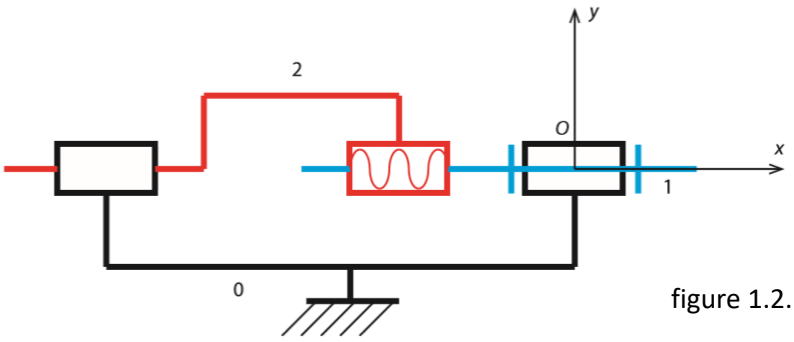


figure 1.2.1

Q1. Ecrire la fermeture cinématique de chaîne relative à ce mécanisme.

Q2. En déduire le rang r_c du système d'équations cinématique, le degré de mobilité cinématique m et le degré d'hyperstatisme h.

Q3. Combien de degrés de liberté faut-il ajouter à ce modèle pour rendre le mécanisme isostatique ?

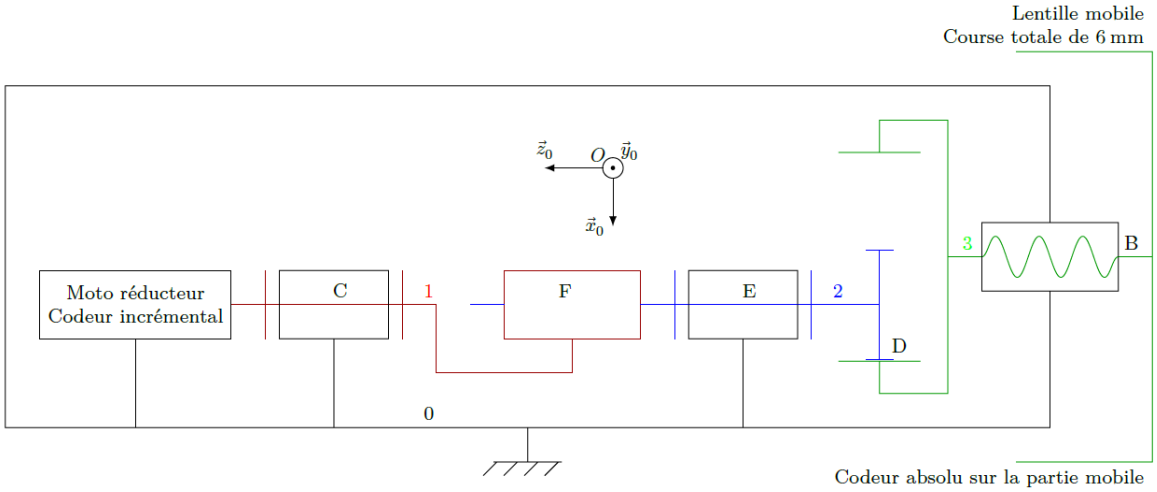
Q4. Refaire les calculs des questions Q1 et Q2 en remplaçant la liaison pivot par une liaison sphérique.

Q5. L'hyperstatisme est-il levé ? Etait-ce prévisible ?

1.2.2 Autofocus d'appareil photo :

I Présentation :

Le modèle du mécanisme de déplacement de la lentille mobile est donné sur la figure ci-dessous.



Architecture du dispositif de déplacement de la lentille

On notera les distances : $\overrightarrow{BD} = a \cdot \overrightarrow{x_0} + b \cdot \overrightarrow{z_0}$ et $\overrightarrow{ED} = c \cdot \overrightarrow{x_0} - d \cdot \overrightarrow{z_0}$.les points C, F et E sont alignés.
Les torseurs cinématiques des différentes liaisons sont :

$${}_C\{V_{1/0}\} = {}_C\begin{Bmatrix}\omega_{10} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ \vec{0}\end{Bmatrix}, \quad {}_B\{V_{3/0}\} = {}_B\begin{Bmatrix}\omega_{30} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ p \cdot \omega_{30} \cdot \overrightarrow{z_0}\end{Bmatrix}, \quad {}_E\{V_{2/0}\} = {}_E\begin{Bmatrix}\omega_{20} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ \vec{0}\end{Bmatrix}, \quad {}_F\{V_{2/1}\} = {}_F\begin{Bmatrix}\vec{0} \\ V_1 \cdot \overrightarrow{z_0}\end{Bmatrix}, \quad {}_D\{V_{3/2}\} = {}_D\begin{Bmatrix}\omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & V_z\end{Bmatrix}_{(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})}$$

II Travail demandé :

Q0. Tracer le graphe des liaisons, déterminer μ le nombre de cycles indépendants.
Q1. Écrire les fermetures cinématiques des chaines 0-1-2-0 au point C et 0-2-3-0 au point D. Écrire les douze équations associées à ces fermetures.
Q2. Mettre ces équations sous la forme de matrices données ci-dessous en veillant à remplacer les points d'interrogation.

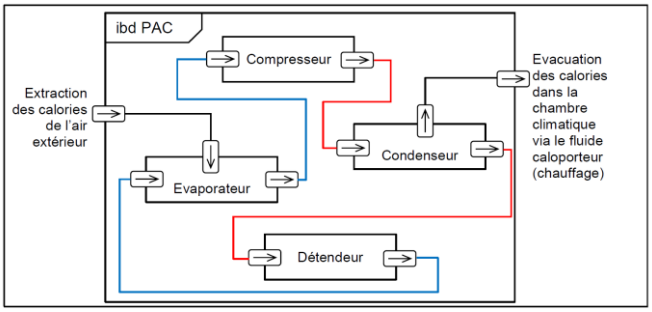
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 0 & ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ? & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ? & ? & 0 & 0 & ? & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & 0 \\ 0 & 0 & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ? & 0 & 0 & 0 & 0 & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{1/0} \\ V_1 \\ \omega_{2/0} \\ \omega_{3/0} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ V_x \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Q3. Sans calculs, mais avec justification, donner le rang de la matrice. En déduire, la mobilité m du modèle du mécanisme.

Q4. Calculer le degré d'hyperstatisme du modèle du mécanisme.
L'analyse des lignes de zéros de la matrice permet de déterminer les contraintes géométriques du mécanisme liées à l'hyperstatisme.
Q5. Proposer un nouveau modèle pour les deux liaisons pivots afin de rendre le modèle du mécanisme isostatique.

1.2.3 Compresseur de pompe à chaleur :

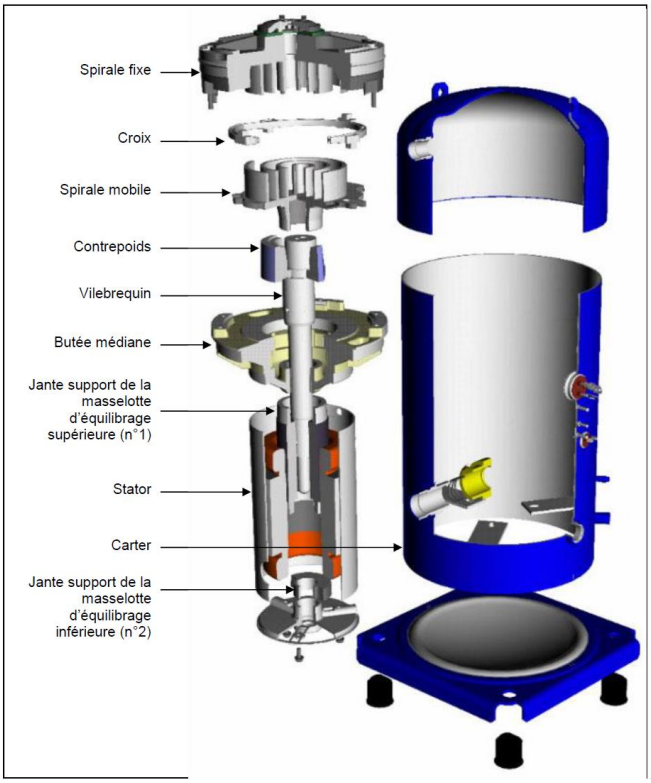
I présentation :



Le cycle de fonctionnement de la PAC se compose de quatre étapes, réalisées par quatre organes principaux :

- la circulation du fluide est assurée grâce au compresseur, qui élève la pression et la température du fluide frigorigène gazeux en le comprimant ;
- dans le condenseur (source chaude), le fluide frigorigène cède sa chaleur au fluide du circuit de chauffage (eau, air, etc.) en passant de l'état gazeux à l'état liquide ;
- la pression du fluide frigorigène en phase liquide est ensuite réduite dans le détendeur;
- dans l'évaporateur (source froide), la chaleur est prélevée au niveau du circuit de captage pour vaporiser le fluide frigorigène.

Étude de la cinématique de compression

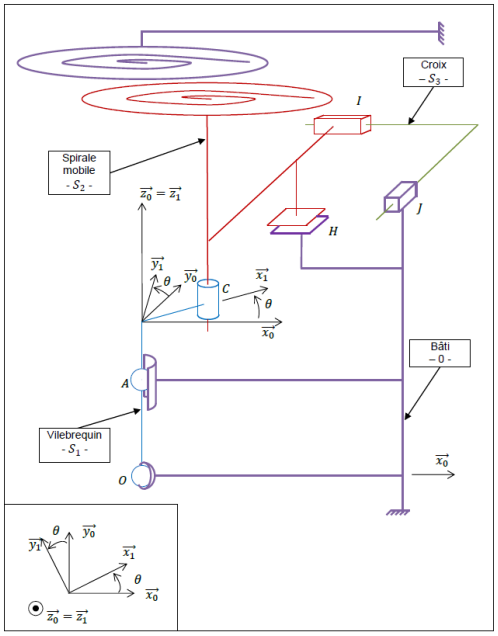


L'une des caractéristiques des compresseurs à spirales est un nombre de pièces mobiles réduit par rapport aux autres technologies. Il en résulte une robustesse plus grande et des risques de panne plus faibles.
La vue éclatée présentée sur la Figure 2 permet d'identifier les différents composants du compresseur :

- Le bâti fixe composé du carter extérieur, du stator du moteur électrique, de la butée médiane et de la spirale fixe placée en partie haute ;
- L'axe principal composé d'un vilebrequin, du rotor moteur, du contrepoids et de masselottes d'équilibrage ;
- La spirale mobile ;
- La croix.

Le schéma cinématique proposé sur la Figure ci-dessous reprend les éléments précédents en conservant les ensembles cinématiques.

Nota : les contacts entre les spirales fixe et mobile sont négligés dans cette modélisation.



Paramétrage :

- $R_0(O;\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$ est le repère associé au bâti 0 ;
- $R_1(O;\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ est le repère associé au vilebrequin S_1;

la rotation de S_1 par rapport à 0 est repérée par l'angle $\theta = (\vec{x_0},\vec{x_1}) = (\vec{y_0},\vec{y_1})$;

la vitesse de rotation est notée $\omega = \dot{\theta} = 3600\ tr/min$;

- $\overrightarrow{OA} = a \cdot \vec{z_1}$ avec $a = 340\ mm$
- $\overrightarrow{AC} = R \cdot \vec{x_1} + d \cdot \vec{z_1}$ avec $R_{orb} = 8\ mm$ et $d = 80\ mm$
- $\overrightarrow{HA} = b \cdot \vec{x_0} + c \cdot \vec{z_1}$
- Les liaisons sont supposées parfaites :

II Travail demandé :

Q0. A partir du schéma cinématique, tracer le graphe des liaisons du compresseur. Déterminer le nombre cyclomatique μ.

Q1. Ecrire la fermeture de la chaine de solides $0 - S_1 - 0$, en déduire les 6 équations scalaires. Calculer r_{C1}, m_1, h_1.

Q2. Ecrire la fermeture de la chaine de solides $0 - S_1 - S_2 - 0$, en déduire les 6 équations scalaires. Calculer r_{C2}, m_2, h_2.

Q3. Ecrire la fermeture de la chaine de solides $0 - S_2 - S_3 - 0$, en déduire les 6 équations scalaires. Calculer r_{C3}, m_3, h_3.

Q4. Il est possible de mettre les équations obtenues aux questions précédentes sous la forme :

$$(A) \cdot (X) = (0)$$

Ecrire la matrice (A).

On se propose d'utiliser python pour calculer le rang r_c de la matrice (A)

Info :

Dans python les matrices seront représentées par des listes de listes. Par exemple, la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est représentée par la liste de listes ; *[[1,2,3],[4,5,6]]*

Pour calculer le rang de cette matrice on utilise le script suivant :

- *import numpy as np*
- *A=np.array([[1,2,3],[4,5,6]])*
- *print(np.linalg.matrix_rank(A))*

Où $[X] = \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \\ p_2 \\ q_2 \\ r_2 \\ w_2 \\ r_{12} \\ w_{12} \\ r_{20} \\ u_{20} \\ v_{20} \\ u_{23} \\ v_{30} \end{pmatrix}$

Q5. A partir de vos résultats précédents déterminer la mobilité totale m, ainsi que le degré d'hyperstatisme total h.

1.2.4 Table basculante[1] :

Le schéma cinématique (figure 1.2.2) ci-après modélise une table basculante saisissant une plaque en position horizontale pour l'incliner de 110°. Le système de préhension de la plaque n'est pas étudié.

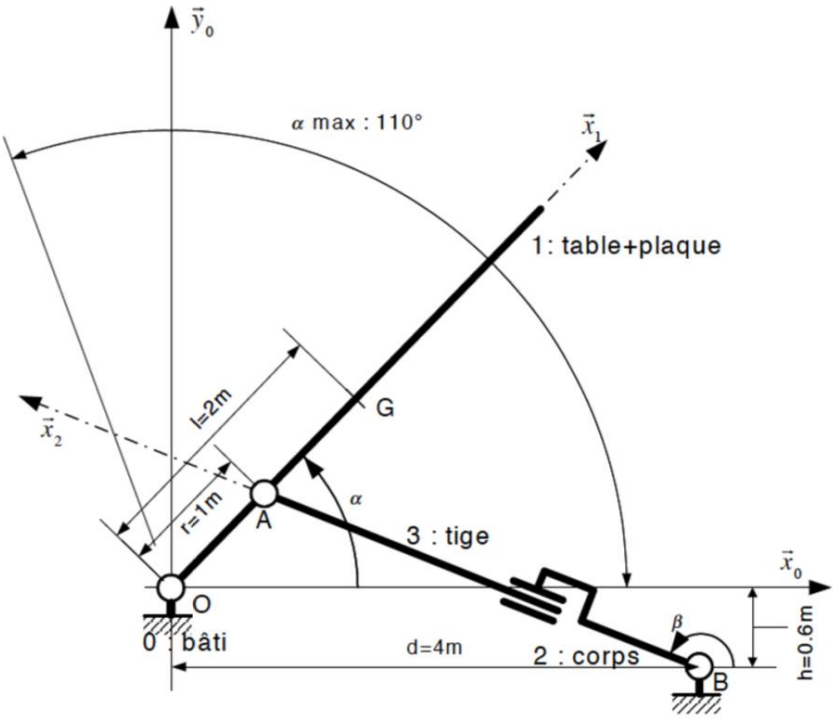


figure 1.2.2

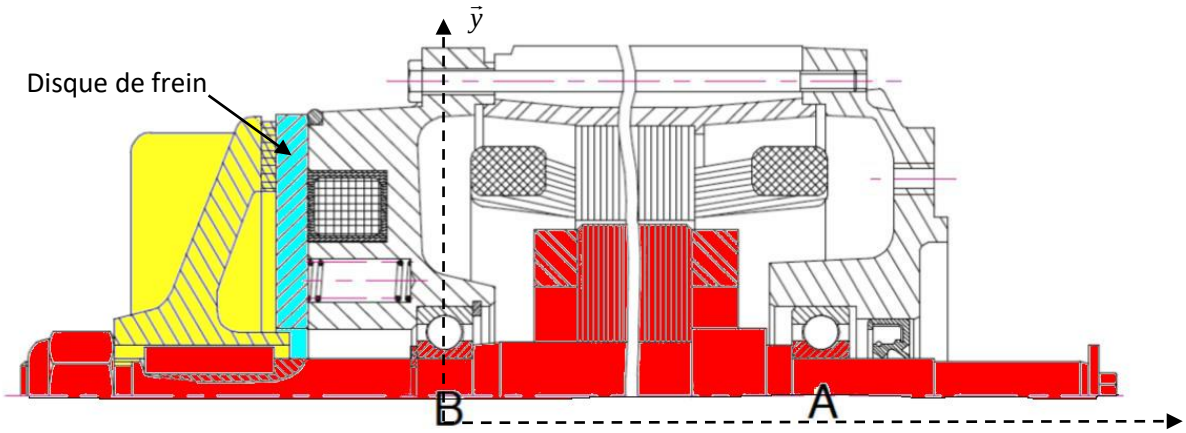
Q1. Par une analyse succincte, calculer le degré de mobilité et d'hyperstatisme du mécanisme dans l'espace.

Q2. Pourquoi le problème peut-il être considéré comme plan ?

Q3. Calculer son degré d'hyperstatisme dans le plan d'étude.

[1] D'après école de l'air MP 2003

1.2.5 Moteur-frein :



Q1. Sachant que le disque de frein possède deux liaisons pivots glissants de même direction que l'axe du moteur-frein par rapport au bâti (non visibles sur le plan), établir le schéma cinématique du mécanisme puis tracer son graphe de structure.

Q2. Calculer son degré d'hyperstatisme h.

Hypothèse géométrique 1

Dans l'hypothèse où les entraxes des cylindres ainsi que leur parallélisme sont compatibles avec les jeux radiaux, on en déduit la nullité des composantes hyperstatiques dans la liaison équivalente.

Q3. Calculer le nouveau degré d'hyperstatisme h_1 avec les hypothèses précédentes.

Hypothèse géométrique 2

Dans le cas d'un centrage court au niveau des cylindres de liaison entre le disque et le bâti, les liaisons peuvent être modélisées par des liaisons sphère-cylindre d'axes parallèles à celui du moteur-frein.

Q4. Donner la liaison équivalente de ces deux dernières liaisons.

Q5. Montrer que la liaison précédente est équivalente à une liaison glissière de même direction que l'axe du moteur-frein et une liaison sphérique à doigt en série.

Q6. Calculer le nouveau degré d'hyperstatisme h_2 si les deux hypothèses précédentes sont vérifiées. Conclure.

1.2.6 Planeur sous-marin :

L'environnement marin est un système complexe caractérisé par d'importantes interactions entre des processus physiques, chimiques et biologiques. La forte variabilité de ces processus et de leurs interactions rend difficile toute étude de l'écosystème marin, d'une part parce qu'il est nécessaire de mesurer les paramètres physiques, chimiques et biologiques simultanément, et d'autre part parce que ces mesures doivent être faites avec des résolutions spatiale et temporelle suffisantes.

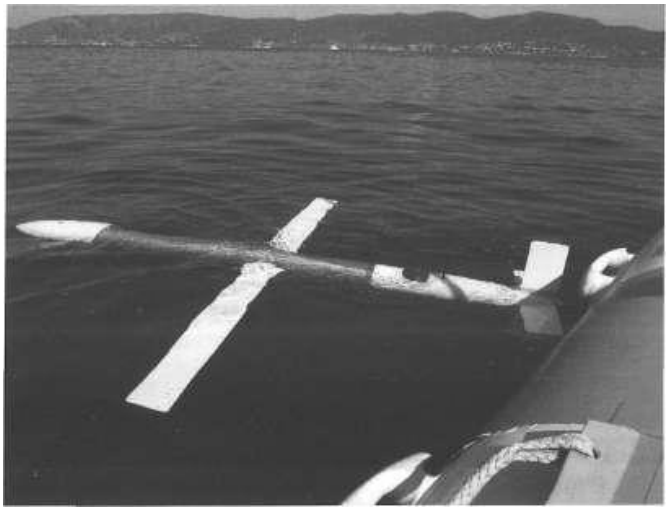


Figure 1 : Planeur IFREMER v

Traditionnellement, le milieu océanique est observé à l'aide d'instruments qui sont embarqués sur des navires océanographiques ou sur des flotteurs dérivant, ou bien fixés sur une ligne de mouillage. Bien que toutes ces plates-formes soient adaptées aux mesures océanographiques, elles le sont moins en ce qui concerne la résolution spatio-temporelle requise par certaines études, car le coût du dispositif serait alors prohibitif. Le "planeur sous-marin" est une plate-forme très complémentaire des systèmes d'observation existants, particulièrement pour la surveillance de certaines régions clefs de l'océan. Il ressemble à un mini sous-marin qui plane en dents de scie vers un point prédéfini. Régulièrement, il remonte à la surface et communique avec son opérateur par satellite, afin d'une part d'envoyer en temps réel les données acquises pendant sa plongée et d'autre part d'évaluer sa dérive due aux courants pour la corriger lors de la plongée suivante (voir figure ci-dessous :

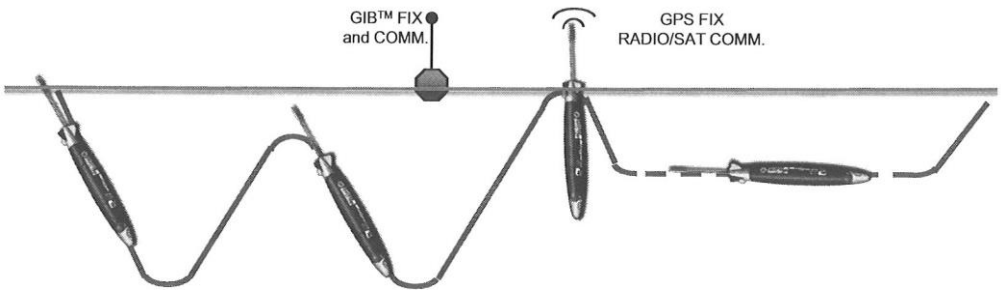


Figure 2 : Modes de déplacement du planeur sous-marin
(seaexplorer - groupe ALCEN)

La partie centrale du planeur comporte un dispositif qui permet le réglage fin de la position axiale du centre de gravité ainsi qu'un déplacement radial de ce centre afin d'assurer la rotation du planeur.

Ce mécanisme est positionné dans le corps du planeur et fixé par des tampons radiaux. Un plan d'ensemble est proposé en figure 4. Le schéma cinématique du système de transformation de mouvement est proposé figure 3.

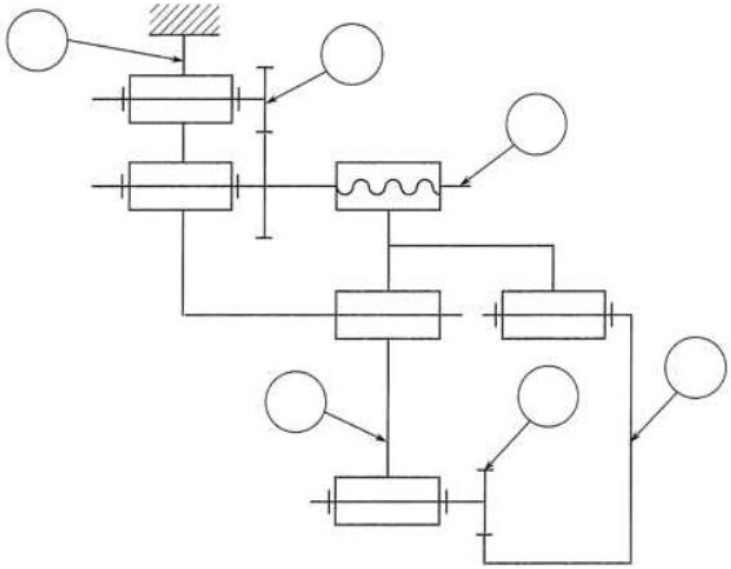


Figure 3 : Schéma cinématique du dispositif d'orientation et d'équilibrage

Q1. Identifier sur le schéma cinématique proposé une pièce principale de chaque classe d'équivalence.

Q2. Réaliser le graphe de liaison associé au schéma cinématique proposé et identifier dessus les mobilités contrôlées par un actionneur. On supposera que la liaison réalisée entre deux composants par un engrenage est une liaison ponctuelle.

Q3. Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce modèle et, si celui-ci est non nul, indiquer la ou les contraintes géométriques associées.

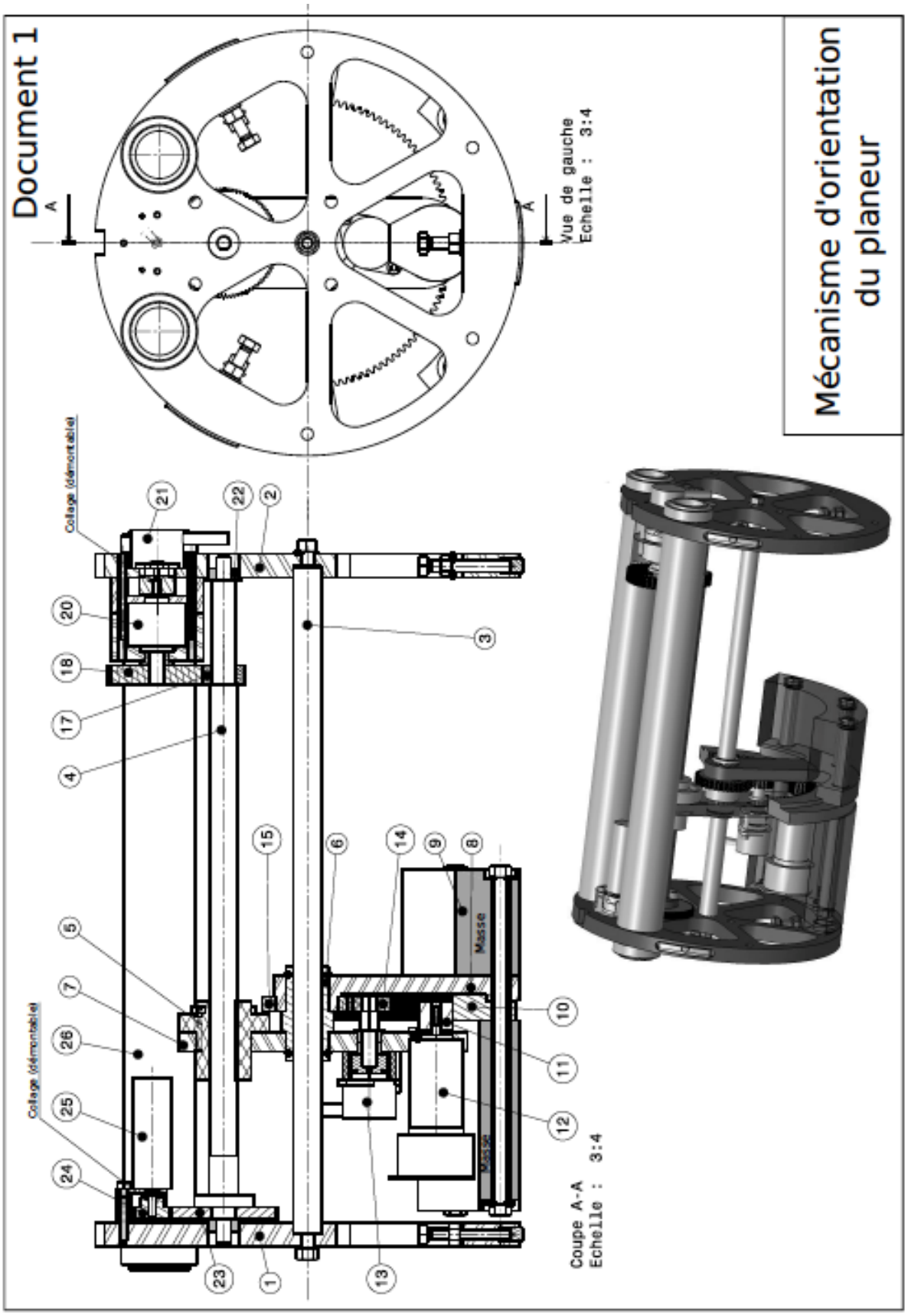


Figure 4 : dispositif d'équilibrage et d'orientation

1.2.7 Robot Stewart :

Nous vous proposons l'étude du système hexapode représenté en figure 1.2.5 composé d'une plateforme mobile (représentée par le solide M) reliée à une embase fixe (représentée par le solide F) par 6 vérins montés en "parallèle". Chaque vérin est relié à l'embase fixe par une liaison rotule de centre A_i et au plateau par une liaison rotule de centre B_i.

Chaque vérin peut être modélisé par deux solides (un corps de vérin et une tige de vérin) en liaison glissière d'axe $\overrightarrow{A_i B_i}$.

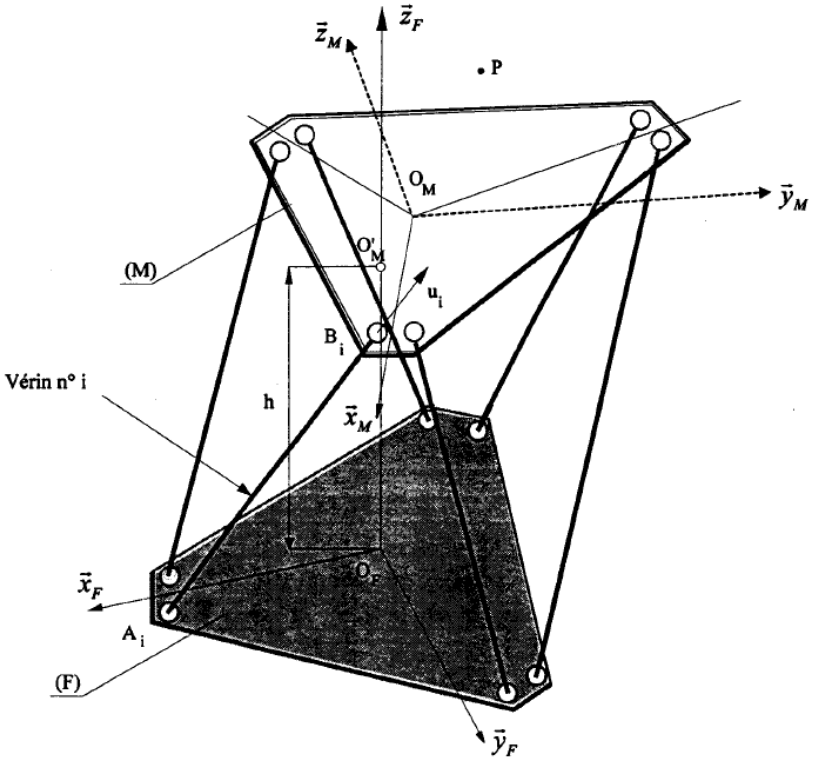


Figure 1.2.5 – Schéma d'architecture de la plateforme 6 axes.

Q1. Représenter le schéma cinématique minimal du mécanisme.

Q2. Lister les mobilités utiles du mécanisme. En déduire le nombre de mobilités utiles.

Q3. Lister les mobilités internes du mécanisme. En déduire le nombre de mobilités internes.

Q4. Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce mécanisme.

Q5. Proposer une solution pour éliminer les mobilités internes du mécanisme tout en conservant le même degré d'hyperstatisme.

1.2.8 Bogie de TGV – liaison avec la voiture :

FIGURE 1.29 – TGV Duplex

Les voitures d'un TGV sont reliées au rail par l'intermédiaire de bogies. Un bogie est matérialisé par un chariot supportant les deux essieux sur lequel pivote le châssis d'une voiture pour permettre à celui-ci de s'inscrire dans les courbes et d'éviter le déraillement. Il comporte en outre tous les éléments constituant la suspension de la voiture. La liaison entre la voiture V et le bogie B est réalisée par une ossature de biellettes articulées. Il est nécessaire, pour aborder le comportement dynamique du bogie, d'établir, en l'absence d'éléments déformables interposés entre la voiture et le bogie, le torseur cinématique $\{V_{V/B}\}$ et le torseur des efforts transmissibles $\{T_{B\to V}\}$.

L'objectif de cet exercice est de caractériser le degré d'hyperstatisme du modèle de liaison présenté figure 1.31.

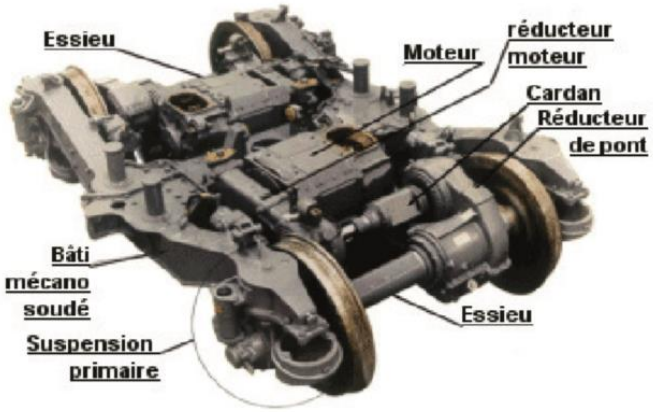


FIGURE 1.30 – Bogie de TGV

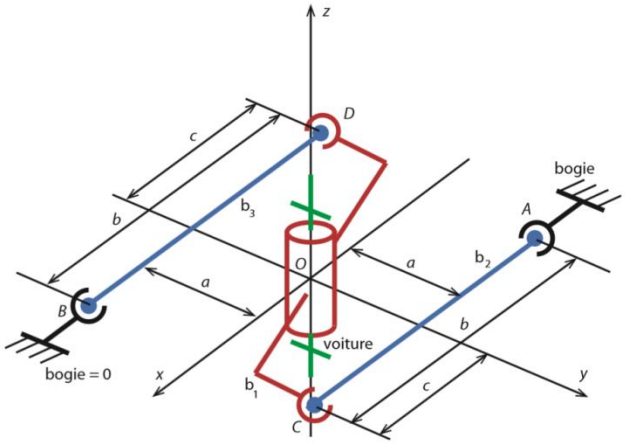


FIGURE 1.31 – Schéma cinématique de la liaison bogie/voiture

Q1. Toutes les liaisons sont supposées parfaites. Déterminer $\overrightarrow{V_{0,1/0}}$ en utilisant la chaîne *1–2–0*.

Q2. Déterminer $\overrightarrow{V_{0,1/0}}$ en utilisant la chaîne *1–3–0*.

Q3. En déduire la forme du torseur cinématique $\{V_{1/0}\}$. Donner la liaison équivalente entre la biellette *b1* et le bogie *0*.

Q4. En déduire la forme du torseur cinématique $\{V_{V/0}\}$. Donner la liaison équivalente entre la voiture *V* et le bogie *0*.

Q5. Tracer le graphe de structure de la liaison voiture/bogie.

Q6. En déduire le nombre cyclomatique μ.

Q7. A l'aide de loi globale cinématique et des mobilités mises en évidence dans le torseur cinématique de la question Q4, en déduire si la liaison est iso ou hyperstatique et préciser dans ce cas son degré.

Q8. Retrouver ce résultat en réalisant une étude globale statique de la chaîne.

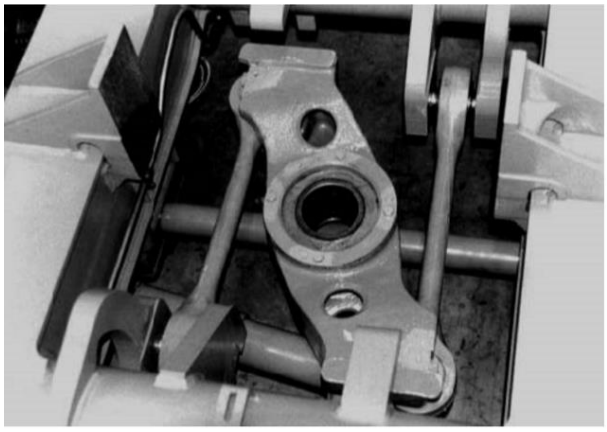


FIGURE 1.32 – Photo d'un bogie de TGV

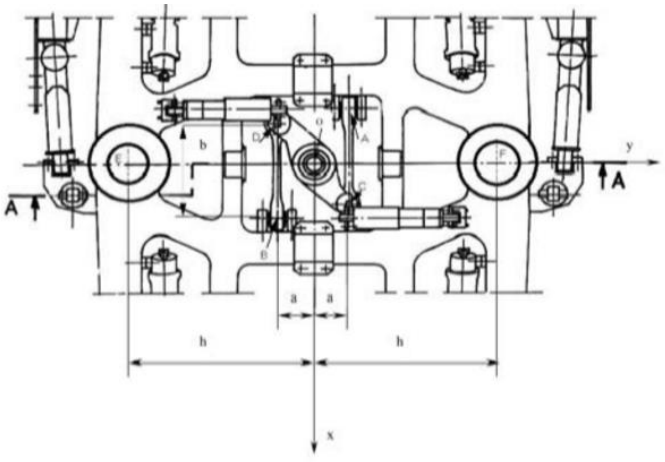


FIGURE 1.33 – Plan d'un bogie de TGV

1.2.9 Miroir de tilt du Very Large Télescope :

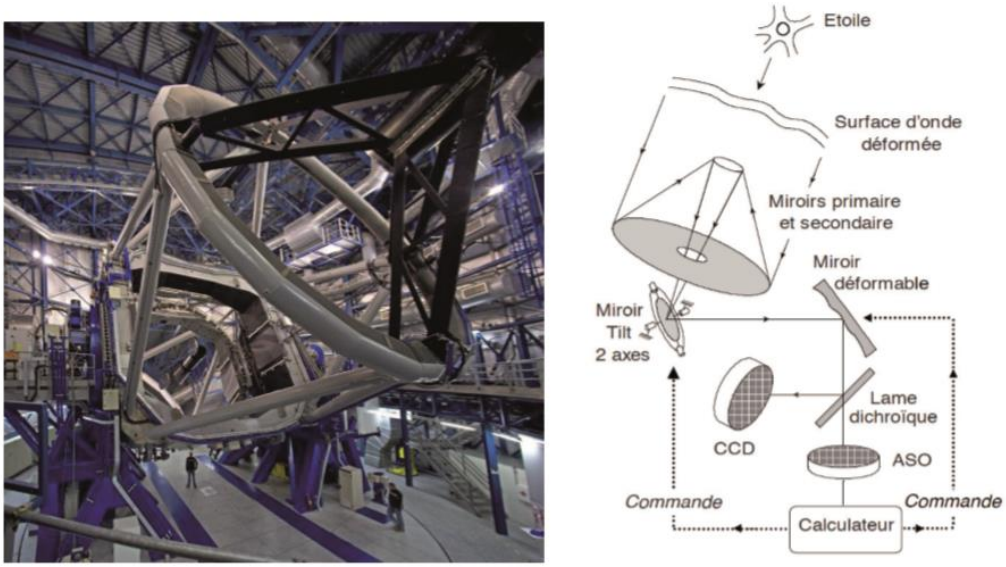


FIGURE 1.23 – Miroir de tilt du VLT

Le miroir de tilt est utilisé dans le Very Large Télescope dans le désert d'Atacama dans le nord du Chili pour diriger la lumière issue du miroir secondaire vers l'optique adaptative. Le miroir de tilt est installé sur une structure mécanique permettant d'orienter le faisceau. Il est solidaire du solide orientable 1 (voir figure 1.24).

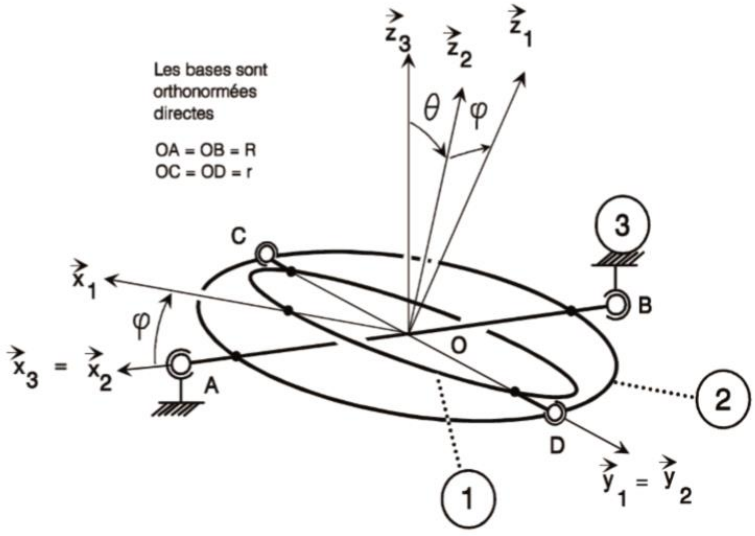


FIGURE 1.24 – Modèle cinématique de l'orientation du miroir de tilt

Q1. Identifier les liaisons puis tracer le graphe de structure du mécanisme.
Q2. Déterminer la liaison équivalente entre les solides 1 et 2 puis entre les solides 2 et 3.
Q3. Déterminer la liaison équivalente entre le miroir 1 et le bâti 3.
Q4. En déduire le degré de mobilité du mécanisme puis le degré d'hyperstatisme.